

- Изучить предложенный материал по теме «Теорема Гаусса и ее применение для расчета электрических полей».
- Составить вопросы по данной теме.
Прислать по адресу **zghasanova@phtt.ru**

Теорема Гаусса (закон Гаусса) — один из основных законов электродинамики, входит в систему уравнений Максвелла.

Выражает связь (а именно равенство с точностью до постоянного коэффициента) между потоком напряжённости электрического поля сквозь замкнутую поверхность и зарядом в объёме, ограниченном этой поверхностью. Применяется отдельно для вычисления электростатических полей.

Закон Гаусса

Суммарный электрический поток через произвольную замкнутую поверхность

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0}$$

q_{in} – суммарный заряд внутри поверхности,
 \vec{E} – напряженность электрического поля в произвольной точке на поверхности.

\vec{E} учитывает вклады зарядов как внутри, так и вне поверхности.

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Применение закона Гаусса – альтернативная процедура расчета **электрических полей**.

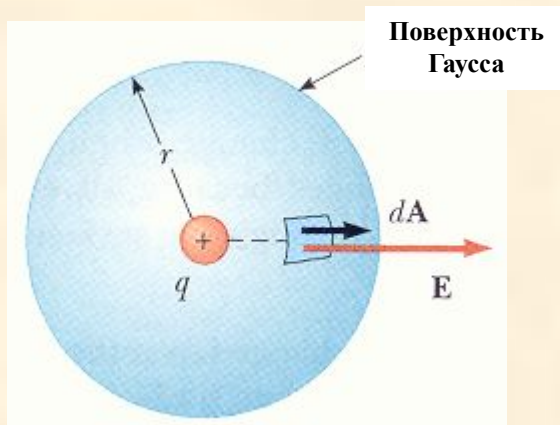
Закон Гаусса - фундаментальная **электростатическая сила**,
действующая между **точечными зарядами**,
обратно пропорциональна **квадрату расстояния** между ними.

Закон Гаусса **удобен** для расчета **электрических полей**
высокосимметричных **распределений зарядов**.

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Электрическое поле изолированного точечного заряда

Сферическая симметрия пространства вокруг точечного заряда – сферическая поверхность Гаусса.



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

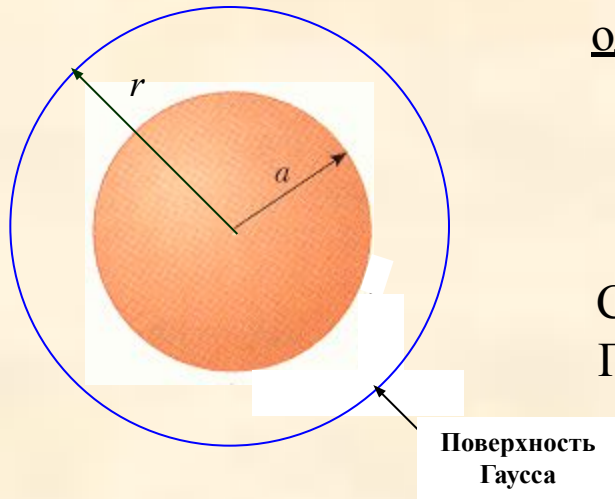
$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e \frac{q}{r^2}$$

Полученный результат эквивалентен результату, полученному с помощью закона Кулона.

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда



Непроводящий твердый шар радиуса a заряжен с однородной **объемной плотностью заряда ρ** и несет суммарный **положительный заряд Q**

$$r > a:$$

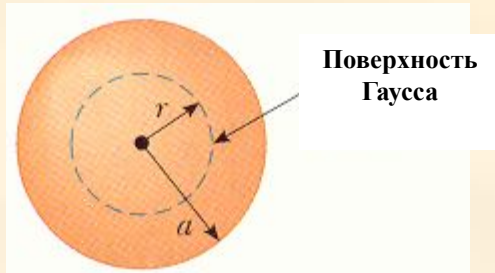
Сферическая симметрия – сферическая поверхность Гаусса радиуса r вне шара и концентрическая с ним.

$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$

Однородно заряженная сфера - электрическое поле вне сферы эквивалентно полю, создаваемому **точечным зарядом**, расположенным в центре сферы.

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда



Непроводящий твердый шар радиуса a заряжен с однородной **объемной плотностью заряда ρ** и несет **суммарный положительный заряд Q**

$$r < a:$$

Сферическая симметрия – сферическая поверхность Гаусса радиуса r внутри шара и концентрическая с ним.

В любой точке поверхности Гаусса $\vec{E} \uparrow \uparrow \Delta \vec{A}_i$ и $E = \text{const}$.

$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} \quad q_{\text{внутри}} = \rho V' = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

$$E = \frac{q_{\text{внутри}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \quad \rho = Q / \frac{4}{3} \pi a^3 \quad E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} = k_e \frac{Q}{a^3} r$$

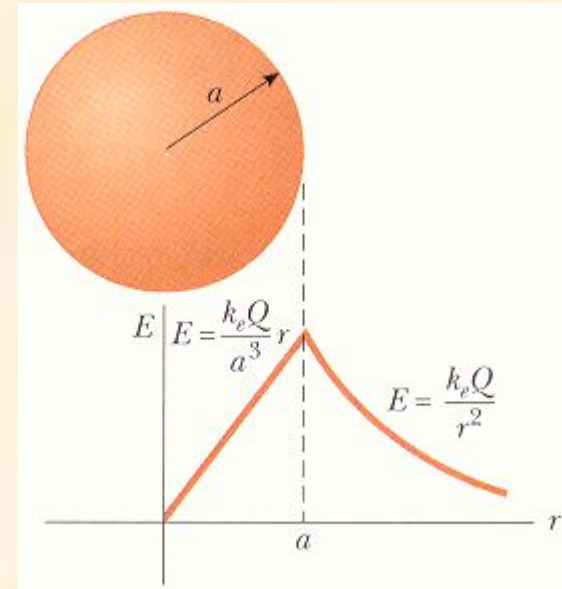
Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда

Непроводящий твердый шар радиуса a заряжен с однородной **объемной плотностью заряда ρ** и несет суммарный **положительный заряд Q**

$$r > a$$
$$E = \lim_{r \rightarrow a} \left(k_e \frac{Q}{r^2} \right) = k_e \frac{Q}{a^2}$$

$$r < a$$
$$E = \lim_{r \rightarrow a} \left(k_e \frac{Q}{a^3} r \right) = k_e \frac{Q}{a^3} a = k_e \frac{Q}{a^2}$$

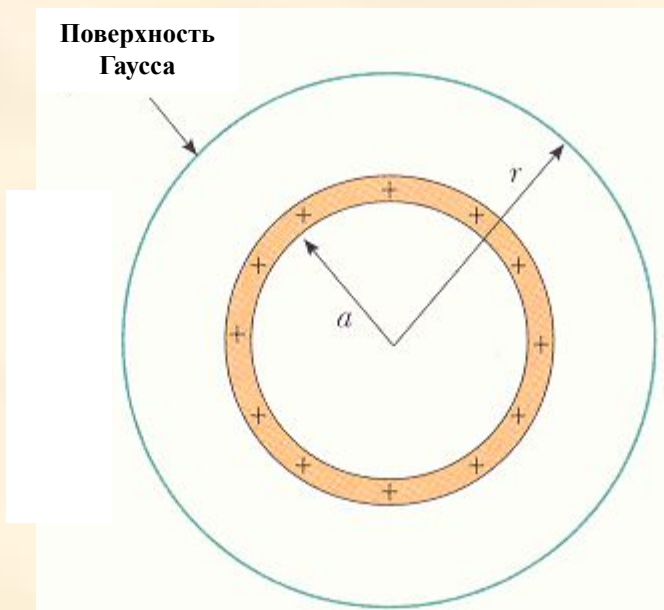


Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда

Напряженность электрического поля, создаваемого тонким сферическим слоем
(радиус a , общий заряд Q однородно распределен по поверхности слоя)

Вне слоя



$$r > a$$

$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$

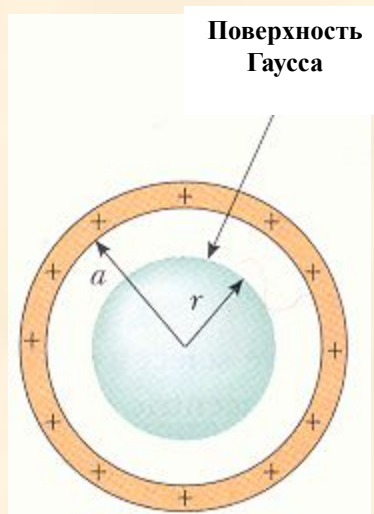
Напряженность электрического поля вне слоя аналогична той, что создается **точечным зарядом** Q , расположенным в центре шара, которому принадлежит слой.

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда

Напряженность электрического поля, создаваемого тонким сферическим слоем
(радиус a , общий заряд Q однородно распределен по поверхности слоя)

Внутри слоя



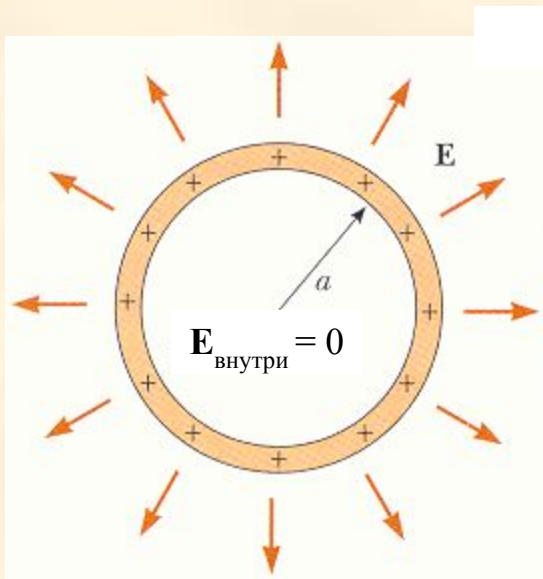
$$r < a$$

$$E = 0$$

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Сферически симметричное распределение заряда

Напряженность электрического поля, создаваемого тонким сферическим слоем
(радиус a , общий заряд Q однородно распределен по поверхности слоя)



Защита электронных устройств
от воздействия внешних
электрических полей

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

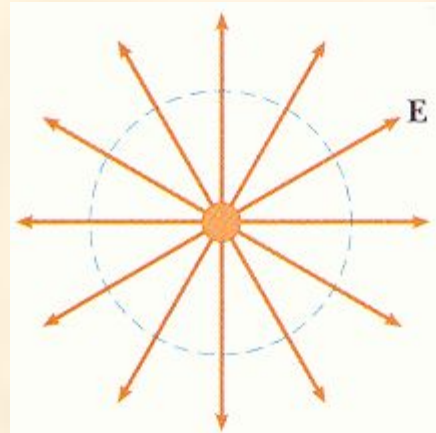
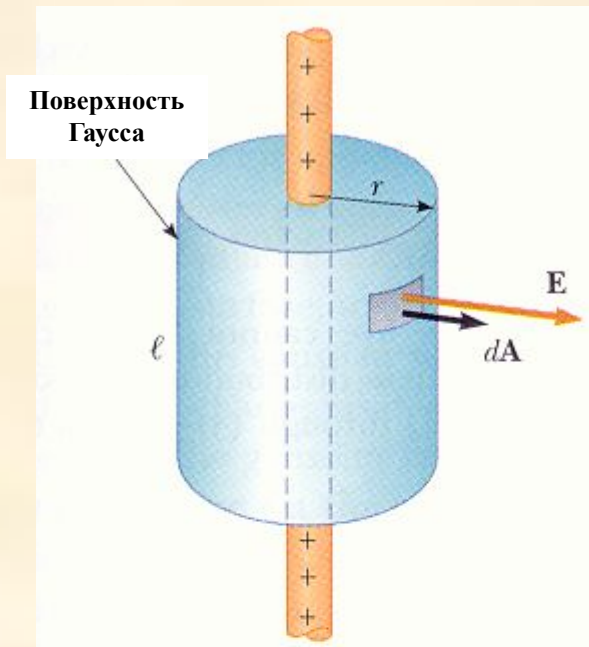
Цилиндрическая симметрия в распределении заряда

Электрическое поле, создаваемое положительно заряженным линейным проводником бесконечной длины с постоянной плотностью λ заряда на единицу длины.

Цилиндрическая симметрия пространства вокруг линейного заряда – цилиндрическая поверхность Гаусса.

В любой точке поверхности Гаусса

$$\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{A} \text{ и } E = \text{const.}$$

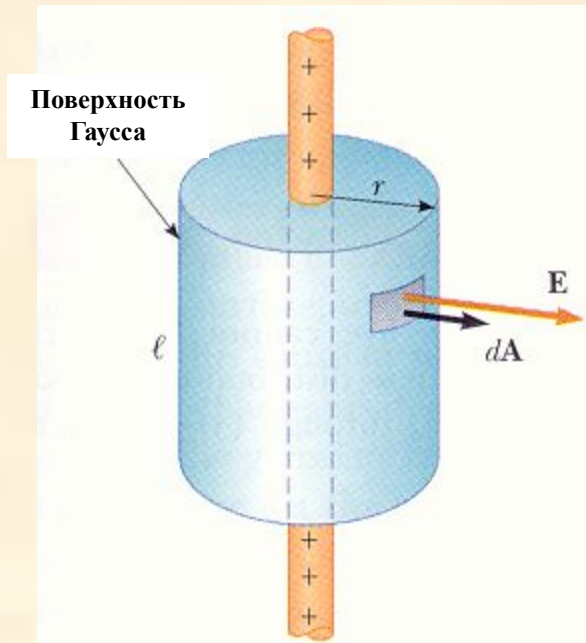


Вид сверху

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Цилиндрическая симметрия в распределении заряда

Электрическое поле, создаваемое положительно заряженным линейным проводником бесконечной длины с постоянной плотностью λ заряда на единицу длины.



Суммарный заряд внутри поверхности Гаусса равен λl .

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = EA = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$A = 2\pi r l \quad E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

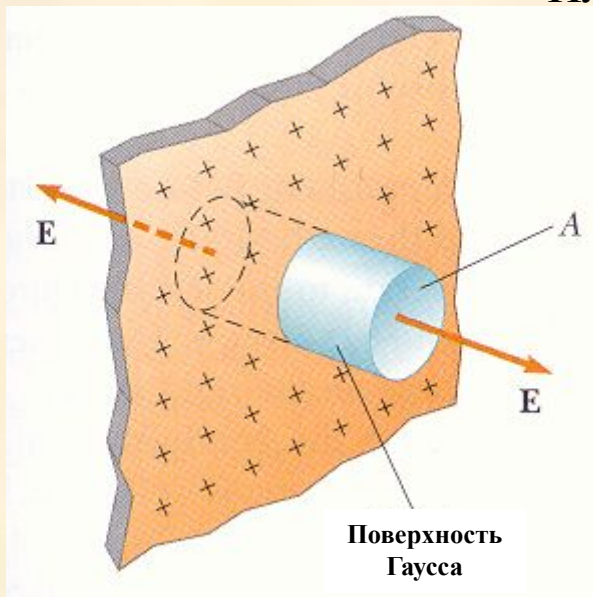
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = 2k_e \frac{\lambda}{r} \quad E \propto \frac{1}{r}$$

Применение закона Гаусса для различных распределений заряда

Плоскосимметричное распределение заряда

Электрическое поле, создаваемое положительно заряженной плоскостью с однородной поверхностной плотностью заряда σ

Плоская симметрия пространства вокруг линейного заряда – поверхность Гаусса - маленький цилиндр.



В любой точке поверхности Гаусса

$$\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{A} \text{ и } E = \text{const.}$$

Боковая поверхность цилиндра не пересекается силовыми линиями электрического поля.

Общий заряд внутри поверхности Гаусса равен $q_{\text{внутри}} = \sigma A$.

$$\text{Общий поток } \Phi_E = 2EA = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}.$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad E - \text{const}$$

Электрический потенциал

Разность потенциалов и электрический потенциал

$$\text{Работа электрического поля } \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$d\vec{s}$ - бесконечно малый вектор перемещения, касательный к направлению последнего.

Потенциальная энергия системы “заряд-поле” изменяется на величину

$$dU = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$A \rightarrow B \quad \Delta U = U_B - U_A$$

$$\Delta U = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Величина этого линейного интеграла не зависит от траектории перемещения заряда из точки A в точку B , поскольку электрическая сила консервативна.

Разность потенциалов и электрический потенциал

Электрический потенциал $V = U/q_0$ в любой точке электрического поля не зависит от величины q_0 .

Изменение потенциальной энергии системы $\Delta U = U_B - U_A$

Разность потенциалов $\Delta V = V_B - V_A$ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Работа, выполненная внешней силой без изменения кинетической энергии пробного заряда, $W = \Delta U$ $W = q\Delta V$

Единица измерения электрического потенциала в СИ: $[V] = 1 \text{ В} \equiv 1 \text{ Дж/Кл}$

$$1 \text{ эВ} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ Кл} \cdot \text{В} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ Дж}$$

Разность потенциалов в однородном электрическом поле

$$E = \text{const}$$

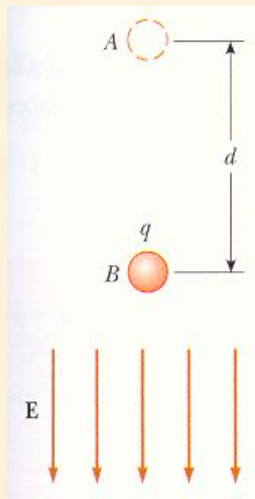
$$|\vec{s}| = d$$

$\vec{s} \uparrow \uparrow$ силовые линии

$$V_B - V_A = \Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B (E \cos 0^\circ) ds = - \int_A^B E ds = -Ed$$

$$\Delta V < 0$$

$$V_B < V_A$$



Силовые линии электрического поля всегда **направлены** в направлении **уменьшения** электрического **потенциала**.

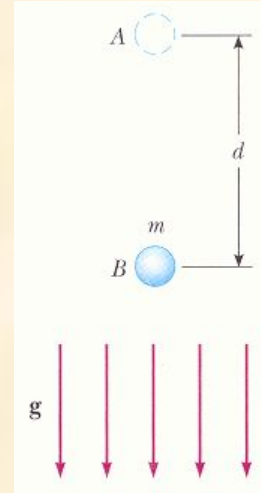
Разность потенциалов в однородном электрическом поле

$$q_0 = \text{const} \quad A \rightarrow B \quad \Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 E d$$

Если $q_0 > 0$, то $\Delta U < 0$.

Система “**положительный заряд** – электрическое поле”:
потенциальная энергия **убывает**, а **заряженная частица**
приобретает кинетическую энергию, если **заряд**
движется в направлении поля.

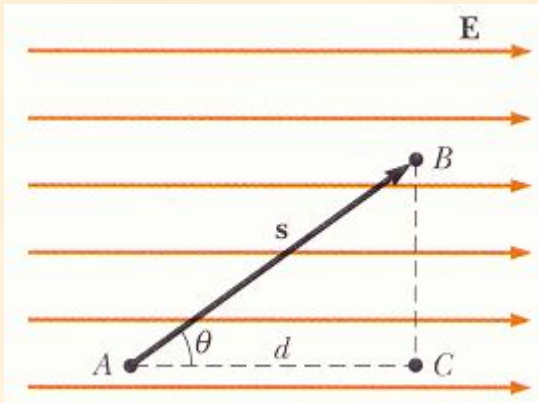
Ситуация **аналогична** той, в которой **работа**
выполняется гравитационным
полем над падающим **объектом**.



Система “**отрицательный заряд** - электрическое поле”:
потенциальная энергия **увеличивается**, если **заряд** движется в направлении поля.

Разность потенциалов в однородном электрическом поле

Более общий случай: $\vec{E} \parallel \vec{s}$ силовые линии



$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E \int_A^B ds = -E \cdot s$$

$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 \vec{E} \cdot \vec{s}$$

$$\Delta V = 0, \text{ если } \vec{E} \perp \vec{s}$$

$$V_B - V_A = V_C - V_A \quad \Longrightarrow \quad V_B = V_C$$

Эквипотенциальная поверхность - произвольная поверхность, состоящая из непрерывного распределения точек с одним и тем же электрическим потенциалом.

Электрический потенциал точечных зарядов

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{не зависит от траектории движения между точками } A \text{ и } B$$

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{не зависит от траектории движения между точками } A \text{ и } B$$

$$\int_A^B q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Работа, совершенная электрической силой, **не зависит** от пути между A и B

Электрическая сила
консервативна

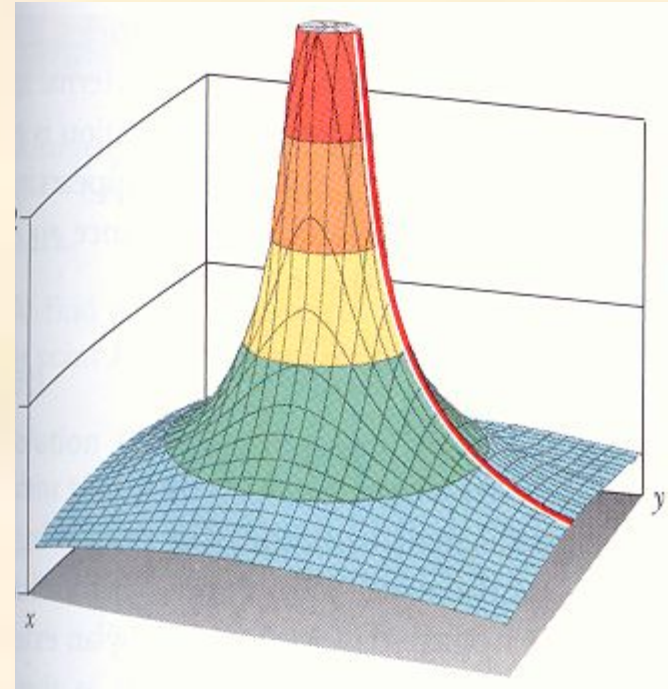
Электрическое поле
неподвижного точечного
заряда консервативно

$$V_B - V_A = k_e q \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

Электрический потенциал точечных зарядов

Если $V = 0$ в $r_A = \infty$ \longrightarrow $V = k_e \frac{q}{r}$

Электрический потенциал (V)

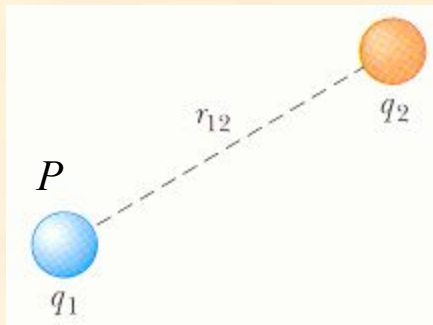


Изолированный **положительный** заряд

Потенциальная энергия точечных зарядов

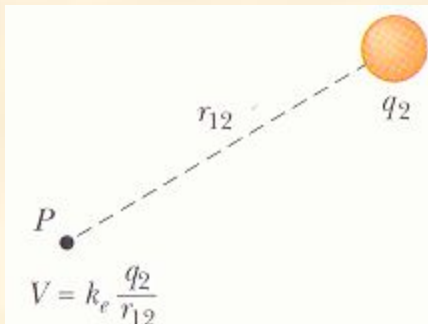
Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



Последняя равна работе $q_1 V_2$, которую необходимо выполнить внешней силе, чтобы переместить заряд q_1 из бесконечности в точку P без ускорения.

V_2 – электрический потенциал в точке P , созданный зарядом q_2 .

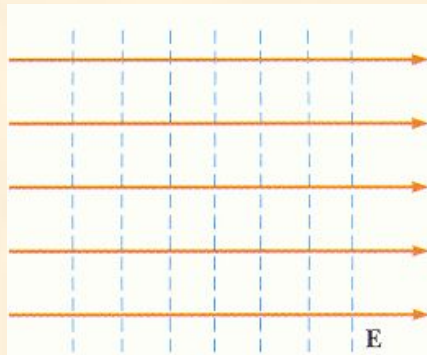


Если q_1 и q_2 **одного** знака, то $U > 0$, т.е. внешняя сила должна выполнить **положительную** работу над системой, чтобы сблизить два заряда.

Если q_1 and q_2 **противоположного** знака, то $U < 0$, т.е., внешняя сила должна выполнить **отрицательную** работу над системой, чтобы предотвратить сближение двух зарядов.

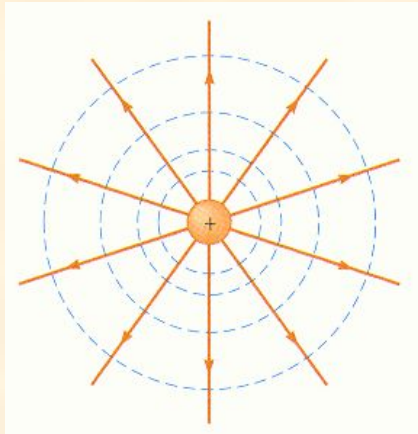
Эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля

Эквипотенциальные поверхности всегда должны быть перпендикулярны силовым линиям электрического поля и пересекать их.



Бесконечная заряженная плоскость

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля



Точечный заряд

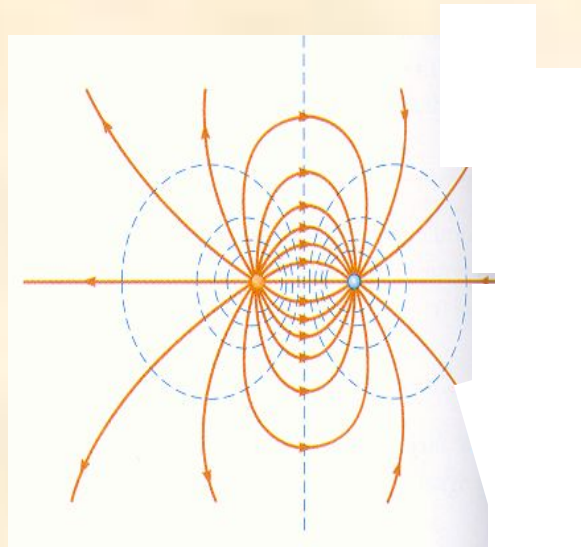
$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_r dr \quad dV = -E_r dr$$

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \quad V = k_e q/r$$

$$V = f(r)$$

Потенциальное поле точечного заряда сферически симметрично.

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля



Электрический диполь

Расчет электрического потенциала

I. Принцип суперпозиции:

Электрический потенциал системы точечных зарядов равен алгебраической (скалярной) сумме потенциалов точечных зарядов.

Электрический потенциал, создаваемый в произвольной точке P непрерывным распределением зарядов, равен интегралу потенциалов точечных зарядов, соответствующих этому распределению.

II. Расчет линейного интеграла от

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

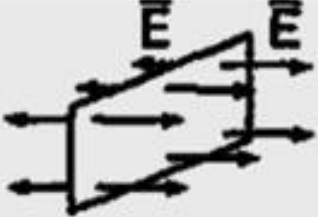


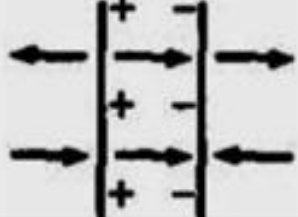
для заданного распределения зарядов.

V обычно предполагается равным 0 в точке, расположенной бесконечно далеко от зарядов.

Электрический потенциал

Электрический потенциал описывает электростатические явления в более упрощенной форме, чем это можно сделать используя понятия об электростатическом поле и электрических силах.

Применение теоремы Гаусса

Электростатическое поле	схема	пояснения	напряженность	примечания
Бесконечной равномерно заряженной плоскости		σ – поверхностная плотность заряда σ – постоянна	$E = \frac{ \sigma }{2\epsilon_0}$	E не зависит от расстояния до плоскости
Вне шара, равномерно заряженного по поверхности или объему		Шар создает во внешнем пространстве такое поле, как если бы весь заряд был сосредоточен в его центре	$E = \frac{ q }{4\pi\epsilon_0 r^2}$	Напряженность одинакова, независимо от того, заряжен ли шар по объему или по поверхности
Внутри шара, равномерно заряженного по поверхности или объему		ρ – объемная плотность заряда $\rho = \frac{q}{V}$	$E = 0$	Шар равномерно заряжен по поверхности
			$E = \frac{ \rho r}{3\epsilon_0}$	Шар равномерно заряжен по объему
Двух параллельных разноименно и равномерно заряженных плоскостей		Поверхностные плотности зарядов на обеих плоскостях одинаковы	Внутри конденсатора $E = \frac{ \sigma }{\epsilon_0}$	Во внешнем пространстве результирующее поле равно 0