Алгебра Логики

- Алгебра высказываний (Булева Алгебра)
  - Логические переменные
  - Логические операции
  - Логические функции
- Аналитическое представление логических функций
- Анализ и синтез логических моделей
- Временные логические функции
- Автоматы

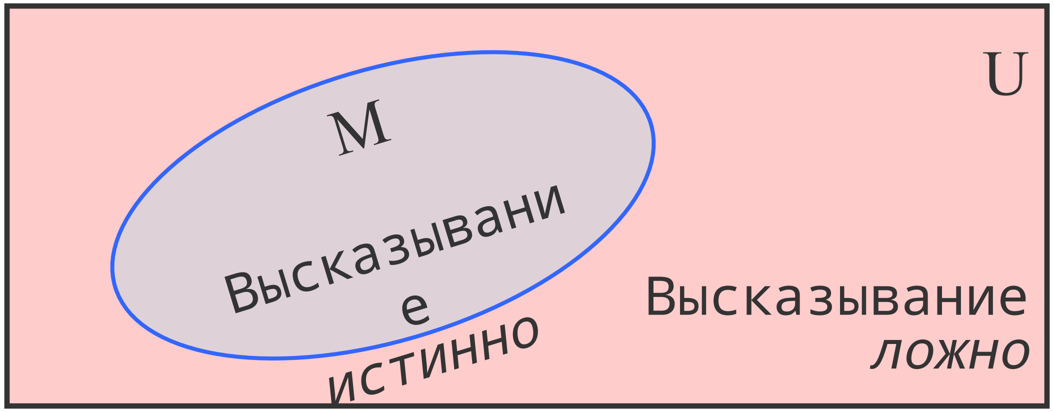
Высказывания

- Множество путем *описания* свойств его элементов может быть выделено из универсального множества.

  U = { ☺ 😐 ☹ :-) ;-) :-| ;-| ;-(:-(:) ;) }

  M = { ☺ :-) :) }

Высказывание
- утверждение для элемента универсума о обладании выделенным свойством



- **Высказывание** – это утверждение, которое может быть *истинным* или *ложным*.

Множества истинности высказывания

- Подмножество универсального множества, выделенное свойством, о котором утверждается в высказывании, называют ***множеством истинности*** высказывания.
- Если множество истинности высказывания – *пустое* множество, то такое высказывание называют ***тождественно ложным***.
- Если множество истинности высказывания совпадает с *универсальным* множеством, то такое высказывание называют ***тождественно истинным***.

Простые и составные высказывания

- Высказывания, которым соответствуют простые (атомарные, выделяемые одним свойством) множества истинности, называются ***простыми***.
- Высказывания, множество истинности которых является результатом какой-либо алгебраической операции над несколькими простыми множествами истинности, называют ***составным***.

Для получения составных высказываний используют различные *логические связки*: и ($\wedge$, &, *, $\cap$), или ($\vee$, |, +, $\cup$), не ($\neg$, □), если … то ($\rightarrow$).

Логические переменные

Для обозначения высказываний вводят логические переменные.

- **Логической переменной** называется такая величина x, которая может принимать только 2 значения: *1 – истина* или *0 – ложь*.

$$x = \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X \end{cases}$$

где $X \subseteq \mathbf{U}$ – множество истинности высказывания x в некотором универсуме $\mathbf{U}$.

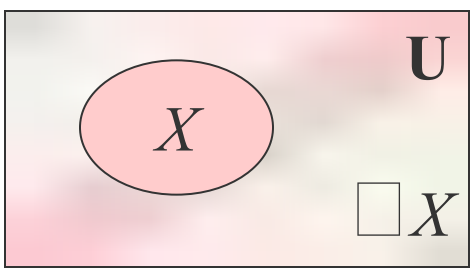
Логические операции

- Связки в составных высказываниях являются <u>логическими операциями</u>, определенными на множестве логических переменных.
- Элементарные логические операции.
  - Логическое отрицание «не» ($\neg$).
  - Логическое сложение «или» ($\vee$, |, +, $\cup$).
  - Логическое умножение «и» ($\wedge$, &, *, $\cap$).

<u>Обозначения</u>:
- Логические
- Программные
- Алгебраические
- Теоретико-множественные

Логическое отрицание

- **Логическим отрицанием** (*инверсией*) высказывания x является высказывание □x (не x) со множеством истинности □X, являющимся дополнением множества истинности X высказывания x до универсального множества **U**.



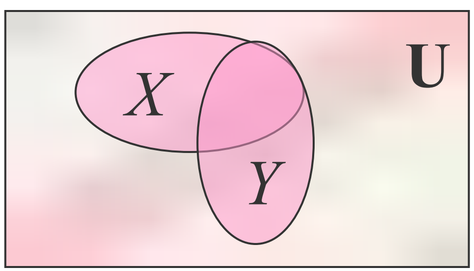
$$\overline{x} = \begin{cases} 1, x = 0; \\ 0, x = 1; \end{cases}$$

x	□x
0	1
1	0

инвертор

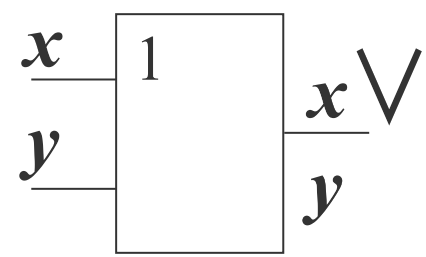
Логическое сложение

- **Логическим сложением** (*дизъюнкцией*) высказываний x и y является высказывание $x \vee y$ (x или y) со множеством истинности $Z = X \cup Y$, являющимся объединением множества истинности X высказывания x и множества истинности Y высказывания y.



$$x \vee y = \begin{cases} 1, x \neq 0; y \neq 0; \\ 0, x = 0, y = 0; \end{cases}$$

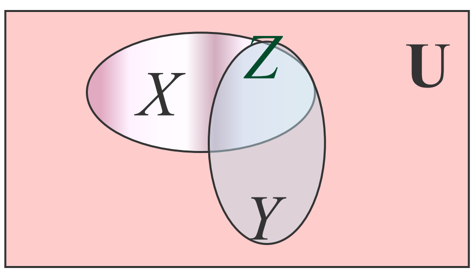
x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



дизъюнктор

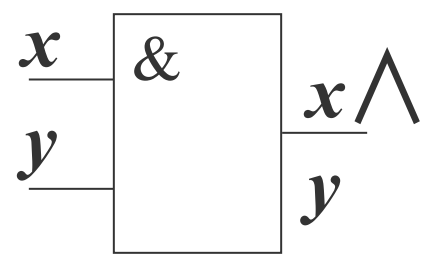
Логическое умножение

- **Логическим умножением** (*конъюнкцией*) высказываний x и y является высказывание $x \bigwedge y$ (x и y) со множеством истинности $Z = X \bigcap Y$, являющимся пересечением множества истинности X высказывания x и множества истинности Y высказывания y.



$$x \wedge y = \begin{cases} 1, x = 1, y = 1; \\ 0, x = 0; y = 0; \end{cases}$$

x	y	$x \bigwedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



конъюнктор

Алгебра высказываний (Булева Алгебра)

- Совокупность логических операций, определяемых на множестве логических переменных B образует «алгебру высказываний» или «булеву алгебру».
- $$\mathrm{A} = < B, \{\square\ , \bigwedge, \bigvee\ \} >$$

Формулы и порядок операций алгебры высказываний

- Выражения, построенные из конечного числа логических переменных, знаков логических операций и констант, называют ***булевыми формулами***.
- Старшинство операций определяется с.о.:
  - Первыми выполняются операции логического *отрицания*,
  - Далее – операции логического *умножения*,
  - Последними – операции логического *сложения*.

Тождественность выражений алгебры высказываний

- Каждая булева формула, содержащая n переменных, может рассматриваться как булева (логическая) функция n переменных.
- Две функции n переменных ***тождественны***, если на всех 2^n наборах своих переменных они принимают одинаковое значение.
- Способы установления тождественности
  - Вычисление значений формул на всех наборах переменных
  - Установление совпадения их множеств истинности

Логические функции

Для обозначения сложных составных высказываний вводятся логические функции.

Имея *n* простых высказываний $x_1, x_2, \ldots, x_n$, каждое из которых может быть *истинным* или *ложным*, можно рассматривать совокупность этих высказываний как кортеж $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Выполнив над ними набор логических операций получаем новое высказывание q, которое так же может быть *истинным* или *ложным*, при этом каждой комбинации значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будет соответствовать определенное значение $q \in \{0, 1\}$.

Значит, логическую операцию или их последовательность можно рассматривать как *отображение* f множества значений кортежа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на множество значений q:

$$f \; : \; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to q.$$

Способы задания логических функций

- ***Логическая функция*** – это функция вида $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, принимающая значение *0* или *1* на наборе логических переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

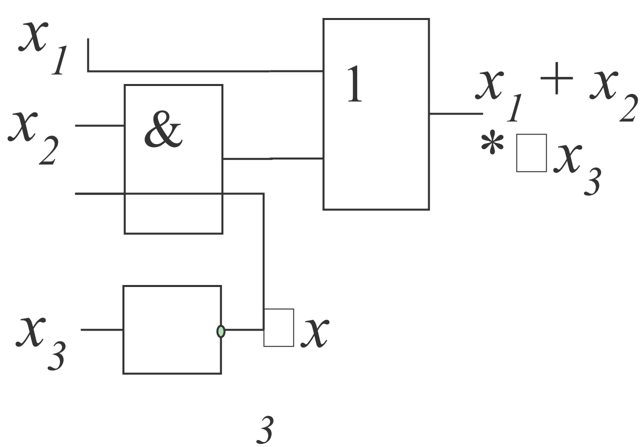
- Выражение алгебры логики

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 * \square x_3$$

- Таблица истинности

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- Логическая схема



Число различных логических функций

- $$B(n) = 2^{2^n}$$

	x_1	x_2	…	x_n	y_1	y_2	…	y_m
1	0	0	…	0	0	1	…	1
2	0	0	…	0	0	0	…	1
…	…	…	…	…	…	…	…	…
2^n	1	1	…	1	0	0	…	1
					1	2	…	2^{2^n}

Логические функции одной переменной

$f(x)$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{x}$	□$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{1}$
0	*0*	*0*	*1*	*1*
1	*0*	*1*	*0*	*1*

Логические функции двух переменных

$$f(x,y)$$

x	y	0	$x\wedge y$	$x\wedge \bar{y}$	x	$\bar{x}\wedge y$	y	$x\oplus y$	$x\vee y$	$x\uparrow y$	$x\equiv y$	$\bar{y}$	$y\to x$	$\bar{x}$	$x\to y$	$x\mid y$	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		тождественный 0	конъюнкция	запрет y		запрет x		сложение по mod 2	дизъюнкция	стрелка Пирса	равнозначность		импликация		импликация	штрих Шеффера	тождественная 1

Свойства элементарных функций

- Конъюнкция, дизъюнкция, отрицание
- Сложение по модулю 2
- Импликация
- Функция Шеффера
- Функция Пирса
- Эквивалентность

Свойства конъюнкции, дизъюнкции, отрицания

- Аксиомы
  - Двойное отрицание

$$x = \overline{\overline{x}}$$

  - Подобные преобразования

$$x = x + x; \qquad x = x \cdot x$$

  - Операции с отрицанием

$$x + \overline{x} = 1; \qquad x \cdot \overline{x} = 0$$

  - Операции с 0 и 1

$$x + 0 = x; \qquad x + 1 = 1$$

$$x \cdot 0 = 0; \qquad x \cdot 1 = x$$

Свойства конъюнкции, дизъюнкции, отрицания

- Законы
  - Сочетательный (свойство ассоциативности)
    $$x+(y+z)=(x+y)+z=x+y+z$$
    $$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z=x\cdot y\cdot z$$
  - Переместительный (свойство коммутативности)
    $$x+y=y+x; \quad x\cdot y=y\cdot x$$
  - Распределительный (свойство дистрибутивности)
    $$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$$
    $$x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$$
  - Де Мо́ргана
    $$\overline{x+y}=\overline{x}\cdot\overline{y}; \quad \overline{x\cdot y}=\overline{x}+\overline{y}$$
    следствие:
    $$x+y=\overline{\overline{x}\cdot\overline{y}}; \quad x\cdot y=\overline{\overline{x}+\overline{y}}$$
  - Поглощения
    $$x+x\cdot y=x; \quad x\cdot(x+y)=x$$

Свойства операции сложения по модулю 2

- $x \oplus y = x \cdot \square y + \square x \cdot y = (x + y) \cdot (\square x + \square y)$
- **Аксиомы**
  - Подобные преобразования
    $$x \oplus x = 0$$
  - Операция с отрицанием
    $$x \oplus \square x = 1$$
  - Операции с 0 и 1
    $$x \oplus 1 = \square x; \quad x \oplus 0 = x$$

Свойства операции сложения по модулю 2

- **Законы**
  - Сочетательный (свойство ассоциативности)

    $$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

  - Переместительный (свойство коммутативности)

    $$x \oplus y = y \oplus x$$

  - Распределительный (свойство дистрибутивности)

    $$x \cdot (y \oplus z) = (x \cdot y) \oplus (x \cdot z)$$

- **Представление базовых функций**
  - Отрицание $\square x = x \oplus 1$
  - Сложение $x + y = x \oplus y \oplus x \cdot y$
  - Умножение $x \cdot y = (x \oplus y) \oplus (x + y)$

Свойства импликации

- $x \to y = \neg x + y$
- **Аксиомы**
  - Подобные преобразования $x \to x = 1$
  - Операция с отрицанием $x \to \neg x = \neg x$
  - Операции с 0 и 1 $x \to 0 = \neg x\,;\ x \to 1 = 1$
    $0 \to x = 1;\quad 1 \to x = x$
- **Законы**
  - “Переместительный” (свойство коммутативности)
    $x \to y = \neg y \to \neg x$
- **Представление базовых функций**
  - Отрицание $\neg x = x \to 0$
  - Сложение $x + y = \neg x \to y$
  - Умножение $x \cdot y = \overline{x \to \overline{y}}$

Свойства функции Шеффера

- $x \mid y = \overline{x \cdot y}$
- **Аксиомы**
  - Подобные преобразования $x \mid x = \square x$
  - Операция с отрицанием $x \mid \square x = 1$
  - Операция с 0 и 1 $x \mid 0 = 1; \quad x \mid 1 = \square x$
- **Законы** $\square x \mid 0 = 1; \quad \square x \mid 1 = x$
  - Переместительный (свойство коммутативности)

    $x \mid y = y \mid x$
- **Представление базовых функций**
  - Отрицание $\square x = x \mid x$
  - Сложение $x + y = (x \mid x) \mid (y \mid y)$
  - Умножение $x \cdot y = (x \mid y) \mid (x \mid y)$

Свойства функции Пирса

- $$x \uparrow y = \overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$
- **Аксиомы**
  - Подобные преобразования $x \uparrow x = \square x$
  - Операция с отрицанием $x \uparrow \square x = 0$
  - Операция с 0 и 1 $x \uparrow 0 = \square x$; $x \uparrow 1 = 0$
- **Законы** $\square x \uparrow 0 = \square x$; $\square x \uparrow 1 = 0$
  - Переместительный (свойство коммутативности)

    $x \uparrow y = y \uparrow x$
- **Представление базовых функций**
  - Отрицание $\square x = x \uparrow x$
  - Сложение $x + y = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)$
  - Умножение $x \cdot y = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)$

Эквивалентность

$$x \equiv y = xy + \overline{x}\,\overline{y}$$

$$x \equiv x = 1$$

$$x \equiv \overline{x} = 0$$

$$x \equiv 1 = x$$

$$x \equiv 0 = \overline{x}$$

Аналитическое представление логических функций

- Булевым выражением *n* переменных являются
  - Элементы идентичности **0** и **1**;
  - Булевы переменные $x_1, x_2 \ldots x_n$;
  - (P+Q), (P·Q) и Q, где P и Q – булевы выражения.
- Булева функция *n* переменных – это функция f:$\mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$ [$\mathbf{B} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$] такая, что f($x_1, x_2 \ldots x_n$) является булевым выражением.
- При фиксированном наборе переменных $x_1, x_2 \ldots x_n$ и множестве значений каждой переменой $x_i \in \{0,1\}$, каждый *i* набор представляет собой двоичное число:

$$i = x_1 \cdot 2^{n-1} + x_2 \cdot 2^{n-2} + \ldots + x_{n-1} \cdot 2^1 + x_n \cdot 2^0$$

Литералы

- ***Литерал*** – это булева переменная x или ее дополнение □x.

Литералы записывают как

x^1 для переменной x, и
x^0 для ее дополнения.

$$x^e = \begin{cases} \bar{x}, & \textit{если} \quad e = 0 \\ x, & \textit{если} \quad e = 1 \end{cases}$$

$$x^e = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad x \neq e \\ 1, & \textit{если} \quad x = e \end{cases}$$

Термы

- **Терм** – это выражение составленное из <u>литералов</u> различных переменных (по одному литералу на каждую переменную), соединенных либо операцией умножения (*конъюнктивный терм*), либо операцией сложения (*дизъюнктивный терм*).

Например, $x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_4 \cdot \overline{x}_5$ $\quad x_1\overline{x}_2x_4\overline{x}_5$

$$x_1 + \overline{x}_2 + x_3 + \overline{x}_5$$

- ***Ранг*** терма определяется <u>количеством переменных</u>, входящих в данный терм.

Минтермы

- **Минтерм** (полное произведение или *конъюнктивный терм*) n переменных – это булево выражение, которое имеет форму произведения всех булевых переменных или их дополнений, то есть минтерм состоит из n литералов по 1-му литералу на каждую переменную.

$$m_{e_1 e_2 \ldots e_n} = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n} \qquad i = e_1 e_2 \ldots e_n$$

$$m_{10110} = x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^1 x_5^0 = x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 = m_{22}$$

$$m_{0111} = x_1^0 x_2^1 x_3^1 x_4^1 = \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 = m_7$$

Минтермы

- **Теорема.** Среди 2^n различных минтермов для n переменных $x_1, x_2\dots x_n$ ни одна из пар минтермов не представляет собой эквивалентные булевы выражения.

<u>Доказательство</u>:

Так как $0^0 = \square 0 = 1$, а $1^1=1$, то если $x_i=e_i$, то $x_i^{ei}=1$.

Значит, для минтерма $m=m_{e1e2\dots en}$ подстановка $x_i=e_i$ для $i=1,2,\dots,n$ дает произведение n термов, все из которых равны 1, следовательно, минтерм равен 1.

Любой другой минтерм содержит хотя бы 1 литерал-дополнение для x_i из m. А замена хотя бы 1-го литерала минтерма m на его дополнение ($1\rightarrow0$) обнуляет минтерм m.

Т.о., для любых 2-х различных минтермов существует по крайней мере 1 набор значений переменных, для которого значения минтермов различны и, следовательно, ни какие 2 различных минтерма не являются эквивалентными. ❐

Дизъюнктивные формы представления логических функций

- **Теорема**. Любая таблично заданная, отличная от **0**, логическая функция может быть представлена аналитически в виде суммы ее минтермов, на которых она равна **1**.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underset{i}{\vee} m_i$$

где i – номера наборов, на которых функция равна 1.

<u>Доказательство</u>:

Если на каком-либо наборе функция f(x'_1, x'_2…x'_n)=1, то вследствие того, что $x \vee 1=1$ в представлении функции $\underset{i}{\vee} m_i$ всегда найдется минтерм m_i=1.

Если же на наборе x''_1, x''_2… x''_n f(x''_1, x''_2…x''_n)=0, то в данном представлении $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underset{i}{\vee} m_i$ не найдется ни одного элемента, равного 1, так как $0 \vee 0 \vee \ldots \vee 0 = 0$.

Получается, что каждому набору i, для которого f_i=1, соответствует минтерм m_i, а для наборов j, на которых f_j=0, нет ни одного минтерма m_i=1. Поэтому таблица истинности однозначно отображается аналитической записью вида: ❐

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underset{i}{\vee} m_i$$

Дизъюнктивные формы представления логических функций

- ***Следствие***. Любая таблично заданная логическая функция может быть представлена в виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underset{i}{\Delta} m_i,$$

где

$$\Delta = \{\vee, \oplus\}$$

Доказательство:

Операция, объединяющая минтермы в представлении функции должна удовлетворять следующим требованиям:

1) когда все минтермы представления равны 0, функция равна 0;
2) функция равна 1, когда в представлении есть 1 минтерм, равный 1.

m_i	m_j	$\vee$	$\oplus$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

Дизъюнктивные формы представления логических функций

- Объединение конъюнктивных термов переменного ранга называют ***нормальной дизъюнктивной формой*** (НДФ) представления логической функции.

Например,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \cdot \square x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + x_2 \cdot \square x_3 \cdot x_4 \cdot \square x_5 + \square x_2 \cdot \square x_3$$

Дизъюнктивные формы представления логических функций

- Объединение конъюнктивных термов <u>максимального</u> ранга называют ***совершенной нормальной дизъюнктивной формой*** (СНДФ) представления логической функции.
- <u>Свойства</u> СНДФ
  - СНДФ не имеет двух одинаковых минтермов
  - Ни один минтерм СНДФ не содержит двух одинаковых множителей
  - Ни один минтерм СНДФ не содержит вместе с переменной ее отрицание

Разложение булевой функции по *m* переменным

- **Теорема**. Каждая булева функция f(x_1, x_2… x_n), отличная от **0**, может быть представлена в виде суммы булевых выражений типа $m_{e_1 e_2 \ldots e_n} = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}$

  Или $f(x_1, x_2, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = \underset{(e)}{\vee} f(e_1, e_2, \ldots e_n) \cdot x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}$

<u>Доказательство</u>:

1. Для функции одной переменной

f(x) = f(0) · x^0 + f(1) · x^1 = f(0) ·□x + f(1) · x

(a) f(x) = 0, f(x) = f(0) ·□x + f(1) · x = 0 ·□x + 0 · x = 0 □

f(x) = 1; f(x) = f(0) ·□x + f(1) · x = 1 ·□x + 1 · x = 1 □

(b) f(x) = x; f(x) = f(0) ·□x + f(1) · x = 0 ·□x + 1 · x = x □

(c) f(x) =□x; f(x) = f(0) ·□x + f(1) · x = 1 ·□x + 0 · x =□x □

(d) f(x) = 0+x, f(x) = 1+x, f(x) = 0 +□x, f(x) = 1 +□x,

f(x) = 0·x, f(x) = 1 · x, f(x) = 0 ·□x, f(x) = 1 ·□x.

(… □ выполнение показать самостоятельно)

Разложение булевой функции по *m* переменным

2. Для функции n переменных

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{(e)} f(e_1, e_2, \ldots e_n) \cdot x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}$$

Если представить эту функцию в виде функции одной переменной x_1 и применить к ней результаты теоремы, то получим: $f(x_1, x_2 \ldots x_n) = [f(0, x_2 \ldots x_n) \cdot \square x_1] + [f(1, x_2 \ldots x_n) \cdot x_1]$.

Теперь функции $f(0, x_2 \ldots x_n)$ и $f(1, x_2 \ldots x_n)$ также рассматриваем как функции одной переменной x_2 и применяем к ним теорему, что дает: $f(0, x_2 \ldots x_n) = [f(0, 0, x_3 \ldots x_n) \cdot \square x_2] + [f(0, 1, x_3 \ldots x_n) \cdot x_2]$,

$f(1, x_2 \ldots x_n) = [f(1, 0, x_3 \ldots x_n) \cdot \square x_2] + [f(1, 1, x_3 \ldots x_n) \cdot x_2]$.

$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = [f(0, 0, x_3 \ldots x_n) \cdot \square x_1 \cdot \square x_2] + [f(0, 1, x_3 \ldots x_n) \cdot \square x_1 \cdot x_2] + \quad +[f(1, 0, x_3 \ldots x_n) \cdot x_1 \cdot \square x_2] + [f(1, 1, x_3 \ldots x_n) \cdot x_1 \cdot x_2]$.

Продолжая в этом направлении разложение по всем остальным переменным, получаем окончательный результат теоремы:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{(e)} f(e_1, e_2, \ldots e_n) \cdot x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}$$

где $f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ – это либо 0, либо 1, и это значение получается при подстановке $x_i = e_i$ в исходную функцию.

Разложение булевой функции по *m* переменным

- ***Следствие 1***. Если m=1, то логическая функция представляется в виде

  $f(x_1, x_2 \ldots x_n) = \square x_1 \cdot f(0, x_2 \ldots x_n) + x_1 \cdot f(1, x_2 \ldots x_n)$.

- ***Следствие 2***. Если m=n, то логическая функция представляется в виде СНДФ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{1} x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}$$

Порядок получения СНДФ по таблице истинности

Процедура построения СНДФ

Параметры: таблица истинности (ТИ), n – количество аргументов

{*Переменные*: i – номер набора (№ строки в ТИ)

f = “”;

Для каждого i-го набора ТИ ($0<i<2^n$) *выполнить*

{ *Если* на данном наборе функция равна **1**,

то сформировать минтерм m_i

добавить его к представлению функции ($f=f+m_i$)

}

}

Процедура построения минтерма

Параметры: i-й набор ТИ

{*Переменные*: j – номер элемента в наборе

m_i=“”;

Для каждого j-го элемента i-го набора ТИ ($0<j<n+1$) *выполнить*

{

Если $x_j = 0$, *то* $m_i = m_i \cdot \square x_j$, *иначе* $m_i = m_i \cdot x_j$

}

}

Макстермы

- **Макстерм** (полная сумма или *дизъюнктивный терм*) n переменных – это булево выражение, которое имеет форму <u>суммы</u> всех булевых переменных или их дополнений, то есть макстерм состоит из суммы n литералов по 1-му литералу на каждую переменную.

$$M_{e_1 e_2 \ldots e_n} = x_1^{\bar{e}_1} + x_2^{\bar{e}_2} + \ldots + x_n^{\bar{e}_n}$$

$$M_{10110} = x_1^0 + x_2^1 + x_3^0 + x_4^0 + x_5^1 = \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + x_5$$

$$M_{0111} = x_1^1 + x_2^0 + x_3^0 + x_4^0 = x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$$

Макстермы

- **Теорема.** Среди 2^n различных макстермов для n переменных $x_1, x_2 \dots x_n$ ни одна из пар макстермов не представляет собой эквивалентные булевы выражения.

<u>Доказательство</u>: Так как $x^e = e \cdot x + \square e \cdot \square x$, то если $x_i = e_i$, то $x_i^{\square e_i} = \mathbf{0}$.

x_i	e_i	$\overline{e}_i$	$x_i^{\overline{e}_i}$
0	0	1	$x_i^1 = x_i = 0$
0	1	0	$x_i^0 = \overline{x}_i = 1$
1	0	1	$x_i^1 = x_i = 1$
1	1	0	$x_i^0 = \overline{x}_i = 0$

Значит, для макстерма $M=M_{e1e2\dots en}$ подстановка $x_i=e_i$ для i=1,2,…,n дает сумму n термов, все из которых равны 0, следовательно, макстерм равен 0.

Любой другой макстерм содержит хотя бы 1 литерал-дополнение для x_i из M. А замена хотя бы 1-го литерала макстерма M на его дополнение (0→1) делает макстерм M единичным.

Т.о., для любых 2-х различных макстермов существует по крайней мере 1 набор значений переменных, для которого значения макстермов различны и, следовательно, ни какие 2 различных макстерма не являются эквивалентными. ❐

Конъюнктивные формы представления логических функций

- **Теорема**. Любая таблично заданная, отличная от 1, логическая функция может быть представлена аналитически в виде произведения ее макстермов, на которых она равна **0**.

  $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underset{i}{\wedge} M_i$ где i – номера наборов, на которых функция равна 0.

<u>Доказательство</u>:

Если на каком-либо наборе функция f(x'_1, x'_2…x'_n)=0, то вследствие того, что $x \wedge 0=0$ в представлении функции $\underset{i}{\wedge} M_i$ всегда найдется макстерм M_i=0.

Если же на наборе x''_1, x''_2… x''_n f(x''_1, x''_2…x''_n)=1, то в данном представлении $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underset{i}{\wedge} M_i$ не найдется ни одного элемента, равного 0, так как $1 \wedge 1 \wedge \ldots \wedge 1 = 1$.

Получается, что каждому набору i, для которого f_i=0, соответствует макстерм M_i, а для наборов j, на которых f_j=1, нет ни одного макстерма M_i=1. Поэтому таблица истинности однозначно отображается аналитической записью вида: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underset{i}{\wedge} M_i$

Конъюнктивные формы представления логических функций

- ***Следствие***. Любая таблично заданная логическая функция может быть представлена в виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underset{i}{\Delta} M_i,$$

где $\Delta = \{\wedge, \equiv\}$

Доказательство:

Операция, объединяющая макстермы в представлении функции должна удовлетворять следующим требованиям:

1) функция равна 0, когда в представлении есть 1 макстерм, равный 0;
2) функция равна 1, когда все макстермы представления равны 1.

M_i	M_j	$\wedge$	$\equiv$
0	*0*	*0*	*1*
0	*1*	*0*	*0*
1	*0*	*0*	*0*
1	*1*	*1*	*1*

Конъюнктивные формы представления логических функций

- Пересечение дизъюнктивных термов переменного ранга называют ***нормальной конъюнктивной формой*** (НКФ) представления логической функции.

Например,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) \cdot \square x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_2) \cdot (\square x_3 + x_4 + \square x_5) \cdot (\square x_2 + \square x_3)$$

Конъюнктивные формы представления логических функций

- Пересечение дизъюнктивных термов максимального ранга называют ***совершенной нормальной конъюнктивной формой*** (СНКФ) представления логической функции.
- Свойства СНКФ
  - СНКФ не имеет двух одинаковых макстермов
  - Ни один макстерм СНКФ не содержит двух одинаковых множителей
  - Ни один макстерм СНКФ не содержит вместе с переменной ее отрицание

Базис представления логических функций

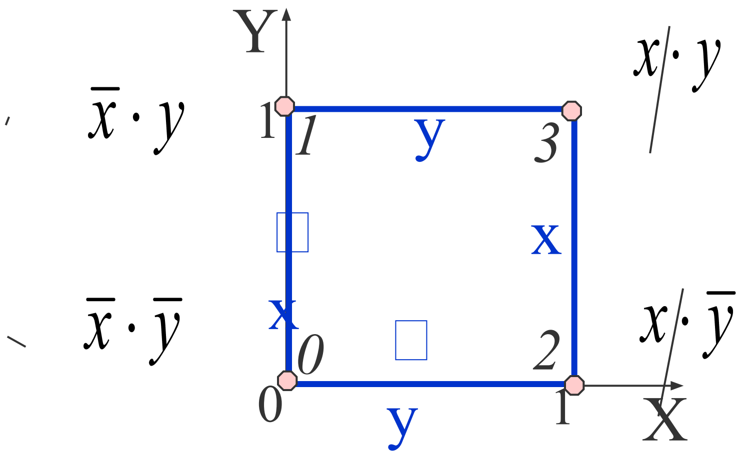
- Набор логических операций называется ***полным***, если он позволяет представить любую логическую функцию.
- Примеры полных базисов
  - { и, или, не }
  - { и, не }
  - { или, не}
  - { функция Шеффера }
  - { функция Пирса }

Избыточный набор операций

Минимальный базис

Геометрическое представление логических функций

- Функцию 2-х переменных можно представить на плоскости в декартовой системе координат.



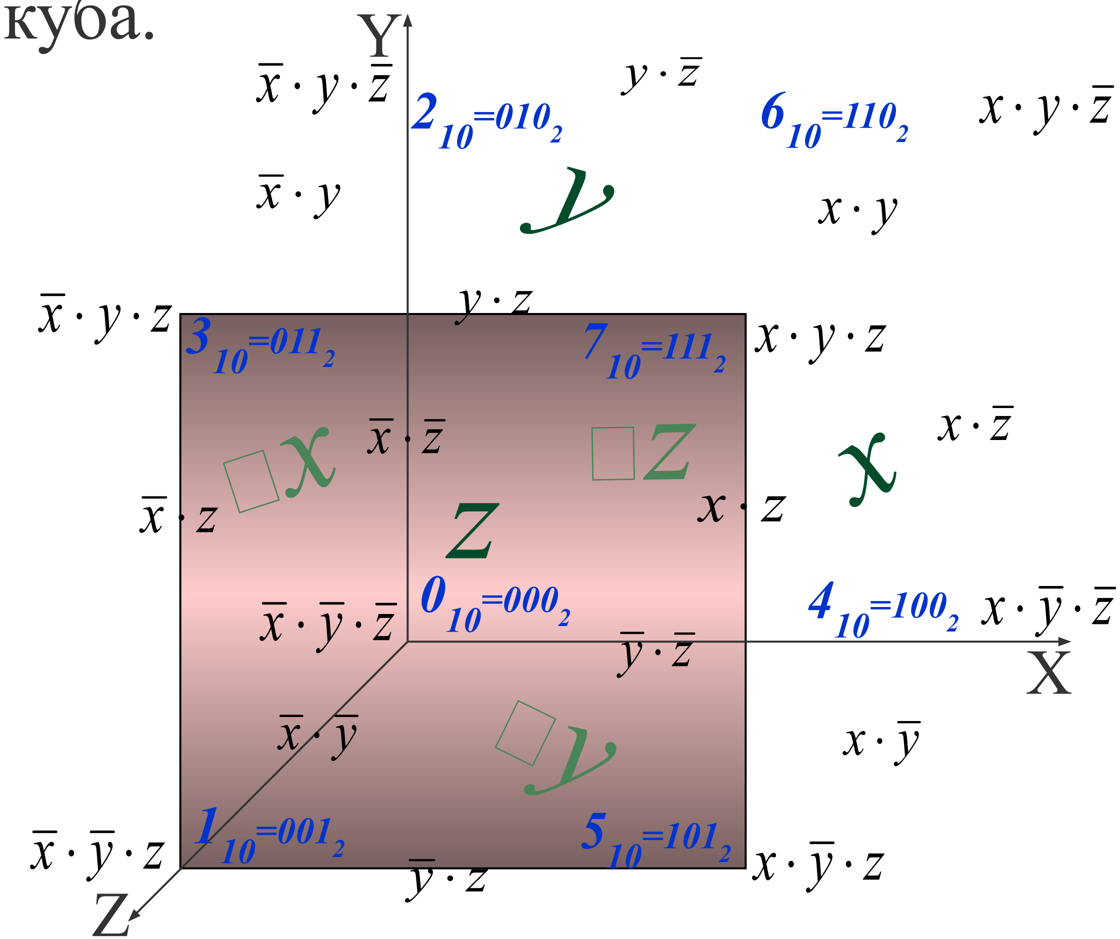
«склеивание» по x

$$x \cdot \bar{y} + x \cdot y = x \cdot (\bar{y} + y) = x \cdot 1 = x$$

- Две вершины, принадлежащие одному и тому же ребру, называются <u>соседними</u> и «склеиваются» по переменной, меняющейся вдоль этого ребра.

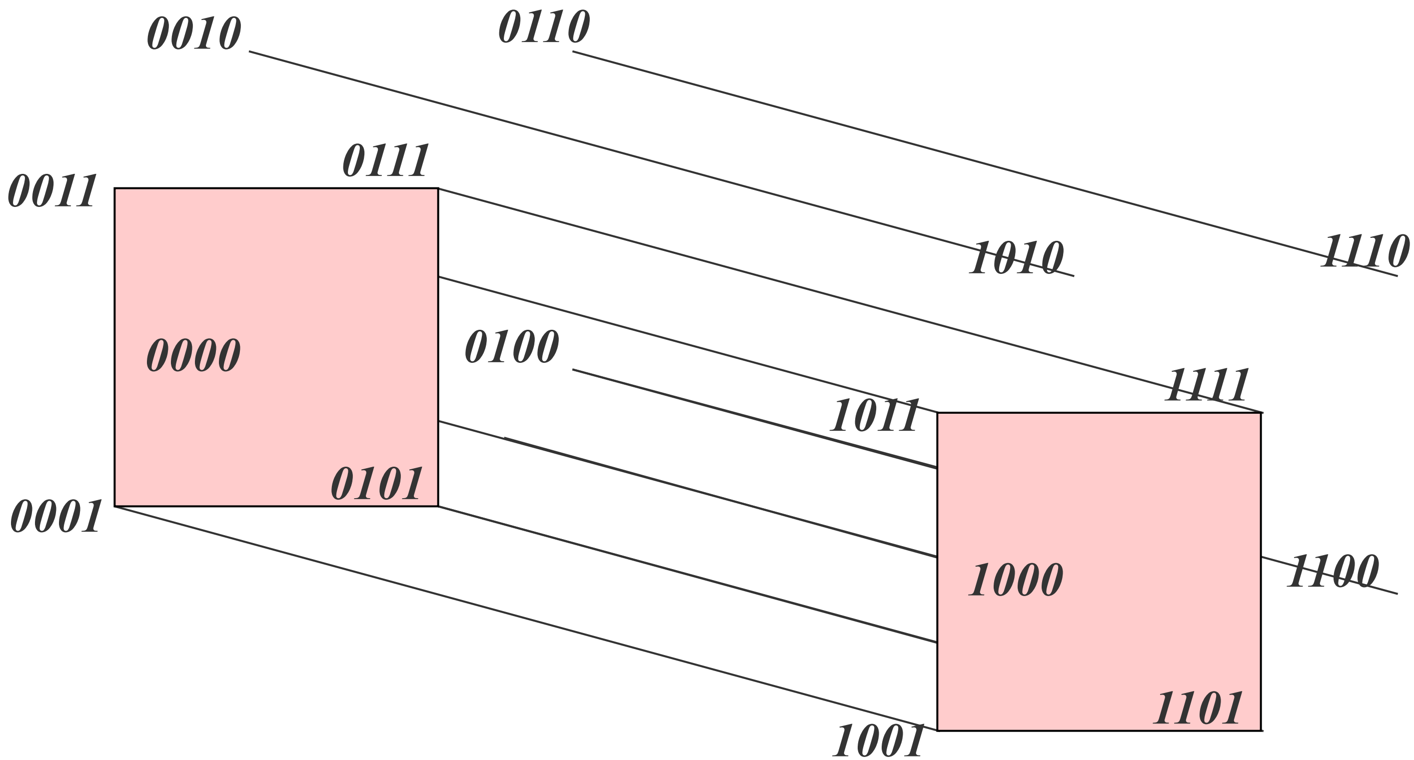
Геометрическое представление логических функций

- Функцию 3-х переменных можно представить в 3-мерном пространстве декартовой системы координат в виде 3-мерного куба.



Геометрическое представление логических функций

- Функцию 4-х переменных представляют в виде 4-мерного куба.



Геометрическое представление логических функций

- Каждый набор $x_1, x_2 \dots x_n$ может рассматриваться как n-мерный вектор, определяющий *точку* n-мерного пространства.
- Все множество наборов, на которых определена функция n-переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, представляется в виде вершин n-мерного куба.
- Отмечая точками вершины, где функция равна 1, получаем ее *геометрическое* представление.

Минимизация логических функций

- Форма представления логической функции, которая содержит
  минимальное количество термов
  с минимальным количеством литералов в них,
  называется ***минимальной формой*** представления логической функции.
  - Термы максимального ранга называют ***0-кубами*** (**точки**) и обозначают **K^0**.
  - Если 2 0-куба из комплекта K^0 отличаются только по 1-й координате, то они образуют путем «склеивания» ***1-куб*** **K^1** (**отрезок**).
  - Если 2 1-куба из комплекта K^1 отличаются только по 1-й координате, то они образуют путем «склеивания» ***2-куб*** **K^2** (**плоскость**).
  - И т.д.

Минимизация логических функций

- Пример:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$K^0 = \begin{bmatrix} 010 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{bmatrix}$$

$$K^1 = \begin{bmatrix} *10 \\ 10* \\ 1*0 \\ 1*1 \\ 11* \end{bmatrix}$$

$$K^2 = \{1**\}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3 =$$

$$= x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2 = x_2 \bar{x}_3 + x_1$$

Минимизация логических функций

- Пример:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\mathrm{K}^0 = \begin{bmatrix} 000 \\ 001 \\ 011 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{K}^1 = \begin{bmatrix} 00* \\ 0*1 \end{bmatrix}$$

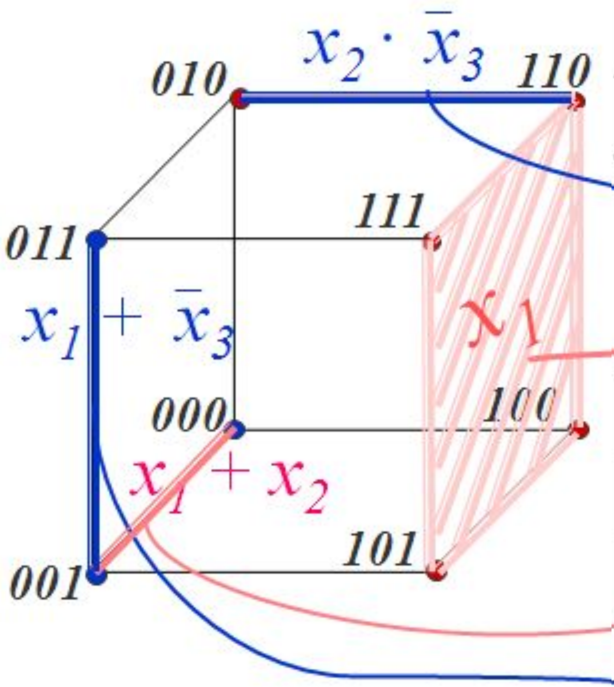
$$(x_1 + x_2 + x_3)\cdot(x_1 + x_2 + \overline{x}_3) = \\ = (x_1 + x_2) + (x_3 \cdot \overline{x}_3) = \\ = (x_1 + x_2) + 0 = x_1 + x_2$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\underline{x_1 + x_2 + x_3})\cdot(\underline{x_1 + x_2 + \overline{x}_3})\cdot(\underline{x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3}) = \\ = (x_1 + x_2)\cdot(x_1 + \overline{x}_3) = x_1 + x_2\overline{x}_3$$

Карты Карно

- Карты Карно – развертки кубов на плоскости, где вершины куба – клетки карты, координаты которых совпадают с координатами соответствующих вершин куба.
- Карта заполняется также как таблица истинности: в клетке ставится 1, если эта клетка соответствует набору, на котором функция равна 1.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	000	001	011	010 *1*
1	100 *1*	101 *1*	111 *1*	110 *1*

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	000 *0*	001 *0*	011 *0*	010
1	100	101	111	110

Правила минимизации

- 2 соседние клетки (2 0-куба) образуют *1-куб*. Клетки, лежащие на границах карты, также являются соседними.
- 4 соседние клетки могут объединяться, образуя *2-куб*.
- 8 соседних клеток могут объединяться, образуя *3-куб*.
- 16 – *4-куб*.
- И т.д.

x_1x_2/x_3x_4	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

3-куб

2-куб

4-куб

1-куб

Минимизация функций большой размерности

- При числе переменных больше 4 отобразить логическую функцию в виде единой плоской карты Карно невозможно.
- В этом случае строят ***комбинированную карту***, состоящую из более простых (например, 4-мерных), и процедура минимизации состоит в следующем:
  - Сначала находят минимальные формы внутри 4-х мерных кубов.
  - Затем, расширяя понятие <u>соседних клеток</u>, отыскивают минимальные термы для совокупности карт.

Примечание: Соседними клетками являются клетки, совпадающие при совмещении карт поворотом вокруг общего ребра.

Анализ и синтез логических моделей

- Понятие математической модели
- Логические модели
  - Виды логических моделей
  - Задача синтеза
  - Задача анализа

Понятие математической модели

- Пусть *A* – произвольное множество. <u>*n*-арная функция *f*</u>, определенная на *A* со значениями на множестве { «*Истина*», «*Ложь*» }, называется *n-арным* ***предикатом*** на A.
- ***Алгебраической системой*** называется тройка

$$< \boldsymbol{A}, \mathbf{Q_F}, \mathbf{Q_P} >$$, состоящая из

  - непустого множества *A*,
  - множества операций Q_F, определенных на множестве *A*,
  - и множества предикатов Q_P, заданных на множестве *A*.
- Алгебраическая система **<A,Q>** называется ***алгеброй***, если $Q_P=\varnothing$, и ***моделью***, если $Q_F=\varnothing$.

Понятие системной модели

Уровень 4, 5 …

МЕТАСИСТЕМЫ

Отношения между определенными ниже отношениями

Уровень 3

СТРУКТУРИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Отношения между определенными на уровне 2 моделями

Уровень 2

ПОРОЖДАЮЩИЕ СИСТЕМЫ

Модели, порождающие определенные на уровне 1 данные

Уровень 1

СИСТЕМЫ ДАННЫХ

Наблюдения, описанные на определенном на уровне 0 языке описания данных

Уровень 0

ИСХОДНЫЕ СИСТЕМЫ

Язык описания данных

Логические модели

- **Логическая модель** в отличии от логической функции, имея n входов, преобразует их в логические значения m выходов (m≥1).
  - ***Комбинационные модели*** (*схемы*) – логические модели, в которых логические преобразования входных логических значений не зависят от времени и определяются только этими значениями на входе.
  - ***Накапливающие модели*** (элементы с памятью) – логические модели, в которых логические преобразования входных логических значений зависят от состояния модели в предыдущие моменты времени.

Задачи анализа и синтеза логической модели

- Задача ***анализа*** логической модели (схемы) сводится к построению логической формулы, являющейся моделью функции, выполняемой данной схемой, с целью минимизации ее элементов.
- Задача ***синтеза*** логической модели (схемы) сводится к построению диаграммы логической модели по заданным входам (входным переменным) и выходной функции, при этом может быть необходимо учитывать ограничения в виде:
  - Либо *базиса* логических элементов, на которых должна быть построена схема;
  - Либо по *количеству* логических элементов.

Синтез логических моделей с одним выходом

Пример: Синтезировать схему в базисе «не-импликация», если функция имеет вид □x → (x ·□y + z).

- **Шаг 1**.

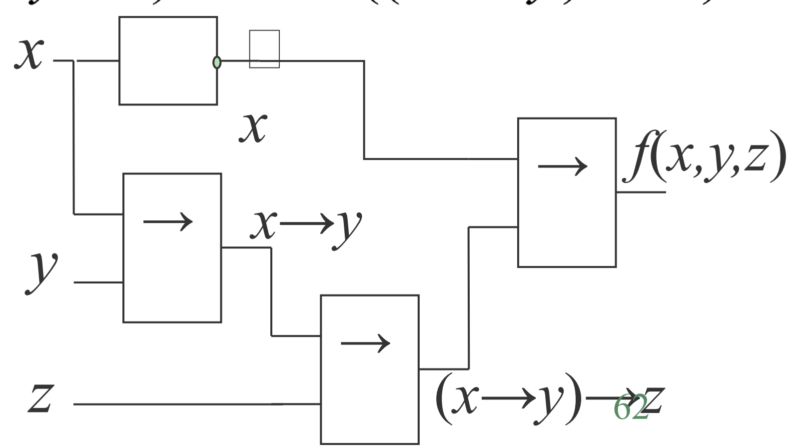
  Найти выражение для выходной функции в заданном базисе.

Перейдем от смешанной системы логических функций к заданному базису «не-импликация» на основе правил перехода: $x \to y =$ $= \square x + y = \overline{x \cdot \overline{y}}$ и $x \cdot \overline{y} = \overline{x \to y}$

$$f(x, y, z) = \overline{x} \to (x \cdot \overline{y} + z) = \overline{x} \to (\overline{x \to y} + z) = \overline{x} \to ((x \to y) \to z)$$

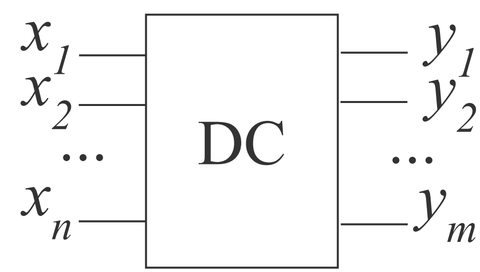
- **Шаг 2**.

  Найти минимальную форму для логической функции и построить схему.



Синтез логических моделей с несколькими выходами

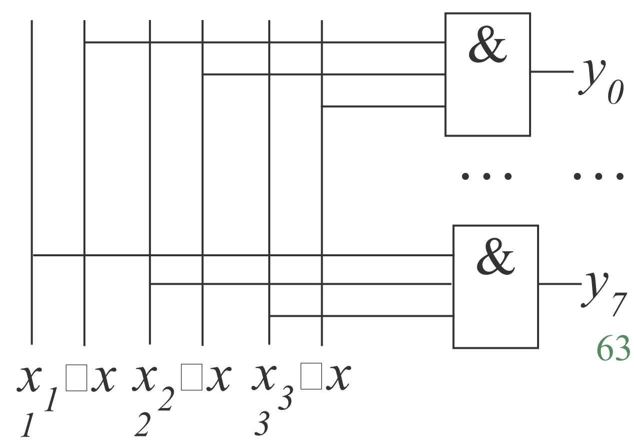
- Задача синтеза *модели с n входами* и *m выходами* отличается от задачи синтеза m моделей с n входами и 1 выходом тем, что при решении необходимо ***исключить дублирование*** в m схемах синтезируемых функций.



- Например, дешифратор.

Таблица истинности (n=3,m=8)

$$y_0 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3;$$
$$y_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3;$$
$$y_2 = \ldots$$



Методы синтеза схем моделей

- ***Классический*** (основан на выделении простых импликант за… …
  - Найти про… …ы логически…
  - Выразить …
  - Синтезиро… …ростые импликант…
- ***Метод кас***… …ложении логической …
  - Каждая ло… …по k переменн… …ены функции $f_{ij\ldots}$ …ентов;
  - Синтезируется система, соответствующая системе уравнений минимального ранга и строится ее схема.

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = \square x_n f_1 + x_n f_2;$$

$$f_1(x_1, x_2 \ldots x_{n-1}) = \square x_{n-1} f_{11} + x_{n-1} f_{12};$$

$$f_2(x_1, x_2 \ldots x_{n-1}) = \square x_{n-1} f_{21} + x_{n-1} f_{22};$$

$$f_{11}(x_1, x_2 \ldots x_{n-2}) = \square x_{n-2} f_{111} + x_{n-2} f_{112};$$

$$f_{12}(x_1, x_2 \ldots x_{n-2}) = \square x_{n-2} f_{121} + x_{n-2} f_{122};$$

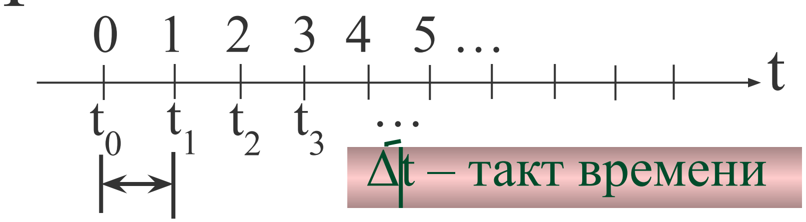
$$f_{21}(x_1, x_2 \ldots x_{n-2}) = \square x_{n-2} f_{211} + x_{n-2} f_{212};$$

$$f_{22}(x_1, x_2 \ldots x_{n-2}) = \square x_{n-2} f_{221} + x_{n-2} f_{222};$$

… … …

Временные логические функции

- Так как <u>время</u> – непрерывная величина, то вводят понятие *автоматного времени*, принимающего дискретные целочисленные значения 0, 1, 2, … .



- Логическая функция $y=f(x_1,x_2,\dots x_n,t)$, принимающая значения {0,1} при $0 \le t \le s\text{-}1$, где s – количество тактов автоматного времени, называется ***временной***.
- Число различных ВБФ равно $2^{s\cdot 2^n}$

Время принимает s значений

2^n наборов для каждого t_i

Представление ВБФ

- $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n, t) = \mathrm{f}_0 \cdot \tau_0 \,\Delta\, \mathrm{f}_1 \cdot \tau_1 \,\Delta \ldots \Delta\, \mathrm{f}_{s-1} \cdot \tau_{s-1}$, где

  f_i – конъюнктивный/дизъюнктивный терм от $x_1, x_2, \ldots x_n$;

  τ_i – вспомогательная функция, принимающая значение из множества $\{0,1\}$ в момент времени t_i;

  Δ - операция дизъюнкции/конъюнкции.

- Такая форма представления позволяет применять к временным булевым функциям (ВБФ) все методы упрощения и минимизации простых логических (булевых) функций.

Представление ВБФ. Пример

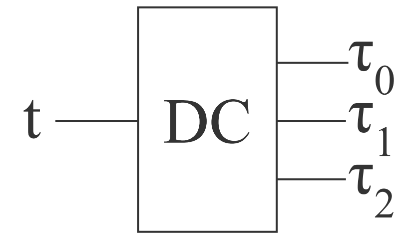
x_1	x_2	t	$f(x_1, x_2, t)$	f_i
0	0	0	0	$f_0(x_1, x_2) = x_1 \cdot \overline{x}_2$
0	1	0	0	
1	0	0	1	
1	1	0	0	
0	0	1	0	$f_1(x_1, x_2) = x_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_1 \cdot x_2$
0	1	1	1	
1	0	1	1	
1	1	1	0	
0	0	2	0	$f_2(x_1, x_2) = x_1$
0	1	2	0	
1	0	2	1	
1	1	2	1	

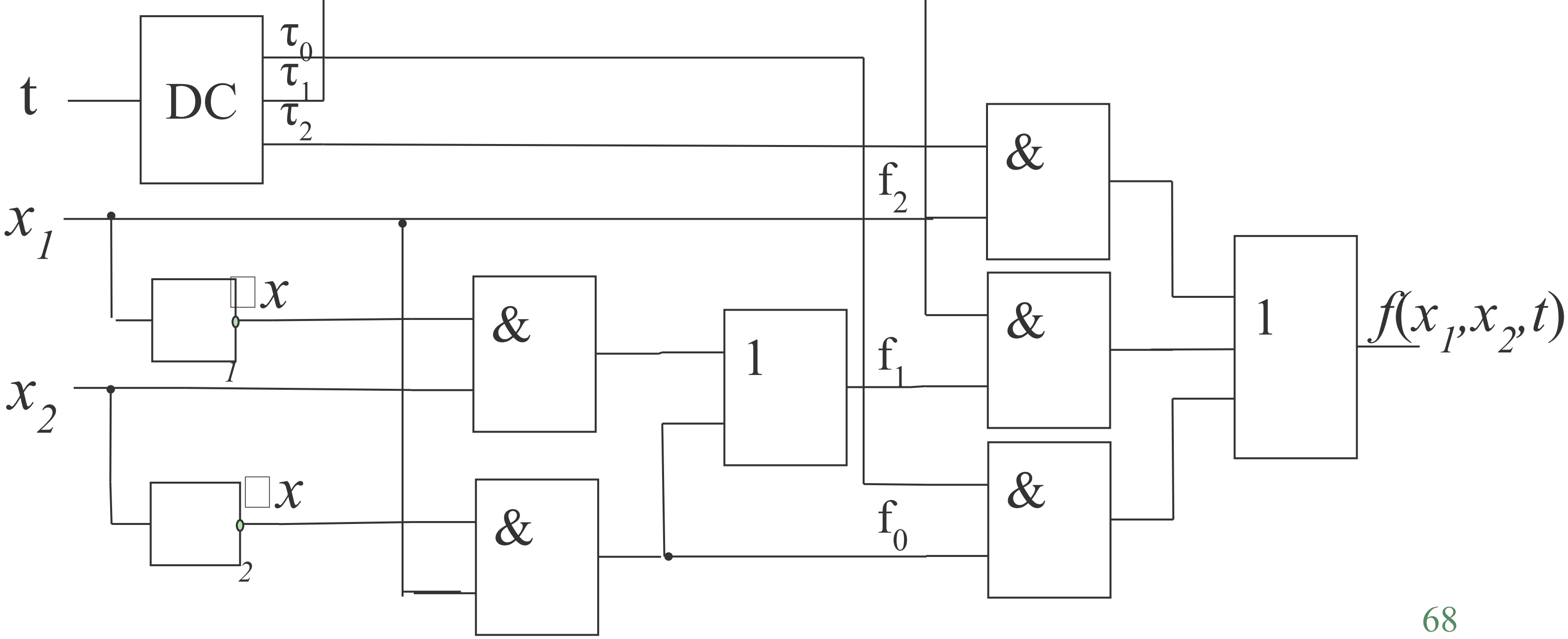
$$y = x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \tau_0 + (\overline{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x}_2) \cdot \tau_1 + x_1 \cdot \tau_2$$

Представление ВБФ. Пример

$$y = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \tau_0 + (\bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2) \cdot \tau_1 + x_1 \cdot \tau_2$$

- Схему такой функции можно построить, используя специальный дешифратор для генерации тактового времени - функций τ_i (τ_i =1, если $i=mod_3(t)$).





Рекуррентные булевы функции

- Логическая функция, зависящая как от текущих значений входных переменных, так и от предшествующих значений самой функции, называется ***рекуррентной*** булевой функцией.

$$y_t = f(x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{nt}, y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-k}),$$

где $y_t \in \{0,1\}$, при t>0;

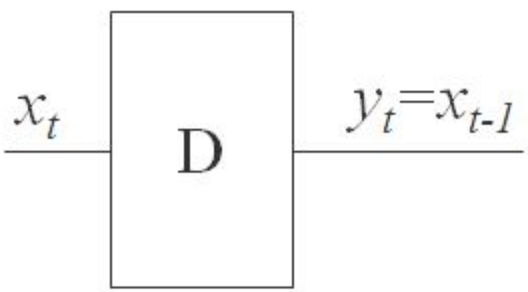
x_{it} - текущие значения входных переменных;

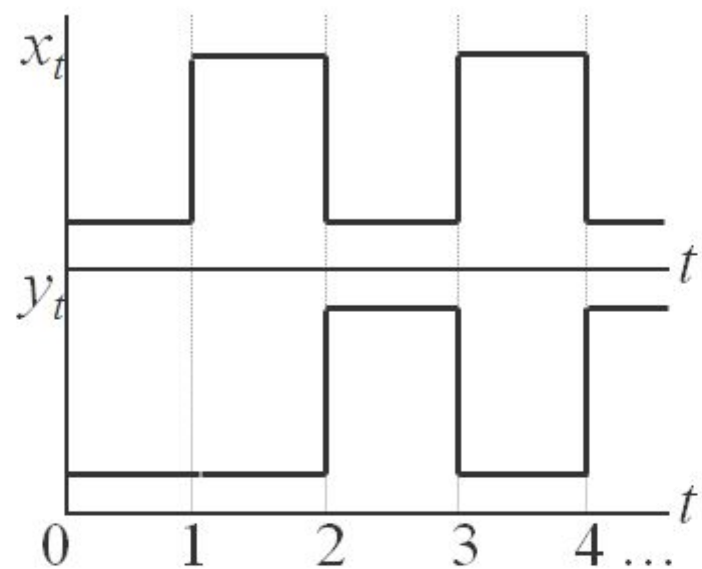
y_j - значения выходной функции в моменты времени $j = t, t\text{-}1, t\text{-}2, \ldots$

Элементы задержки

t	0	1	2	…	t_{i-1}	t_i	…
x_t	x_0	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i	…
y_t	0	x_0	x_1	…	x_{i-2}	x_{i-1}	…

$$y_t = x_{t-1}$$





Любая РБФ может быть реализована с помощью набора логических операторов обычных функций алгебры логики и операторов задержки

Последовательные автоматы

- Рассмотрим <u>частный случай</u> РВБФ, когда на вход сигналы не подаются, а поступают только по цепям обратной связи: [$i=1,2,\ldots,m$]

$$y_{i\,t+1} = f_i(y_{1\,t}, y_{1\,t-1}, \ldots, y_{1\,t-l_1},\\ y_{2\,t}, y_{2\,t-1}, \ldots, y_{2\,t-l_2},\\ \ldots\\ y_{m\,t}, y_{m\,t-1}, \ldots, y_{m\,t-l_m}).$$

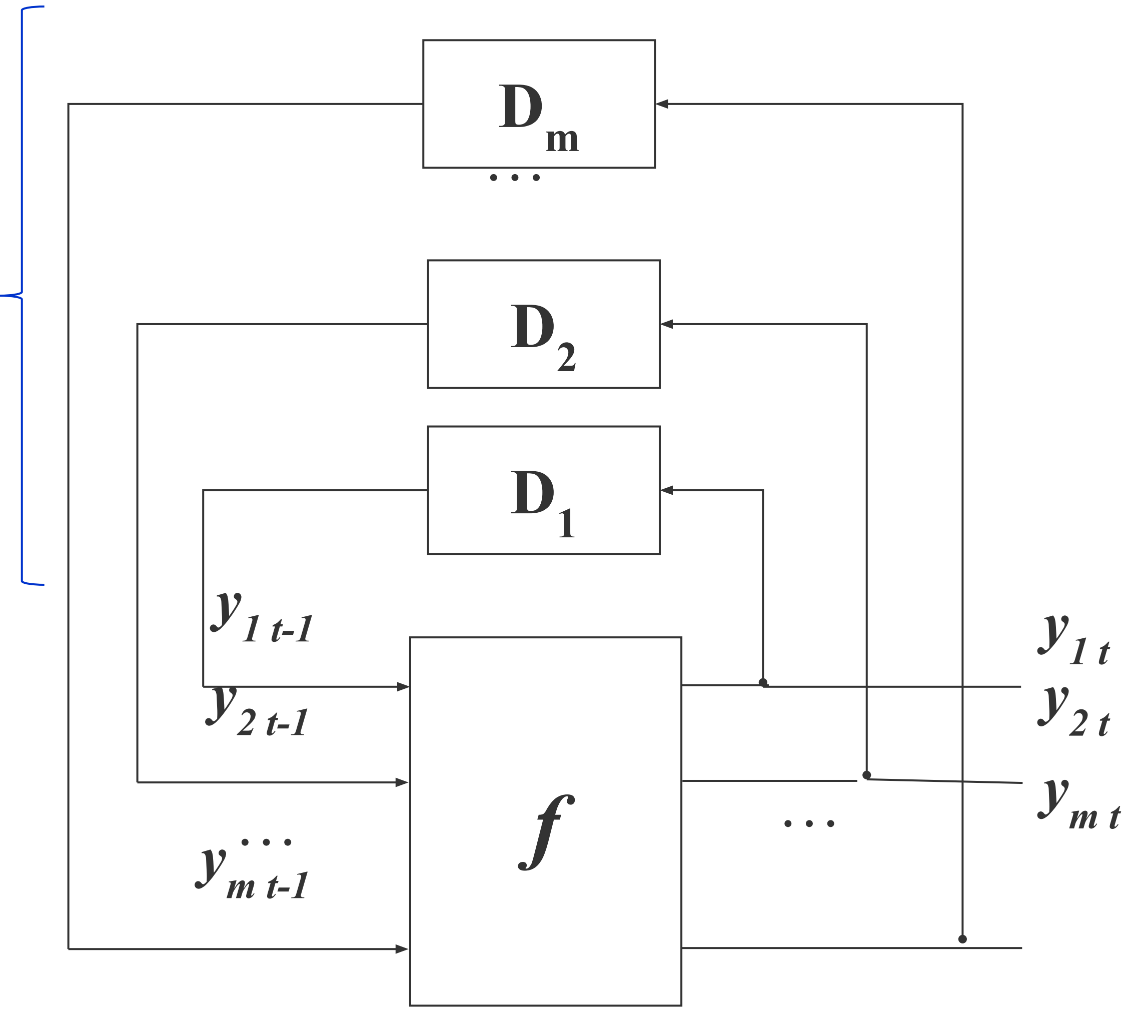
- Если задержка осуществляется только на 1 такт, то

$$y_{i\,t+1} = f_i(y_{1\,t}, y_{2\,t}, \ldots, y_{m\,t}),\ i=1\div m.$$

- Модели, описывающиеся системой уравнений вида $y_{i\,t+1} = f_i(y_{1\,t}, y_{2\,t}, \ldots, y_{m\,t}),\ i=1\div m,$ при заданных начальных условиях, называются ***последовательными автоматами***.

Последовательные автоматы

состояния автомата

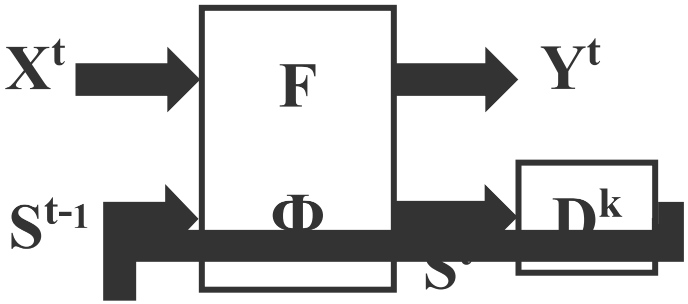


Анализ и синтез последовательных автоматов

- Задача ***анализа*** последовательного автомата формулируется с.о.: определить по заданной <u>таблице состояний</u> автомата *систему уравнений*, описывающих работу автомата, и по заданным <u>начальным условиям</u> построить *диаграмму переходов* автомата.
- Задача ***синтеза*** последовательного автомата формулируется с.о.: определить по заданной <u>системе уравнений</u>, описывающих работу автомата, и заданным <u>начальным условиям</u> *таблицу состояний* и/или *диаграмму переходов* автомата и построить его *схему* при заданных ограничениях.

Автоматы

- Обобщим модель последовательного автомата:



$\mathbf{X} = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \}$
$\mathbf{Y} = \{ (y_1, y_2, \ldots, y_m) \}$
$\mathbf{S} = \{ (s_1, s_2, \ldots, s_s) \}$
$\mathbf{F} : X^t \times S^{t-1} \to Y^t$
$\mathbf{\Phi} : X^t \times S^{t-1} \to S^t$

- Система уравнений:

$$\begin{cases} S_1^t = \psi_1(x_1^t, \ldots, x_n^t, s_1^{t-1}, \ldots, s_s^{t-1}, \ldots, s_1^{t-k}, \ldots, s_s^{t-k}); \\ \qquad \ldots \\ S_s^t = \psi_s(x_1^t, \ldots, x_n^t, s_1^{t-1}, \ldots, s_s^{t-1}, \ldots, s_1^{t-k}, \ldots, s_s^{t-k}); \\ Y_1^t = \varphi_1(x_1^t, \ldots, x_n^t, s_1^{t-1}, \ldots, s_s^{t-1}, \ldots, s_1^{t-k}, \ldots, s_s^{t-k}); \\ \qquad \ldots \\ Y_m^t = \varphi_{m1}(x_1^t, \ldots, x_n^t, s_1^{t-1}, \ldots, s_s^{t-1}, \ldots, s_1^{t-k}, \ldots, s_s^{t-k}); \end{cases}$$

(в каноническом виде)

$$\begin{cases} S^t = \Phi(X^t, S^{t-1}) \\ Y^t = F(X^t, S^{t-1}); \end{cases}$$

Автоматы

- ***Конечным автоматом*** называется пятерка

$$\boldsymbol{A} = < \mathrm{X, Y, S, F, Ф} >,$$

где **X** - множество входных переменных;
Y - множество выходных переменных;
S - множество состояний;
F : X×S→Y - функция выходов;
Ф: X×S→S - функция переходов.

- Автомат *Мили*:

$$\begin{cases} S^t = \Phi(X^t, S^{t-1}) \\ Y^t = F(X^t, S^{t-1}); \end{cases}$$

- Автомат *Мура*:

$$\begin{cases} S^t = \Phi(X^t, S^{t-1}) \\ Y^t = F(S^{t-1}); \end{cases}$$