Застосування визначеного інтеграла

при розв'язанні прикладних задач

«Немає значення, що шукаєш. Важливо, що знаходиш».

Блез Паскаль

Інтеграл

Інтегра
л

- Первісна
- Криволінійна трапеція
- Правила обчислення інтегралів
- Визначений інтеграл
- Таблиця інтегралів
- Формула Ньютона-Лейбніца

Таблиця інтегралів

$\int dx$	$x + C$	$\int \sin x \, dx$	$-\cos x + C$
$\int x^n \, dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$	$\int \cos x \, dx$	$\sin x + C$
$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\ x + C$
$\int e^x \, dx$	$e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\ x + C$
$\int a^x \, dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$		

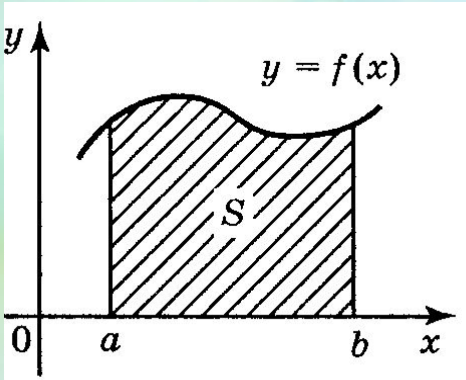
Правила обчислення інтегралів

$$\int cf(x)\,dx \qquad c\int f(x)\,dx$$

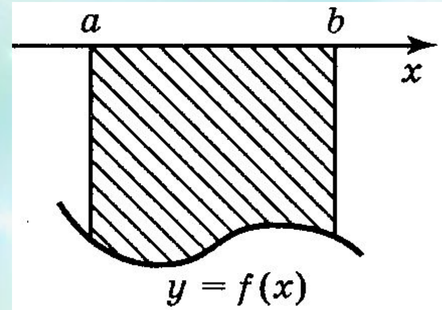
$$\int f(ax+b)\,dx \qquad \frac{1}{a}F(ax+b)\;+C$$

$$\int (f(x)+g(x))dx \qquad \int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

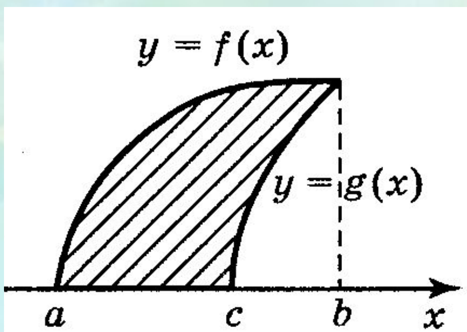
Обчислення площ



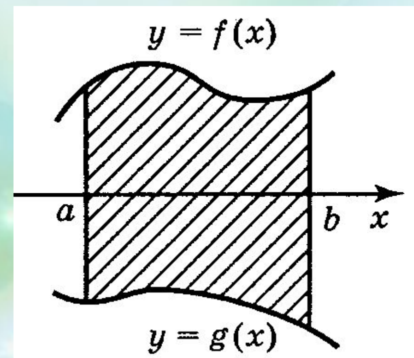
$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



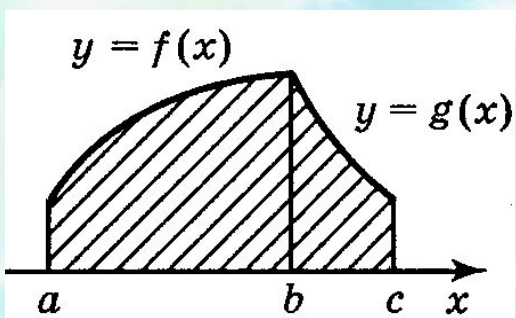
$$S = -\int_a^b f(x)\,dx$$



$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b g(x)\,dx$$



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



$$S = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)\,dx$$

Об'єми фігур обертання

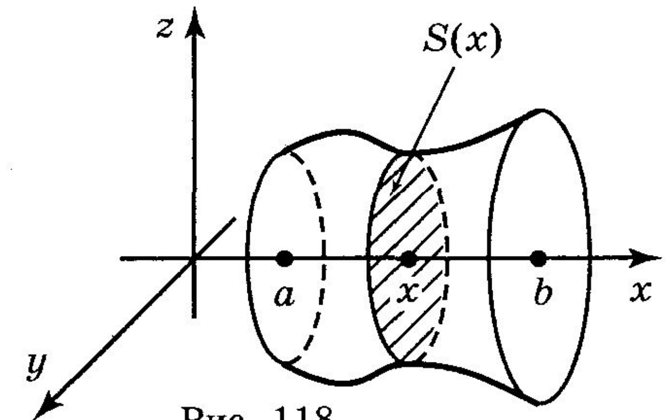


Рис. 118

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

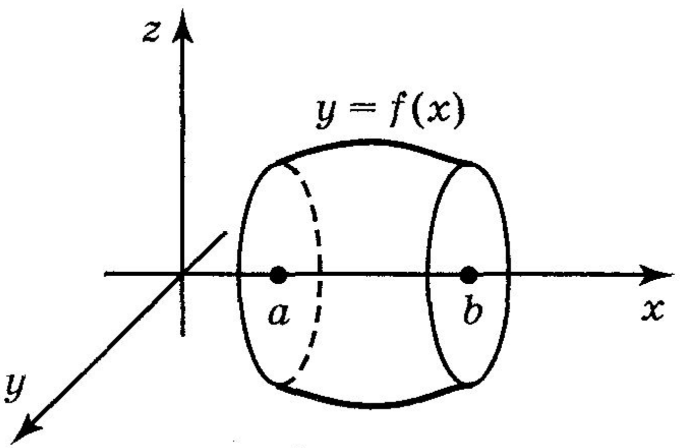
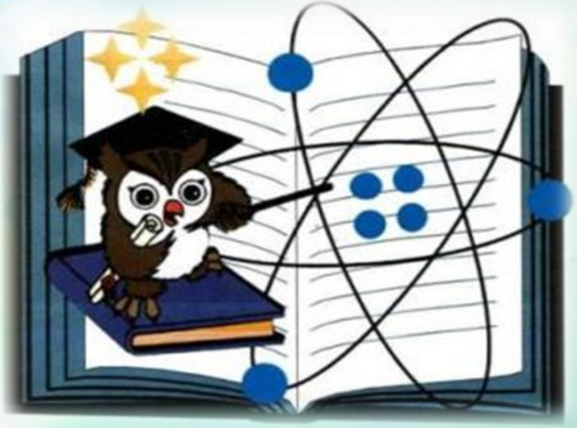


Рис. 119

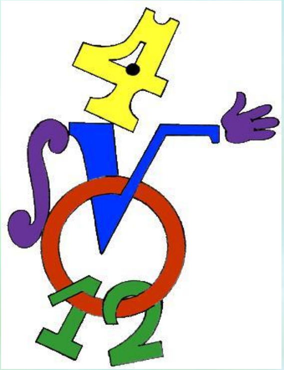
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

«Не досить оволодіти премудрістю, потрібно також уміти користуватися нею»

Цицерон



Застосування інтеграла



Тільки той себе вважає сильним,
Кому з математикою дружити стильно.
Без інтегралів можна прожити,
Та чи не краще все охопити?

$$\int_b^a f(x)dx - ?$$

- економічні задачі
- обчислення площ
- знаходження об’ємів
- обчислення шляху
- визначення маси
- визначення роботи
- знаходження величини заряду

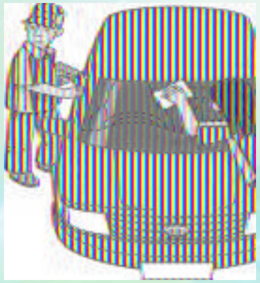
- «Будівельники»

- «Столяри»

- «Фізики-електрики»

- «Дизайнери»

- «Служба автосервісу»



- «Економісти»

«Будівельники»

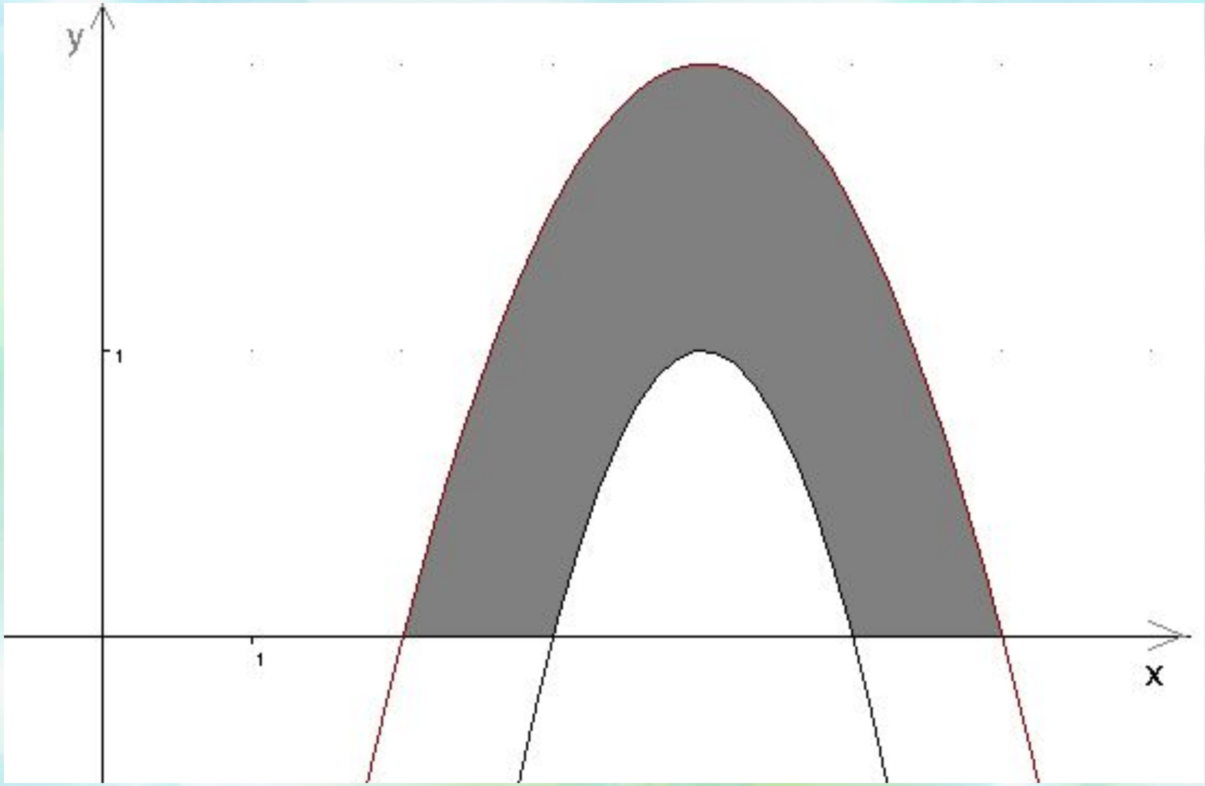
Розрахувати витрати цегли і розчину для зведення арки товщиною дві цеглини (цегла одинарна 250*120*65, товщина шва 10 мм). Якщо на 1 м^3 кладки витрачається 400 штук

цегли і 0,25 м^3 розчину. Зовнішню частину арки задано функцією

$f(x)= -½\ x^2+ 4x – 6$,

а внутрішню

$f(x) =-x^2+8x-15$.



$$S_1 = \int_2^6 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6\right)dx = \left(-\frac{x^3}{6} + 2x^2 - 6x\right)\Big|_2^6 = (-36+72-36) - \left(-\frac{8}{6} + 8 - 12\right) \approx 5{,}33\text{м}^2$$

$$S_2 = \int_3^5 (-x^2 + 8x - 15)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 15x\right)\Big|_3^5 = \left(-\frac{125}{3} + 100 - 75\right) - (-9 + 36 - 45) \approx 1{,}33\ \text{м}^2$$

$S = S_1 - S_2 = 4м^2$

Висота-товщина дві цеглини

$$h = 250 \cdot 2 + 10 = 510\ \text{мм} = 0{,}51\text{м}$$

$$V = 0{,}51 \cdot 4 = 2{,}04\ \text{м}^3$$

Витрата цегли

$$n = 2{,}04 \cdot 400 = 816\ \text{штук},$$

витрата розчину $m = 2{,}04 \cdot 0{,}25 = 0{,}51\text{м}^3$

«Столяри»

Розрахувати витрати деревини для виготовлення заготовки боковини стільця, якщо товщина дошки 2 см, а конфігурацію боковини задано лініями $y_1=x^3+4$, $y_2=-2x^2+2$, $y_3=0$, $x=1,6$.

$$S = S_1 - S_2$$

$$S_1 = \int_{-1,6}^{1,6} (x^3 + 4)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} + 4x\right)\Big|_{-1,6}^{1,6} = \frac{1,6^4}{4} + 4 \cdot 1,6 - \frac{(-1,6)^4}{4} + 4 \cdot 1,6 = 12,8 \text{ дм}^2 = 0,128\text{м}^2$$

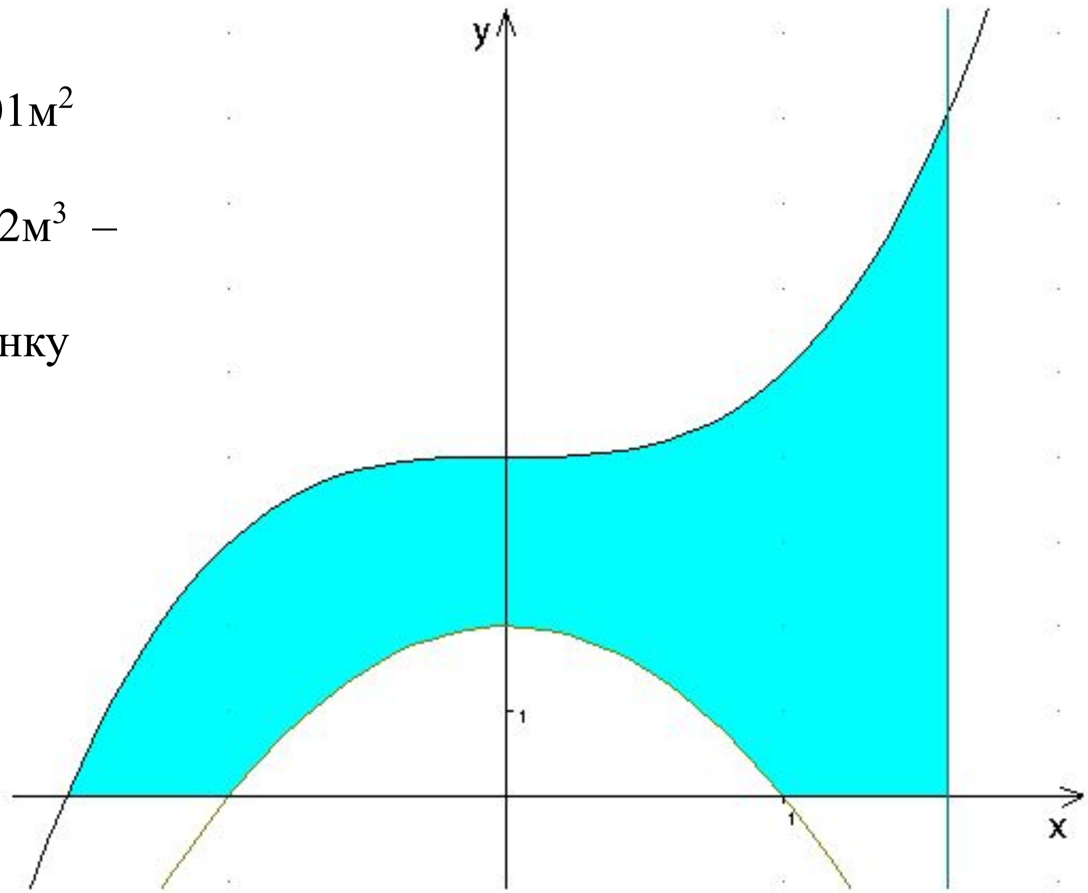
$$S_2 = \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 2)\,dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-1}^{1} = -\frac{2}{3} + 2 - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = -\frac{4}{3} + 4 \approx 2,66\text{дм}^2 \approx 0,027\text{м}^2$$

$S = S_1\text{-}S_2 = 0,128\text{м}^2\text{-}0,027\text{м}^2 = 0,101\text{м}^2$

$V_1 = Sh = 0,101 \cdot 0,02 = 0,00202\text{м}^3$ –

витрати деревини на одну боковинку

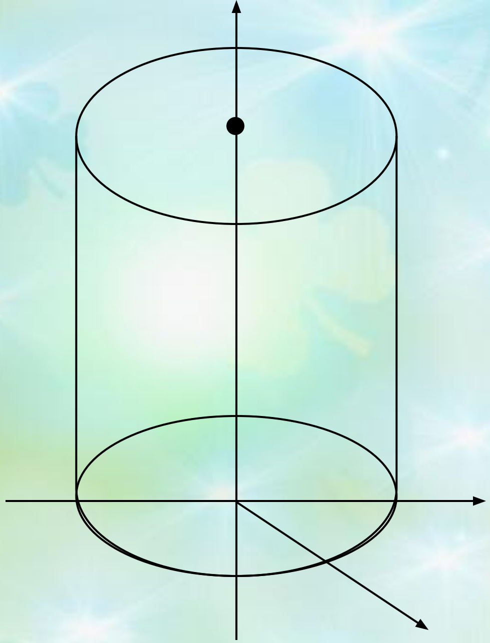
$V = 12 \cdot 0,00202\text{м}^3 = 0,02424\text{м}^3$



«Фізики електрики»

«Алгебра щедра. Дуже часто вона дає більше ніж у неї просять»

№ п/п	Величини	Співвідношення	Знаходження похідної	Знаходження інтеграла
1	S – переміщення v – швидкість	$\Delta S = v(t)\cdot\Delta t$	$v(t) = S'(t)$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
2	A – робота F – сила	$\Delta A = F(x)\cdot\Delta x$	$F(x) = A'(x)$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$
3	A – робота N – потужність	$\Delta A = N(t)\cdot\Delta t$	$N(t) = A'(t)$	$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt$
4	M – маса тонкого стержня – лінійна густина	$\Delta m = \rho(x)\cdot\Delta x$	$\rho(x) = m'(x)$	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx$
5	q – електричний заряд I – сила струму	$\Delta q = I(t)\cdot\Delta t$	$I(t) = q'(t)$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$
6	Q – кількість теплоти c – теплоємність	$\Delta Q = c(t)\cdot\Delta t$	$c(t) = Q'(t)$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$



Знайти роботу, яку необхідно витратити на викачування води з резервуара, якщо він завглибшки 2м і має форму циліндра радіуса 1м ($\rho_в=10^3 кг/м^3$)

Спрямуємо вісь OX вздовж діючої сили. Значення сили F(x), що діє на переріз циліндра визначається вагою шару води, що знаходиться вище від цього перерізу. Отже, оскільки $S=\pi r^2=\pi$, то для x є [0;2] $F(x)=\pi\rho g(2 - x)$, $g=9{,}8 м/с^2$

Так як $A=\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$, то $A=\int_0^2 \pi\rho g(2-x)\,dx=\pi\rho g\int_0^2 (2-x)\,dx=$

$$=\pi\rho g\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2=\pi\rho g(4-2)=2\cdot 3{,}14\cdot 10^3\cdot 9{,}8\approx 0{,}62\cdot 10^5 Дж$$

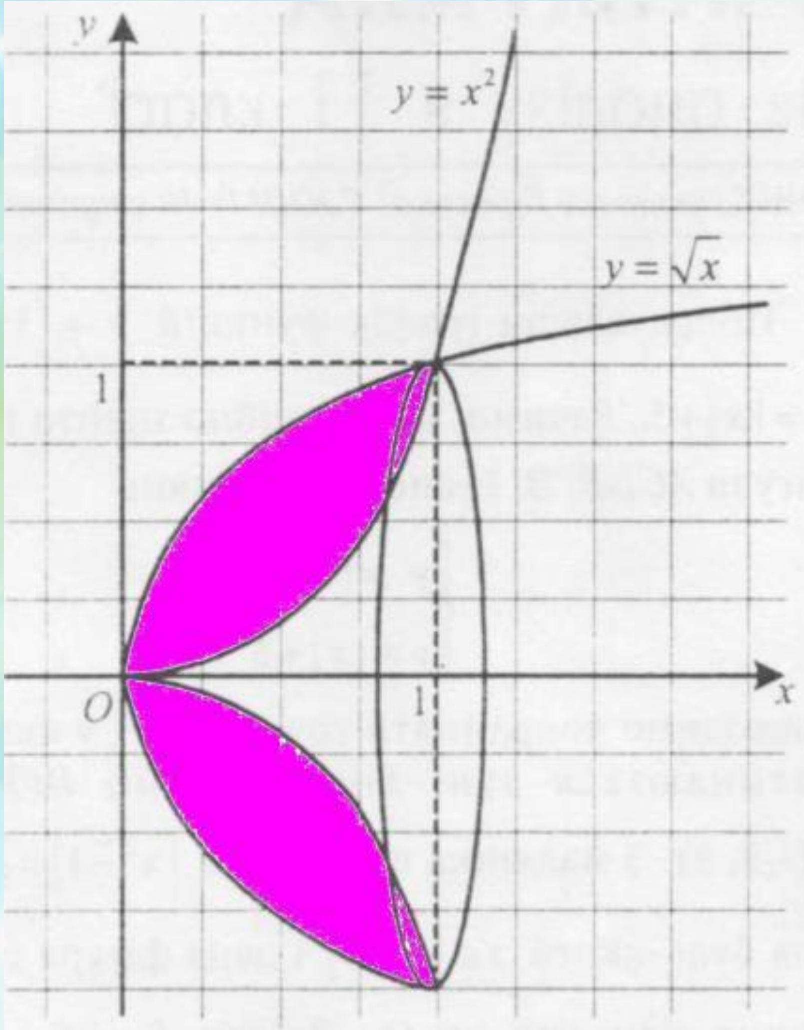
Протягом 7с величина струму в провіднику змінювалась за законом $I(t)=3t^2+2t$. Знайти кількість електрики, що пройшла через провідник за цей час.

Оскільки $q=\int I(t)dt$, то $q=\int_0^7 (3t^2+2t)=(t^3+t^2)\Big|_0^7=7^3+7^2=392$ Кл

«Дизайнери»

Створити дашок над пісочницею, знайти яку кількість матеріалу потрібно, якщо математичною моделлю даного виробу є фігура обмежена параболою у=х^2, та у=$\sqrt{x}$,

яка обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла, утвореного в результаті обертання цієї фігури.



Знаходимо межі

інтегрування: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$,

$x^4 = x$, $x(x-1)(x^2+x+1)=0$,

$x_1=0$, $x_2=1$.

Застосуємо формулу

V= $\pi \int f^2(x)\,dx$, маємо:

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4)\,dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10} \pi (\text{куб. од.})$$

«Служба автосервісу»

Тіло рухається прямолінійно зі змінною швидкістю за законом $v(t)=3t^2+2t+10$(км/год). Знайти, який шлях проходить тіло за проміжок часу $t_0=0$, $t_1=1$год.

Оскільки $s=\int v(t)dt$ *, то*

$s=\int_0^1 (3t^2+2t+10) = (t^3+t^2+10)\Big|_0^1 = 12$ *км*

За скільки часу подолає цю відстань машина, якщо вона рухається за законом

$v(t) = 2t - 11$ км/хв

Отже, 12= $\int_0^t (2t-11)dt = (t^2 - 11t)\Big|_0^t = t^2 - 11\,t.$

Звідси $t^2 - 11t - 12 = 0.$ Тоді $t = 12$ хвилин.

«Економісти»

1	V – обсяг продукції П(t) – продуктивність виробництва, $t \in [t_1;t_2]$	$V=\int_{t_1}^{t_2} \Pi(t)dt$
2	ΔК – приріст капіталу $I(t)$ – чисті інвестиції $t \in [T_1;T_2]$	$\Delta K = \int_{T_1}^{T_2} I(t)dt$

1. Продуктивність праці робітничої бригади визначається в залежності від часу t функцією П (t)=4 t^3+1. Знайти обсяг продукції, тобто як працювали робітники за другу і третю години робочого дня.

$$V = \int_1^3 (4t^3 + 1)dt = \left(\frac{4t^4}{4} + t\right)\Big|_1^3 = 81 + 3 - 1 - 1 = 82\text{од.}$$

2. Чисті інвестиції змінюються в залежності від часу t за законом I(t)=200t(3t+2). Визначити приріст капіталу за 5 років. Через скільки років приріст капіталу становитиме 220000.

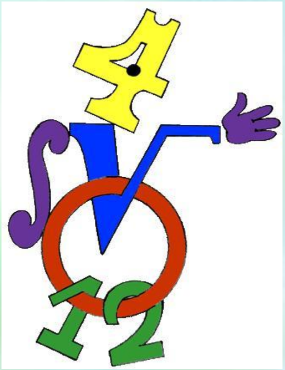
$$\Delta K = \int_0^5 200t(3t+2)dt = 200\int_0^5 (3t^2+2t)\,dt = 200(t^3+t^2)\Big|_0^5 = 200(125+25) = 30000$$

Для відповіді на друге питання позначимо шукану кількість років через Т, тоді матимемо рівняння для його визначення:

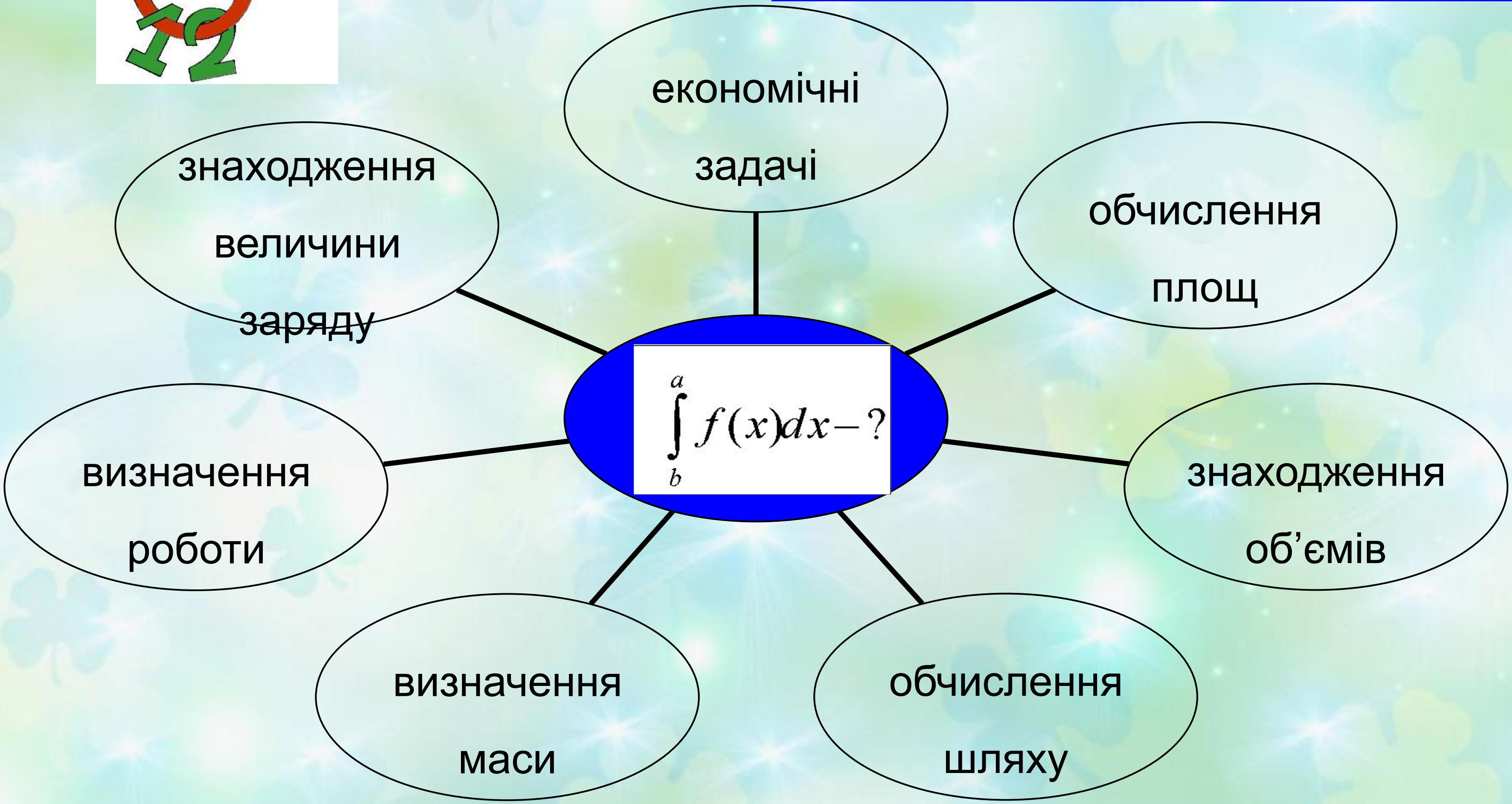
$$\Delta K = \int_0^T 200t(3t+2)dt = 200(T^3+T^2)$$

тобто 220000=200(T^3+T^2), звідси T^3+T^2=11000, Т=10 років.

Застосування інтеграла



Тільки той себе вважає сильним,
Кому з математикою дружити стильно.
Без інтегралів можна прожити,
Та чи не краще все охопити?



«Покажи мені – і я запам’ятаю. Дай мені діяти самому і я навчуся.»

1. Сила струму в провіднику з часом змінюється за законом $I(t)=t^2-t+1$. Яка кількість електрики пройде через поперечний переріз провідника за час від третьої до шостої секунди?

2. Швидкість тіла υ з часом t змінюється за наступним законом: $\upsilon=20-3t$. Знайти шлях, що пройшло тіло за четверту секунду свого руху.

3. Знайти масу неоднорідного стрижня довжиною 50см, якщо його лінійна густина змінюється за законом $\rho(x)=$ $=6x^2+1$(кг/м).

4. Знайдіть об'єм тіла обертання, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури обмеженої лініями $y=4-x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=-1$.

52,5	9,5
0,75	$27\frac{1}{15}$

«Я зробив крок до успіху»

«Найкраща помилка та, яку допускаєш під час навчання»

Г.С. Сковорода

$$q(t)=\int_{3}^{6}(t^{2}-t+1)dx=\left(\frac{t^{3}}{3}-\frac{t^{2}}{2}+t\right)\Bigg|_{2}^{6}=\left(72-18+6\right))-(9-4{,}5+3)=52{,}5$$

$$S_4=\int_{4}^{3}(20-3t)dt=(20t-1.5t^2)\Big|_{3}^{4}=(80-24)-(60-13.5)=56-46.5=9.5\ (\text{м})$$

$$m=\int_{0}^{0,5}\rho(x)dx=\int_{0}^{0,5}(6x^2+1)\,dx=0{,}75\ (\text{кг})$$

$$V=\pi\int_{-1}^{1}(4-x^2)^2\,dx=\int_{-1}^{1}(16-8x^2+x^4)\,dx=(16x-\frac{8x^3}{3}+\frac{x^5}{5})\Big|_{-1}^{1}=27\frac{1}{15}$$