21.05.20
Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.

Л.С. Атанасян "Геометрия 10-11"

Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Если вектор представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

где x, y и z - некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Числа x, y и z называются коэффициентами разложения.

Теорема о разложении вектора по трем некомпланарным некорам.

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

По правилу многоугольника $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$

Докажем, что любой вектор $\vec{p}$ можно представить в виде

$\overrightarrow{OP_2} = x \cdot \overrightarrow{OA}$

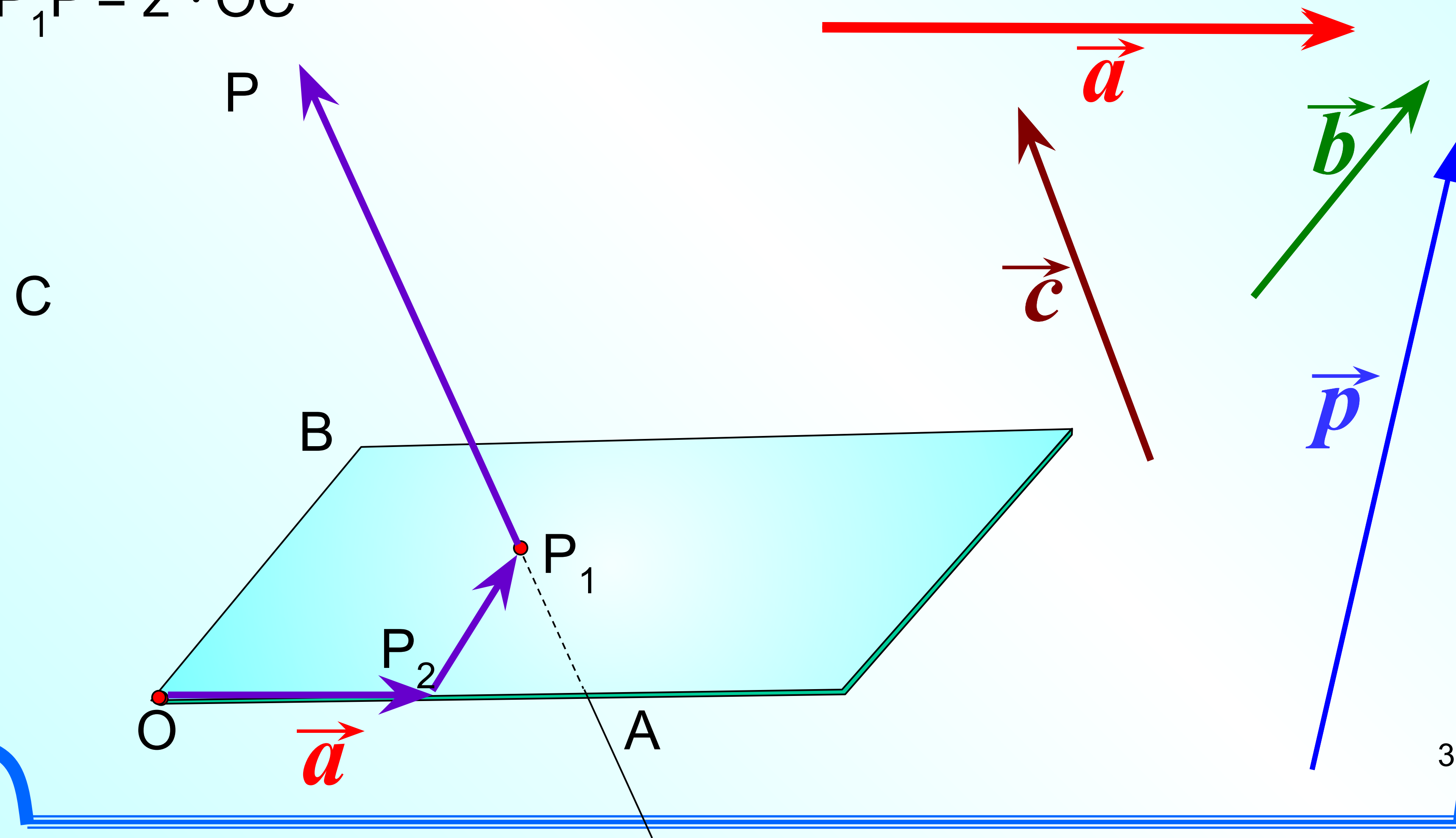
$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{P_2P_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

$\overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}$



Докажем теперь, что коэффициенты разложения определяются единственным образом. Допустим, что это не так и существует другое разложение вектора

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

$$\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$$

$-$

Это равенство выполняется только тогда, когда

$$\vec{o} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}$$

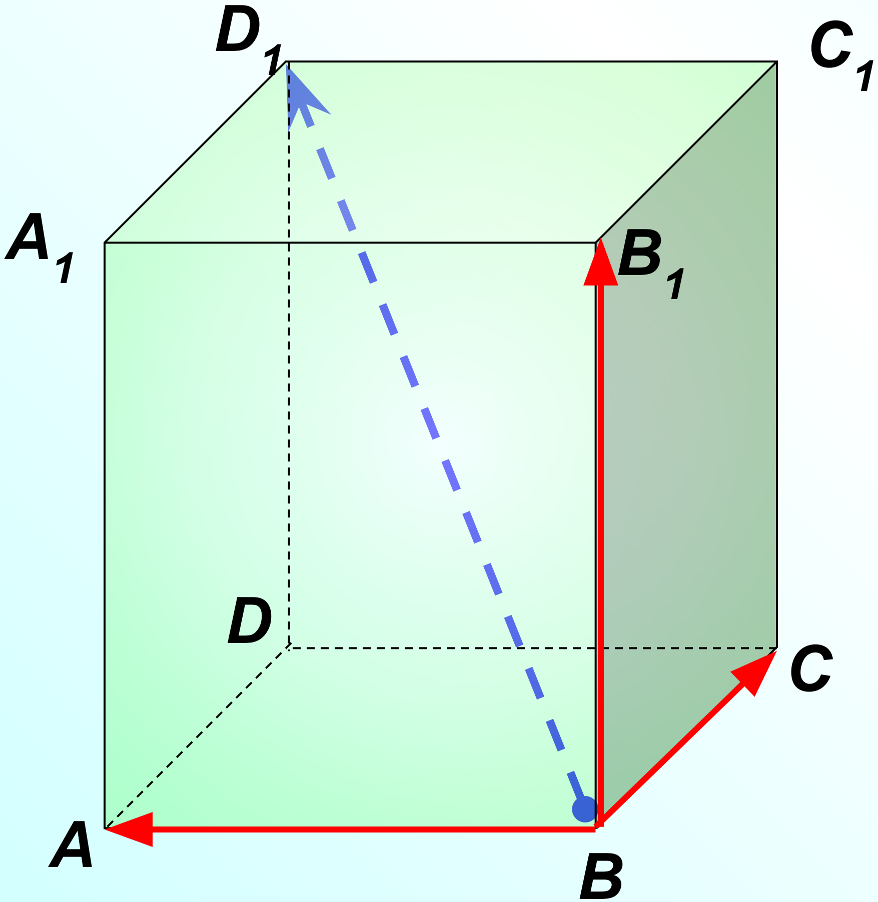
Если предположить, например, что $z - z_1 \neq 0$, то из этого равенства можно найти $\vec{c} = -\frac{x - x_1}{z - z_1}\vec{a} - \frac{y - y_1}{z - z_1}\vec{b}$

Тогда векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Это противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение не верно, и $x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1$. Следовательно, коэффициенты разложения $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ определяются единственным образом.

№360 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.

Разложите вектор $\overrightarrow{BD_1}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.

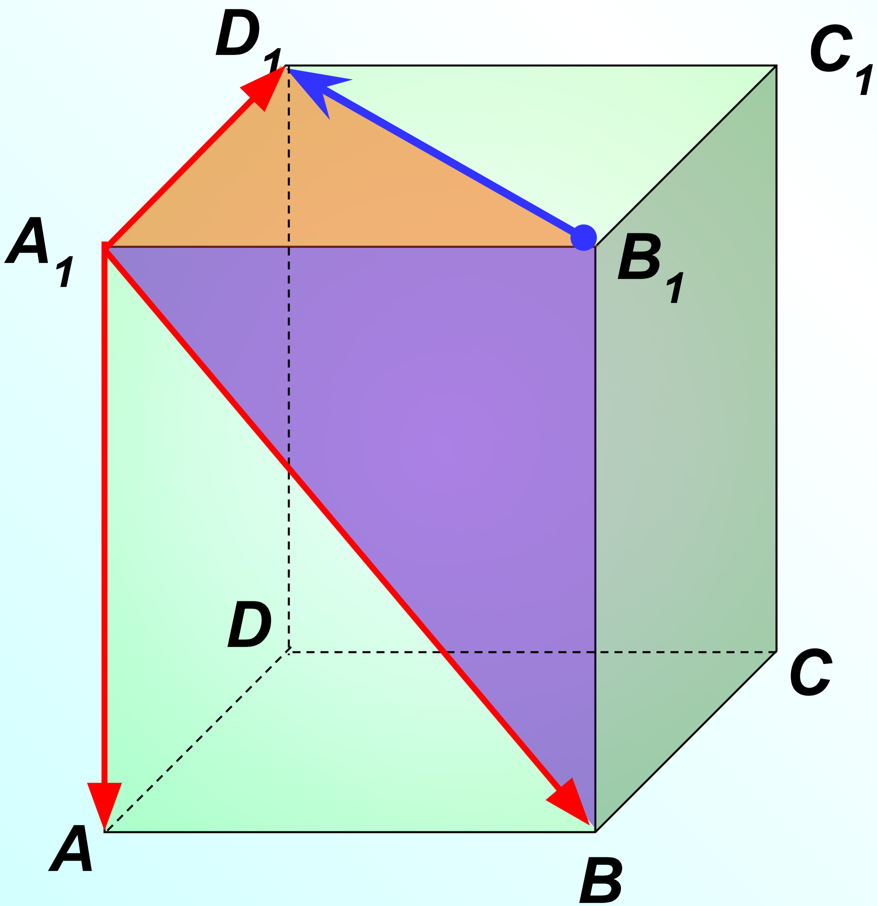
По правилу параллелепипеда $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$



№360 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.

Разложите вектор $\overrightarrow{B_1D_1}$ по векторам $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1D_1}$.

По правилу треугольника из $\Delta A_1B_1D_1$:



$$\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1D_1} =$$

из ΔA_1B_1B

$$= (\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA_1}) + \overrightarrow{A_1D_1} =$$

$$= (\overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{A_1B}) + \overrightarrow{A_1D_1} =$$

$$= \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1D_1}$$

Спасибо за урок!