Дифференциальные уравнения

Понятие дифференциального уравнения

Дифференциальное уравнение *n*-го порядка – это уравнение, связывающее значения неизвестной функции и ее производных до *n*-го порядка включительно:

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0$$

Решением дифференциального уравнения является функция, при подстановке которой уравнение обращается в тождество. Процесс решения дифференциального уравнения называется интегрированием.

Виды дифференциальных уравнений

1) **Обыкновенные дифференциальные уравнения,** содержащие неизвестную функцию одной переменной и ее производные.

Пример: 2-ой закон Ньютона

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(x,t)$$

2) **Дифференциальные уравнения в частных производных,** содержащие неизвестную функцию нескольких переменных и ее производные.

Пример: уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

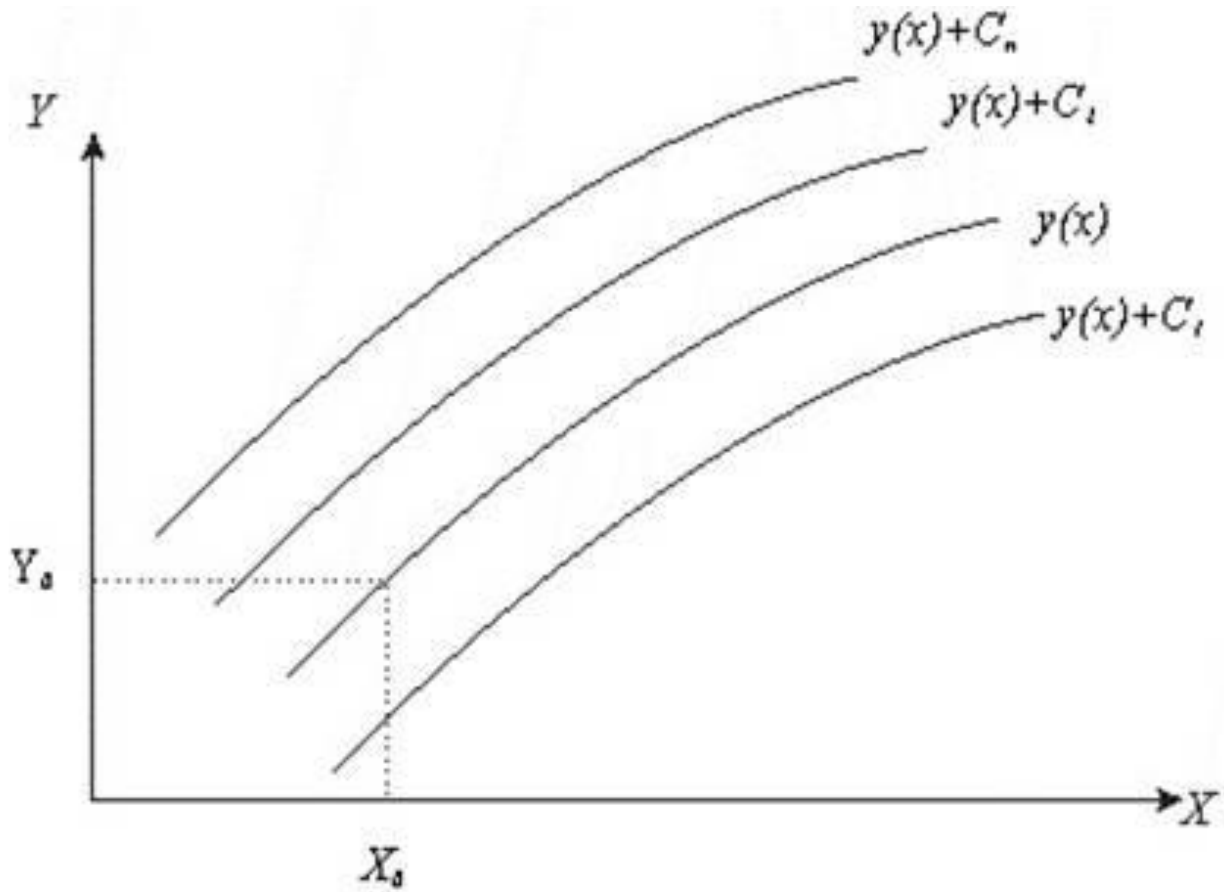
Решение дифференциальных уравнений

Любая функция, подстановка которой обращает дифференциальное уравнение в тождество, называется **решением** этого уравнения. График функции, являющейся решением дифференциального уравнения, называется **интегральной кривой**.

Решение простейшего дифференциального уравнения (1-го порядка):

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad y(x) = \int f(x)dx + C$$

Интегральные кривые



Общее решение дифференциального уравнения – множество функций, отличающихся значением произвольной постоянной *C*.

Задача Коши

Частное решение дифференциального уравнения может быть получено из общего решения при определении конкретного значения постоянной *C*. Это может быть сделано исходя из **начальных условий**:

$$y(x_0) = y_0$$

Решение системы «дифференциальное уравнение – начальное условие» – решение **задачи Коши.**

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение называется **уравнением 1-го порядка с разделяющимися переменными**, если оно имеет вид:

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

Для решения разделим его на $g_1(y) \cdot f_2(x)$ и проинтегрируем:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0 \qquad \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C$$

Уравнения с разделяющимися переменными

Пример решения:

$$y' \cdot x - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx}x = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln y = \ln x + \ln C \Rightarrow y = C \cdot x$$

Дифференциальные уравнения в медицине

1) **Закон растворения лекарственных форм из таблеток.** Скорость растворения лекарственных форм вещества из таблеток пропорциональна количеству вещества в таблетке (*k=const* – постоянная скорости растворения):

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

2) **Закон размножения бактерий с течением времени.** Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональная количеству бактерий в данный момент времени (*k=const* – коэффициент пропорциональности):

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Дифференциальные уравнения в медицине

3) **Закон роста клеток с течением времени.** Для палочковидных клеток, у которых отношение площади поверхности к объему клетки сохраняется постоянным, скорость роста пропорциональна длине клетки в данный момент (*α=const, β=const* – постоянные, характеризующие процессы синтеза и распада):

$$\frac{dl}{dt} = (\alpha - \beta) l$$

Дифференциальные уравнения в медицине

4) **Теория эпидемий.** При условии, что изучаемое заболевание носит длительный характер (процесс передачи быстрее протекания самой болезни) и зараженные особи не удаляются из колонии и передают при встречах инфекцию незараженным особям, закон изменения числа незараженных особей со временем имеет вид :

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y(N - y)$$

Здесь β – коэффициент пропорциональности, N – общее число особей.