07.05.20.

Тема:
Тела вращения.
Цилиндр. Площадь поверхности цилиндра.

Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1458
https://infourok.ru/videouroki/1459

Теоретическая часть:

Прочитать.

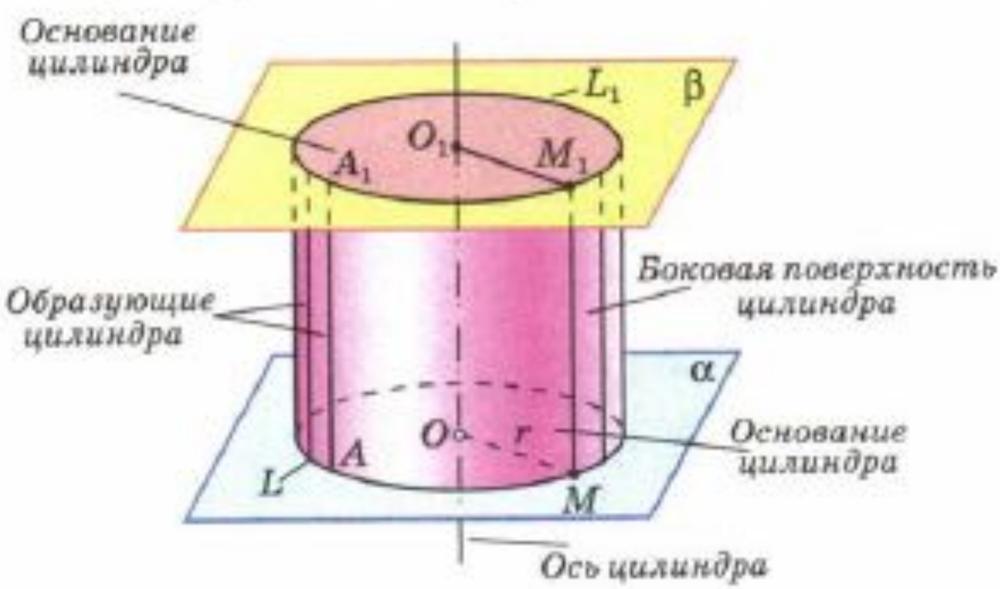
Теоремы и определения

(выделенное жирным шрифтом) – выучить.

59 Понятие цилиндра

Рассмотрим произвольную плоскость α и окружность L с центром O радиуса r, лежащую в этой плоскости. Через каждую точку окружности L проведем прямую, перпендикулярную к плоскости α. Поверхность, образованная этими прямыми, называется **цилиндрической поверхностью**, а сами прямые — **образующими цилиндрической поверхности**. Прямая, проходящая через точку O перпендикулярно к плоскости α, называется **осью цилиндрической поверхности**. Поскольку все образующие и ось перпендикулярны к плоскости α, то они параллельны друг другу (см. п. 16).

Рассмотрим теперь плоскость β, параллельную плоскости α (рис. 142). Отрезки образующих, заключенные между плоскостями α и β, параллельны и равны друг другу (см. п. 11). По построению концы этих отрезков, расположенные в плоскости α, заполняют окружность L. Концы же, расположенные в плоскости β, заполняют окружность L_1 с центром O_1 радиуса r, где O_1 — точка пересечения плоскости β с осью цилиндрической поверхности. Справедливость



Цилиндр

Рис. 142

этого утверждения следует из того, что множество концов образующих, лежащих в плоскости β, получается из окружности L параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{OO_1}$. Параллельный перенос является движением и, значит, наложением, а при наложении любая фигура переходит в равную ей фигуру. Следовательно, при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{OO_1}$ окружность L перейдет в равную ей окружность L_1 радиуса r с центром в точке O_1.

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1, называется **цилиндром** (см. рис. 142). Круги называются **основаниями цилиндра**, отрезки образующих, заключенные между основаниями, — **образующими цилиндра**, а образованная ими часть цилиндрической поверхности — **боковой поверхностью цилиндра**. Ось цилиндрической поверхности называется **осью цилиндра**.

Как уже отмечалось, все образующие цилиндра параллельны и равны друг другу. Длина образующей называется **высотой цилиндра**, а радиус основания — **радиусом цилиндра**.

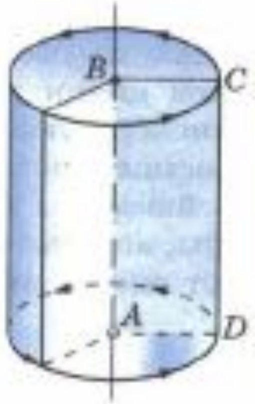
Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. На рисунке 143 изображен цилиндр, полученный вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB. При этом боковая поверхность цилиндра образуется вращением стороны CD, а основания — вращением сторон BC и AD.

Рассмотрим сечения цилиндра различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой **прямоугольник** (рис. 144), две стороны которого — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра. Такое сечение называется **осевым**.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является **кругом**. В самом деле, такая секущая плоскость (плоскость γ на рисунке 145) отсекает от данного цилиндра тело, также являющееся цилиндром. Его основаниями служат два круга, один из которых и есть рассматриваемое сечение.

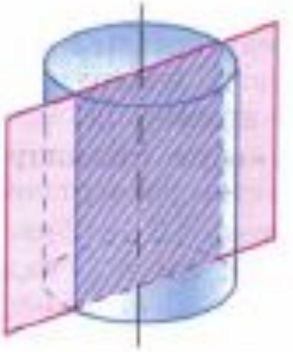
Замечание

На практике нередко встречаются предметы, которые имеют форму более сложных цилиндров. На рисунке 146, *а* изображен цилиндр, каждое основа-



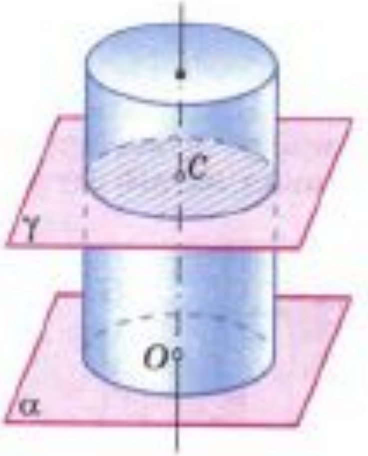
Цилиндр получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB

Рис. 143



Осевое сечение цилиндра

Рис. 144



Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к оси

Рис. 145

ние которого представляет собой фигуру, ограниченную частью параболы и отрезком. На рисунке 146, *б* изображен цилиндр, основаниями которого являются круги, но образующие цилиндра не перпендикулярны к плоскостям оснований (наклонный цилиндр). Однако в дальнейшем мы будем рассматривать только такие цилиндры, которые были определены в этом пункте. Их называют иногда **прямыми круговыми цилиндрами**.

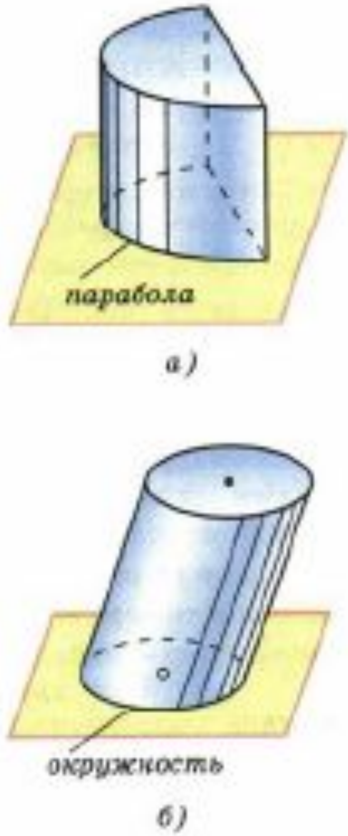


Рис. 146

60 Площадь поверхности цилиндра

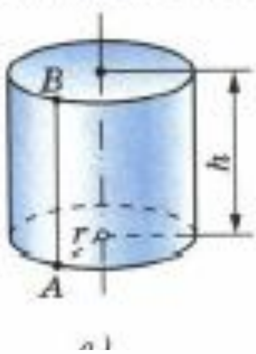
На рисунке 147, *а* изображен цилиндр. Представим себе, что его боковую поверхность разрезали по образующей AB и развернули таким образом, что все образующие оказались расположенными в некоторой плоскости α (рис. 147, *б*). В результате в плоскости α получится прямоугольник $ABB'A'$. Стороны AB и $A'B'$ прямоугольника представляют собой два края разреза боковой поверхности цилиндра по образующей AB. Этот прямоугольник называется **разверткой боковой поверхности цилиндра**. Основание AA' прямоугольника является разверткой окружности основания цилиндра, а высота AB — образующей цилиндра, поэтому $AA' = 2\pi r$, $AB = h$, где r — радиус цилиндра, h — его высота.

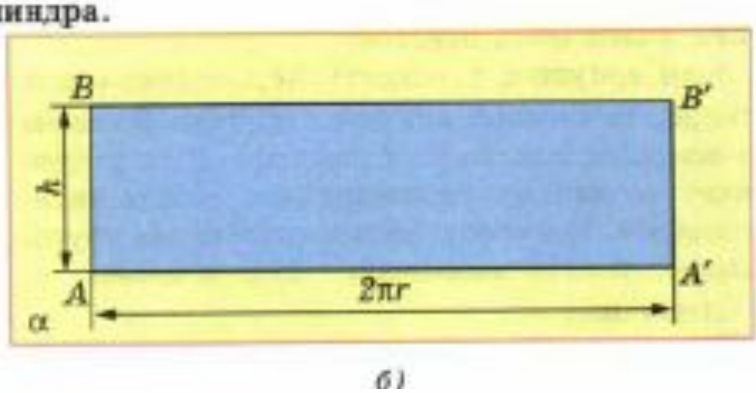
За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь ее развертки.

Так как площадь прямоугольника $ABB'A'$ равна $AA' \cdot AB = 2\pi rh$, то для вычисления площади $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра радиуса r и высоты h получается формула

$$S_{бок} = 2\pi rh.$$

Итак, **площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.**



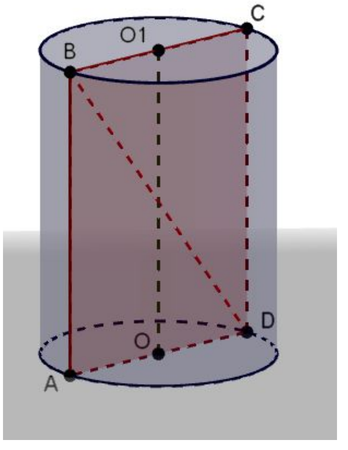


Площадью полной поверхности **цилиндра** называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований. Так как площадь каждого основания равна πr^2, то для вычисления площади $S_{цил}$ полной поверхности цилиндра получаем формулу

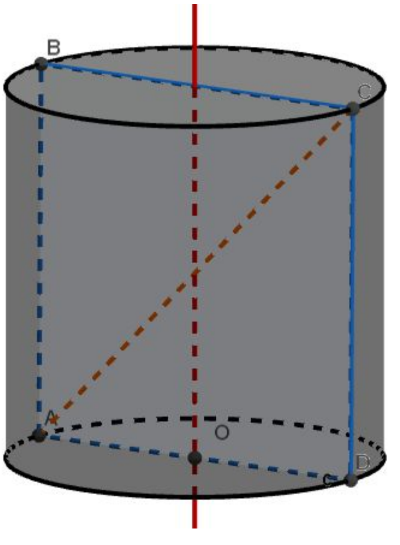
$$S_{цил} = 2\pi r\,(r + h).$$

Практическая часть.

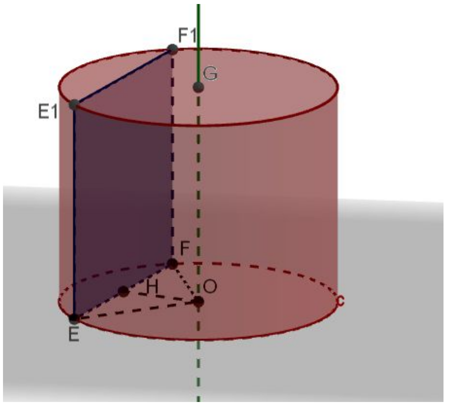
Докажите, что осевое сечение цилиндра является прямоугольником, две противоположные стороны которого — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра. Найдите диагональ осевого сечения, если радиус цилиндра равен 1,5 м, а высота равна 4 м.



Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого равна 20 см. Найдите: а) высоту цилиндра; б) площадь основания цилиндра.



Высота цилиндра равна 8 см, радиус равен 5 см. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси, если расстояние между этой плоскостью и осью цилиндра равно 3 см.



Сколько понадобится краски, чтобы покрасить бак цилиндрической формы с диаметром основания 1,5 м и высотой 3 м, если на один квадратный метр расходуется 200 г краски?