Лекция 23. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача и теорема Коши. Общее решение. Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Однородные и неоднородные уравнения. Линейная зависимость и независимость решений. Теорема о структуре общего решения.

Дифференциальные уравнения высших порядков

§ 1. Определение. Основные понятия.

Пусть имеем дифференциальное уравнение разрешенное относительно старшей производной.

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \qquad (1)$$

<u>Определение 1.</u> Общим решением уравнения вида (1) называется функция $y = \phi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, где $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$ – произвольны и

$$\phi^{(n)}(x) \equiv f(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n-1)}(x)).$$

Определение 2. Общим интегралом уравнения вида (1) называется выражение вида:

$$F(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0,$$

неявно задающее функцию

$y = \phi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – общее решение уравнения (1)

Для уравнения (1) ставится задача Коши, смысл которой – выделение из множества решений (1), единственное решение, удовлетворяющее некоторым условиям.

Постановка задачи Коши: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$

где $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ – числа.

Эти условия называются **начальными условиями**. Их ровно n штук, т.е. столько, сколько неизвестных констант, содержащихся в общем решении, которые и находятся из начальных условий.

Задача Коши для (1) не всегда существует и единственна. Решение задачи Коши существует и единственно, если выполняются условия теоремы.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши). Если дифференциальное уравнение вида (1):

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \qquad (1)$$

удовлетворяет условиям:

1) $f(x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x))$ - непрерывна по всем аргументам в точке $M(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)})$.

2) Частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dfrac{\partial f}{\partial y''}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ ограничены в окрестности точки M.

Тогда существует единственное решение задачи Коши для (1).

Без доказательства.

§ 2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

I тип:

Уравнения вида $y^{(n)}(x) = f(x)$.

Решается последовательным интегрированием:

$$y^{(n)}dx = f(x)dx$$

$$dy^{(n-1)} = f(x)dx$$

$$\int dy^{(n-1)} = \int f(x)dx$$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + c_1.$$

Введем обозначение $F_1(x)$, такое что: $F_1'(x) = f(x)$

тогда: $y^{(n-1)} = F_1(x) + c_1$. Еще раз интегрируем:

$y^{(n-2)} = \int (F_1(x) + c_1)dx + c_2 = F_2(x) + c_1 x + c_2$,

где $F_2'(x) = F_1(x)$.

Последовательно интегрируя n раз, получаем:

$$y = F_n(x) + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1} x + c_n.$$

Это общее решение дифференциального уравнения I типа.

Пример.

$y^{(5)} = \cos x$

$y^{(4)} = \int \cos x dx + c_1$

$y^{(4)} = \sin x + c_1$

$y^{(3)} = \int (\sin x + c_1) dx + c_2 = - \cos x + c_1 x + c_2$

$y^{(2)} = \int (- \cos x + c_1 x + c_2) dx + c_3 =$

$= - \sin x + c_1 x^2/2 + c_2 x + c_3 = - \sin x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$

$y^{(1)} = \int (- \sin x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3) dx + c_4 =$

$= \cos x + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$

$$y = \int(\cos x + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4)dx + c_5 =$$
$$= \sin x + c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5.$$

Мы получили общее решение.

II тип:

$$F(x, y^{(k)}(x), y^{(k+1)}(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Оно не содержит $y(x), y'(x), \dots, y^{(k\text{-}1)}(x)$.

Порядок понижается с помощью подстановки:

$$z = y^{(k)} \Rightarrow z' = y^{(k+1)}, z'' = y^{(k+2)}, \dots, z^{(n\text{-}k)} = y^{(n)}.$$

Тогда:

$$F(x, z(x), z'(x), z''(x), \dots, z^{(n\text{-}k)}(x)) = 0. \qquad (2)$$

Порядок уравнения (2) равен $(n\text{-}k)$, т.е. при подстановке порядок уравнения понижается на k единиц.

Пример.

$y^{IV} - y^{III}/x = 0$ – уравнение II типа.

$z = y^{III} \Rightarrow z' = y^{IV}$, тогда:

z' - $z/x = 0$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}, z \neq 0$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|c_1| \Rightarrow z = c_1 x.$$

Возвращаемся к старой переменной:

$y^{III} = c_1 x$ – уравнение I типа.

$y^{II} = \int c_1 x dx + c_2 = c_1 x^2/2 + c_2 = c_1 x^2 + c_2$

$y' = \int (c_1 x^2 + c_2) dx + c_3 = c_1 x^3/3 + c_2 x + c_3 =$

$= c_1 x^3 + c_2 x + c_3$

$y = \int (c_1 x^3 + c_2 x + c_3) dx + c_4 = c_1 x^4 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$

III тип:

$F(y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0.$

В него не входит x.

Порядок понижается с помощью подстановки:

$$y' = P(y) \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(P(y)\right) = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = P \cdot P'_y$$

Тогда: $F(y,\ P,\ P_y',\ \ldots,\ P_y^{(n\text{-}1)}) = 0 \Rightarrow$ порядок уравнения понижается на единицу.

Пример.

$$\begin{cases} yy'' + (y')^2 = 0 & \text{– уравнение III типа.} \\ y(0) = 1 & \\ y'(0) = 0 & \text{– задача Коши.} \end{cases}$$

Решение.

Введем новую переменную:

$y_x' = P(y) \Rightarrow y_{xx}'' = PP_y'$

Тогда уравнение принимает вид:

$yPP_y' + P^2 = 0.$

Пусть $yP^2 \neq 0$. Разделим на yP^2 :

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dy} = -\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{dP}{P} = -\int \frac{dy}{y}$$

$\ln|P| = -\ln|y| + \ln|c_1| \Rightarrow P = c_1/y.$

Возвращаемся к старой переменной:

$y' = c_1/y.$

В задачах такого типа неизвестные константы необходимо определять на каждом шаге: так как

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \frac{c_1}{1} \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow$$

$y' = 0 \Rightarrow y = c_2,$

$y(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$, тогда окончательно:

$y(x) = 1.$

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения. Дифференциальные операторы.

<u>Определение 1.</u> Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (3)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$ – непрерывные на (a,b) функции, называется <u>линейным дифференциальным уравнением</u> (ЛДУ).

Разрешим это уравнение относительно старшей производной, получим:

$$y^{(n)} = f(x) - a_1(x)y^{(n-1)} - \ldots - a_{n-1}(x)y' - a_n(x)y. \quad (4)$$

В уравнении (4) имеем:

1) правая часть $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) =$
$= f(x) - a_1(x)y^{(n-1)} - \ldots - a_{n-1}(x)y' - a_n(x)y.$

непрерывна на (a,b) как алгебраическая сумма непрерывных функций.

2) частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -a_n(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = -a_{n-1}(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y''} = -a_{n-2}(x)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} = -a_1(x)$$

непрерывны на (a,b).

В силу этих двух условий и теоремы существования и единственности имеем, что для (3) существует единственное решение задачи Коши, т.е. задачи вида:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Из (3) видно, что функции $y(x)$, определенной на (a,b) по некоторому закону ставится в соответствие $f(x)$, определенная на (a,b) так, что:

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

В случае, когда функции ставится в соответствие функция, говорят, что задан оператор: $y \Rightarrow f(x)$.

Левую часть уравнения (3) обозначим $L[y]$, получим:

$$L[y]=\frac{d^n}{dx^n}(y)+a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(y)+\dots+a_n(x)y=$$

$$=\underbrace{\left(\frac{d^n}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\dots+a_n(x)\right)}_{\text{дифференциальный оператор } L.}y$$

Оператор L называется дифференциальным.

Эти операторы с помощью операции дифференцирования переводят одни функции в другие.

Пример. $y = x^2$.

$\frac{d}{dx}$ - дифференциальный оператор.

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x$$

$$x^2 \xrightarrow{\frac{d}{dx}} 2x$$

Уравнение (1) в операторной записи имеет вид:

$$L[y] = f(x) \tag{5}$$

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (5) имеет вид:

$$L[y] = 0, \tag{6}$$

это **однородное дифференциальное линейное уравнение**.

Если $f(x) \neq 0$, то $L[y] = f(x)$ - это **неоднородное дифференциальное линейное уравнение**.

Свойства дифференциального оператора (левой части уравнения (5))

1. Если $y(x)$ n-раз дифференцируемая функция на (a,b), а c – некоторая константа, то

$$L[cy] = cL[y]$$

Доказательство

$$L[cy] = \frac{d^n}{dx^n}(cy) + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(cy) + \dots + a_n(x)cy =$$

$$= c\frac{d^n}{dx^n}(y) + ca_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(y) + \dots + ca_n(x)y =$$

$$= c\left(\frac{d^n}{dx^n}(y) + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(y) + \dots + a_n(x)y\right) =$$

$$= cL[y]$$

Ч.т.д.

2. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ n раз дифференцируемы на (a,b), то

$$L\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} L[y_i]$$

Без доказательства.

3. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ n раз дифференцируемы на (a,b), а c_1, c_2, …, c_n – некоторые числа, то

$$L[c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n] =$$
$$= c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] + \ldots + c_n L[y_n]$$

Без доказательства.

Свойства 1,2,3 показывают, что $L[y]$ – линейный дифференциальный оператор.

§ 4. Однородные линейные дифференциальные уравнения. Структура общего решения.

Рассмотрим уравнение (6):

$$L[y] = 0,$$

где: $L[y]$ – линейный дифференциальный оператор.

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ – частные решения уравнения (6), т.е.

$$L[y_1] = 0, L[y_2] = 0, \ldots, L[y_n] = 0.$$

Тогда линейная комбинация:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \qquad (7)$$

является решением уравнения (6), т.е. $L[y] = 0$.

Условие, при которых (7) есть решение уравнения (6), содержится в теореме:

<u>Теорема (о структуре общего решения).</u> Для того, чтобы $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$,
где $L[y_i] = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ было общим решением однородного уравнения $L[y] = 0$ необходимо и достаточно, чтобы функциональный определитель

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

на (a,b).

Замечание: функциональный определитель

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$$

называют **определителем Вронского или Вронскианом**.

Определение. Система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называется **фундаментальной системой решений** однородного уравнения $L[y] = 0$ на (a,b), если:

1) $L[y_1] = 0$, $L[y_2] = 0$, …, $L[y_n] = 0$,

2) $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$ на (a,b).

Теорема. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения $L[y] = 0$ на (a,b), то структура общего решения этого уравнения имеет вид:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

Без доказательства.

Замечание: В сформулированной теореме и определении имеется в виду, что система функций содержит столько функций, каков порядок соответствующего дифференциального уравнения $L[y] = 0$.

Пример: $y'' + y = 0$.

$y_1 = \cos x$ – есть решение данного уравнения,

$y_2 = \sin x$ – тоже решение.

Так как порядок дифференциального уравнения = 2, то для построения общего решение уравнения достаточно двух частных решений уравнения.

$$W[\sin x, \cos x] = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

Следовательно, y_1 и y_2 – фундаментальная система решений. В соответствии с теоремой о структуре общего решения однородного уравнения, можно записать:

$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ – общее решение уравнения.

Определение. Система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называется линейно зависимой на (a,b), если существуют c_1, c_2, …, c_n такие что $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 > 0$ но: $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0$, т.е. все одновременно константы $\neq 0$.

Определение. Система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называется линейно независимой на (a,b) тогда и только тогда, когда линейная комбинация $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0$ если $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Теорема (необходимое условие линейной зависимости системы функций). Если система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, n раз дифференцируемая на (a,b) и линейно зависима на (a,b), то $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0$ для $\forall\ x \in (a,b)$.

Без доказательства.

Теорема (условие линейной независимости системы функций). Для того, чтобы система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, n раз дифференцируемая на (a,b) была линейно независима на (a,b), необходимо и достаточно, чтобы $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$ для $\forall\ x \in (a,b)$.

Без доказательства.

Пример. Даны функции: 1, x, x^2. Исследовать на линейную зависимость.

$$W\left[1, x, x^2\right] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Т.е. в силу теоремы система функций (1, x, x^2) линейно независима.

<u>Определение.</u> (2-е определение фундаментальной системы решений) Система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ называется фундаментальной системой решений уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

если:

1) $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ – решения однородного уравнения и их ровно n штук.

2) $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ – линейно независима.