Иррациональные уравнения

1. Решите уравнение: $\sqrt{33-8x}$ = 3-x

Решение:

1 способ. $\sqrt{33-8x}$ = 3-x

Возведем обе части уравнения в квадрат

33-8x= 9-6x+x^2

x^2+2x- 24=0

x=-6, x=4

Проверка:

1) x=-6 $\sqrt{33-8\cdot(-6)}=3-(-6)$

$\sqrt{81}$=9 верно, x=-6 корень

2) x=4 $\sqrt{33-8\cdot 4}=3-4$

$\sqrt{1}$=-1 неверно, x=4 не корень

Ответ: -6

1. Решите уравнение: $\sqrt{33-8x}$ = 3-x

Решение:

2 способ. $\sqrt{33-8x}$ = 3-x

ОДЗ: $\begin{cases} 33-8x \geq 0 \\ 3\text{-x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{33}{8} \\ \text{x} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \text{x} \leq 3$

Возведем обе части уравнения в квадрат

33-8x= 9-6x+x^2

x^2+2x- 24=0

x=-6, x=4- не удовлетворяет ОДЗ

Ответ: -6

1. Решите уравнение: $\sqrt{33-8x}$ = 3-x

Решение:

3 способ. $\sqrt{33-8x}$ = 3-x $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 33-8x=(3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2+2x-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-6$$

Ответ: -6

2. Решите уравнение: $\sqrt{24-10x}$ =3-4x

Решение:

$$\sqrt{24-10x} = 3-4x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4x \geq 0 \\ 24-10x = (3-4x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4x \geq 0 \\ 24-10x = (3-4x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ 16x^2 - 14x - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{5}{8} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{8}.$$

Ответ: $-\frac{5}{8}$

3. Решите уравнение: $\sqrt{x+8}$ –x +2=0

Решение:

$\sqrt{x+8}$ –x +2=0 ⟺ $\sqrt{x+8}$ =x – 2 ⟺

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+8=(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-5x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=\frac{5+\sqrt{41}}{2}$$

Ответ: $\frac{5+\sqrt{41}}{2}$

4. Решите уравнение: $\sqrt{x^2+5x-1}=\sqrt{x+4}$

Решение:

$$\sqrt{x^2+5x-1}=\sqrt{x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x^2+5x-1=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2+4x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Ответ : 1

5. Решите уравнение: $\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$

Решение:

$\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$

ОДЗ: $\begin{cases}2x^2-4x\geq 0\\ x^2+1\geq 0\\ x^2-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-4x\geq 0\\ x^2-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)\\ x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow$

$x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$

Возведем обе части уравнения в квадрат

$2x^2-4x=x^2+1+2\sqrt{x^4-1}+x^2-1\Leftrightarrow$

$\sqrt{x^4-1}=-2x\Leftrightarrow\begin{cases}-2x\geq 0\\ x^4-1=4x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\ x^2=2+\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow x=-\sqrt{2+\sqrt{5}}$

Ответ: $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$

6. Решите уравнение: $\sqrt{15+5x}$ - $\sqrt{19-5x}$ =2

Решение:

$\sqrt{15+5x}$ - $\sqrt{19-5x}$ =2

ОДЗ: $\begin{cases} 15+5x \geq 0 \\ 19-5x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq \frac{19}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$ x∈ $[-3;\ \frac{19}{5}]$

Перепишем исходное уравнение следующим образом:

$\sqrt{15+5x}$ = $\sqrt{19-5x}$ +2

Возведем обе части уравнения в квадрат

$15+5x$= $19-5x$+4 $\sqrt{19-5x}$ +4

2 $\sqrt{19-5x}$=5x-4 $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-4 \geq 0 \\ 4(19-5x) = (5x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0{,}8 \\ 5x^2-4x-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0{,}8 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1{,}2 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$ x=2

Ответ : 2

7. Решите уравнение: $\sqrt{x+2}$ - $\sqrt{x-1}$ =$\sqrt{2x-3}$

Решение:

$\sqrt{x+2}$ - $\sqrt{x-1}$ =$\sqrt{2x-3}$

ОДЗ: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 1 \\ x \geq 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1{,}5$

$\sqrt{x+2}$ =$\sqrt{x-1}$ +$\sqrt{2x-3}$

Возведем обе части уравнения в квадрат

$x+2 = x-1+2\sqrt{(x-1)(2x-3)}+2x-3 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} = 3-x \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 2x^2-5x+3 = (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2+x-6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 2 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 2 \end{array} \right.$

С учетом ОДЗ, решение уравнения x=2

Ответ: 2

8. Решите уравнение: $(x+1)\sqrt{x^2+x-2}$ =2x+2

Решение:

$(x+1)\sqrt{x^2+x-2}$ =2x+ 2 .

Преобразуем данное уравнение $(x+1)(\sqrt{x^2+x-2}$ -2) =0 $\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1=0 \\ x^2+x-2 \geq 0 \end{cases} \\ \sqrt{x^2+x-2} - 2 = 0 \end{array}\right.$$

1) Рассмотрим решение системы x=-1при этом $x^2+x-2<0$, следовательно система решения не имеет.

2) $\sqrt{x^2+x-2}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-2}=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=4 \Leftrightarrow$ x=2, x=-3

Ответ:-3; 2

9. Решите уравнение: $\sqrt{x^2+32}$ - $2\sqrt[4]{x^2+32}$ =3

Решение:

$\sqrt{x^2+32}$ - $2\sqrt[4]{x^2+32}$ =3

Заменим $\sqrt[4]{x^2+32}$=t , t≥ 0. Имеем уравнение t^2-2t=3,   t= -1 и t=3

Условие t≥ 0 удовлетворяет t=3 $\Leftrightarrow$ $\sqrt[4]{x^2+32}$=3 $\Leftrightarrow$ x^2+32=81 $\Leftrightarrow$

$x^2=49$ $\Leftrightarrow$ x= ± 7

Ответ: ± 7

10. Решите уравнение: $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$

Решение:

$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$

Пусть $\sqrt{x-4}$=t, тогда t^2=x-4 и x= t^2+4. Имеем:

$\sqrt{t^2+4-3-2t}+\sqrt{t^2+4-4t}=1 \Leftrightarrow \sqrt{(t-1)^2}+\sqrt{(t-2)^2}=1 \Leftrightarrow$

$$|t-1|+|t-2|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} t<1 \\ 1-t+2-t=1\end{cases} \\ \begin{cases} 1\le t<2 \\ t-1+2-t=1\end{cases} \\ \begin{cases} t\ge 2 \\ t-1+t-2=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} t<1 \\ t=1\end{cases} \\ \begin{cases} 1\le t<2 \\ 0t=0\end{cases} \\ \begin{cases} t\ge 2 \\ t=2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\le t<2 \\ t=2\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$1\le t\le 2 \Leftrightarrow 1\le \sqrt{x-4}\le 2 \Leftrightarrow 1\le x-4\le 4 \Leftrightarrow x\in [5;8]$

Ответ: [5; 8]

Успехов в учебе!