

*Интегрирование
рационально-тригонометрических
функций*

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R – рациональная функция, приводится к интегрированию рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, при этом

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Специальные подстановки

1. Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то рационализирует
подстановка $\cos x = t$.

2. Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то рационализирует
подстановка $\sin x = t$.

3. Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то рационализирует
подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)],$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$$

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x (2 + \cos x - 2 \sin x)}$.

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x - 2 \cos^2 x + 1}$.

Пример 3. Найти интеграл $\int \sin^4 x \, dx$.

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^7 x}$.

Пример 5. Найти интеграл $\int \cos 3x \cos 5x dx$.

$$\cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} (\cos(3x - 5x) + \cos(3x + 5x))$$

$$= \frac{1}{2} (\cos(-2x) + \cos 8x) = \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 8x)$$