

# Тема 4. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ ПО ПЕРЕХОДНЫМ ФУНКЦИЯМ

---

## СОДЕРЖАНИЕ ТЕМЫ:

1. Аппроксимация переходной функции решением дифференциального уравнения с простыми вещественными корнями
  2. Аппроксимация переходной функции решением дифференциального уравнения с простыми комплексными корнями
  3. Определение коэффициентов передаточной функции методом «ПЛОЩАДЕЙ»
  4. Аппроксимация переходной функции решением дифференциального уравнения второго порядка
  5. Аппроксимация переходной функции решением дифференциального уравнения первого порядка
  6. Аппроксимация переходной функции решением дифференциального уравнения первого порядка с запаздыванием
  7. Аппроксимация переходной функции решением дифференциального уравнения с кратными действительными корнями
  8. Аппроксимация переходных функций объектов, содержащих интегрирующие звенья
- 



# МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ ПО ПЕРЕХОДНЫМ ФУНКЦИЯМ

---

Основной признак классификации методов идентификации по переходной функции – это **предположения о структуре аппроксимирующей  $W(s)$  или дифференциального уравнения.**

Под структурой дифференциального уравнения, или, что одно и то же, передаточной функции, понимаются число и расположение корней характеристического уравнения или нулей и полюсов  $W(s)$ .

**Большинство** методов идентификации по переходной функции можно классифицировать по используемому ими **математическому аппарату.**

---



---

**Известно**, что решение линейного дифференциального уравнения с *постоянными коэффициентами и нулевыми начальными условиями* существует и **единственно**.

**Однако!!!** утверждать обратное, т.е. что *всякому таблично или графически заданному решению* соответствует единственное линейное дифференциальное уравнение - **нельзя**, особенно если под решением подразумевается **переходная функция  $h(t)$  промышленного объекта**.

В этом случае всегда осуществляется **приближенная аппроксимация  $h(t)$**  решением дифференциального уравнения, а следовательно, по одной и той же переходной функции можно получать **разные!!!** динамические характеристики.



# 1. АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОСТЫМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОРНЯМИ

## Метод последовательного логарифмирования.

Этот метод применим для аппроксимации гладких неколебательных переходных функций  $h(t)$ , представленных выражением

$$h(t) \approx C_0 - \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}, \quad (3.14)$$

где  $C_0 = h_\infty \approx h(T_{уст})$ ;

$C_i$  – постоянные коэффициенты;

$\alpha_i$  – корни характеристического уравнения (вещественные числа), причем  $\alpha_i$  должны удовлетворять неравенству:



(3.15)

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} < 0,5; \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.15)$$

Эти условия означают, что аппроксимирующая функция  $W(s)$  имеет только вещественные простые полюсы, расположенные на достаточно большом расстоянии друг от друга по действительной оси.

**Следовательно**, при использовании рассматриваемых методов идентификации требуется по **таблично** или **графически** **заданной** **переходной** **функции** промышленного объекта определить величины коэффициентов  $C_i$  и корни характеристического уравнения  $\alpha_i$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ , а также порядок уравнения  $n$ .



,

---

**Идея метода заключается** в последовательном приближении  $h(t)$  вначале решением уравнения первого порядка, т.е. функцией  $C_1 e^{-a_1 t}$ , и если эта аппроксимация **неудовлетворительна** на отрезке времени  $[0, T_{уст}]$ , то вводится в рассмотрение вторая составляющая т.е. порядок аппроксимирующего уравнения принимается равным **2 и т.**

**Д.**

Неизвестные  $a_i$  и  $C_i$  определяются на каждом этапе аппроксимации с помощью **операции логарифмирования**, вследствие чего этот способ

---

получил название метода

**“постепенное приближение”**



(3.15)

Последовательность действий при его применении следующая.

По условию (3.15) все корни  $\alpha_i$  различны, поэтому скорость убывания функций  $C_i e^{-\alpha_i t}$  также будет различной при увеличении аргумента – времени  $t$ .

**Скорость убывания** определяется величиной  $\alpha_i$ , и так как  $\alpha_1$  – самый малый из корней, то составляющая  $C_1 e^{-\alpha_1 t}$  - уменьшается **медленнее** всех прочих составляющих.

Поэтому можно предположить, что  $h(t)$  есть решение **линейного дифференциального уравнения первого порядка** и написать **приближенное равенство**:



$t$

---

$$h(t) \approx C_0 - C_1 e^{-\alpha_1 t} \text{ или } C_0 - h(t) = h_1(t) \approx C_1 e^{-\alpha_1 t}.$$

Это соотношение верно при **БОЛЬШИХ** значениях времени  $t$ ,  
когда **влиянием других составляющих можно пренебречь**.

Прологарифмируем функцию  $|h_1(t)|$  и получим уравнение  
прямой линии в полулогарифмическом масштабе по оси  
ординат

$$\ln |h_1(t)| \approx \ln C_1 - \alpha_1 t.$$

Отсюда нетрудно определить величины  $\alpha_1$  и  $C_1$ .





,

---

Для этого вычисляется функция  $h_1(t) = C_0 - h(t)$  и строится график  $\ln |h_1(t)|$  в зависимости от времени  $t$ .

К функции  $\ln |h_1(t)|$  проводится **асимптота** при  $t \rightarrow \infty$  или в конкретных условиях при **больших значениях времени  $t$** .

Асимптота отсекает на оси ординат некоторый **отрезок**, равный  $\ln C_1$ .

**Величина корня  $\alpha_1$**  равна тангенсу угла наклона асимптоты к оси абсцисс

$$\alpha_1 = -\frac{\ln C_1}{n_{t_1}},$$

где  $t_1$  – точка пересечения асимптоты с осью времени.

---



$t$

Если  $h(t)$  действительно является решением дифференциального уравнения первого порядка, то функция

$$h_2(t) = h_1(t) - C_1 e^{-\alpha_1 t}$$

равна нулю при всех, а не только больших значениях времени  $t$ , т. е. асимптота совпадает со всей функцией.

В общем случае  $n \neq 1$ , поэтому  $h_2(t) \neq 0$  при малых значениях  $t$ , и, зная теперь  $C_1$  и  $\alpha_1$ , можно найти функцию  $h_2(t)$ , порождаемую неучетом влияния составляющих  $C_i e^{-\alpha_i t}$

и особенно медленно убывающей компоненты  $C_2 e^{-\alpha_2 t}$



)

---

Можно построить функцию  $h_2(t)$  на графике в полулогарифмическом масштабе по оси ординат, для этого следует провести к ней асимптоту и определить величины  $C_2$  и  $a_2$ .

Если асимптота не совпадает со всеми значениями  $\ln |h_2(t)|$  то порядок аппроксимирующего дифференциального уравнения должен быть **ВЫШЕ ВТОРОГО** и надо найти **очередную функцию «НЕВЯЗОК»**

$$h_3(t) = h_2(t) - C_2 e^{-a_2 t}$$

и учесть влияние на  $h(t)$  следующей составляющей **и Т. Д.**



(3.14)

Процесс приближения  $h(t)$  выражением (3.14) - прекращается тогда, когда функция  $h_n(t) \approx 0$  с точностью  $1 \div 2\%$  величины  $h(T_{уст})$ , причем значения ее будут **знакопеременными**.

Знаки переменных интегрирования  $C_i$  определяются по знакам соответствующих функций  $h_i(t)$ .

*Практика применения метода последовательного логарифмирования для определения динамических характеристик по переходным функциям промышленных объектов показала, что в подавляющем большинстве случаев  $h(t)$  можно аппроксимировать суммой из двух – четырех экспонент.!!!*



• (3.16)

При **правильном** определении параметров  $\alpha_i$  и  $C_i$  должны выполняться следующие **«начальные»** условия:

$$C_0 - \sum_{i=1}^n C_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 C_i = K = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{n-1} C_i = 0. \quad (3.16)$$

При большом  $n$  все равенства (3.16) **выполнить очень трудно**, так как проведение асимптот, а по существу – касательных, связано с **погрешностями субъективного характера**.



(3.17)

Далее (согласно (2.9)) найдем передаточную функцию объекта  $W(s)$ , положив  $x(t) = A1(t)$ , изображение которого  $L\{x(t)\} = L\{A1(t)\} = X(s) = A/s$ :

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{H(s)}{X(s)} = H(s) \frac{s}{A} = \\ &= \frac{C_0 \prod_{i=1}^n \alpha_i}{s \prod_{i=1}^n (s + \alpha_i)} \frac{s}{A} = \frac{k}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$





---

**Следует указать**, что определение коэффициентов  $C_i$  и корней  $\alpha_i$  осуществляется по переходной функции, из которой уже выделено время **чистого запаздывания  $T$** , поэтому динамические свойства объекта будут описываться передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} e^{-s\tau}.$$



# Достоинства и недостатки метода

Рассмотренный метод аппроксимации  $h(t)$  решением линейного дифференциального уравнения **достаточно прост** и **позволяет получить аналитические выражения, весьма удобные для последующих расчетов.**

**Основной недостаток** метода *последовательного логарифмирования* заключается в неизбежном появлении **субъективных ошибок** при проведении асимптот и, как следствие этого, в **трудности** точного определения  $C_i$  и  $\alpha_i$ , удовлетворяющих «**начальным услови** (3.16)».





# Пример.

Поясним изложенную методику примером определения коэффициентов  $W(s)$  по гладкой переходной функции, заданной равноотстоящими значениями  $h(t_i)$  при  $t_i - t_{i-1} = 2 \text{ мин}; i = 0, 1, \dots, \text{Таблица } 1$  ).

Время чистого запаздывания  $T$  выделено заранее и равно  $3 \text{ мин}$ .

Коэффициент передачи объекта равен  $h(T_{уст}) = h(42) = 100$ .

График  $h(t)$  показан на рисунке ( **Графики** )



# Таблица 1.

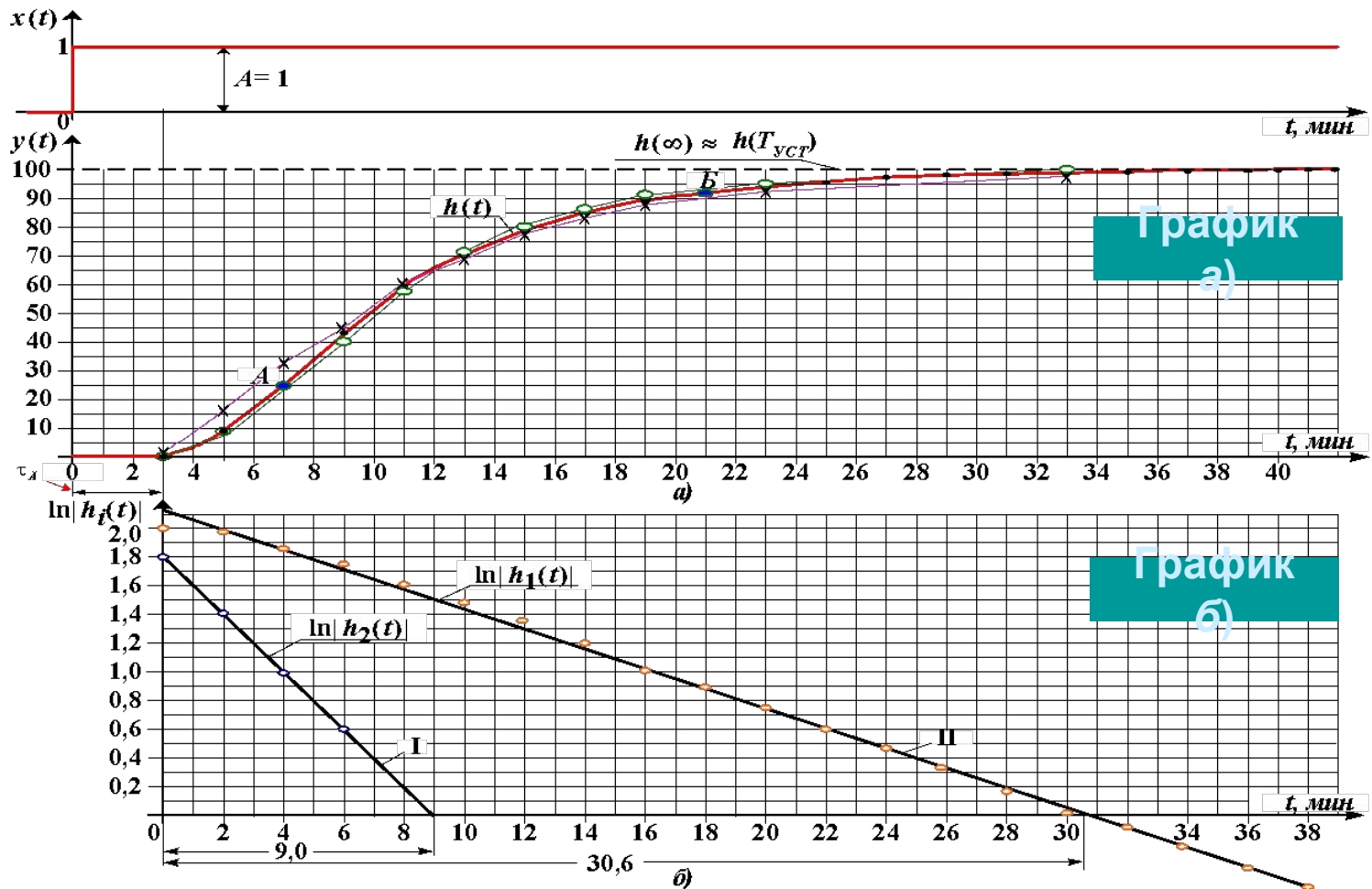
## Данные для примера определения модели объекта

---

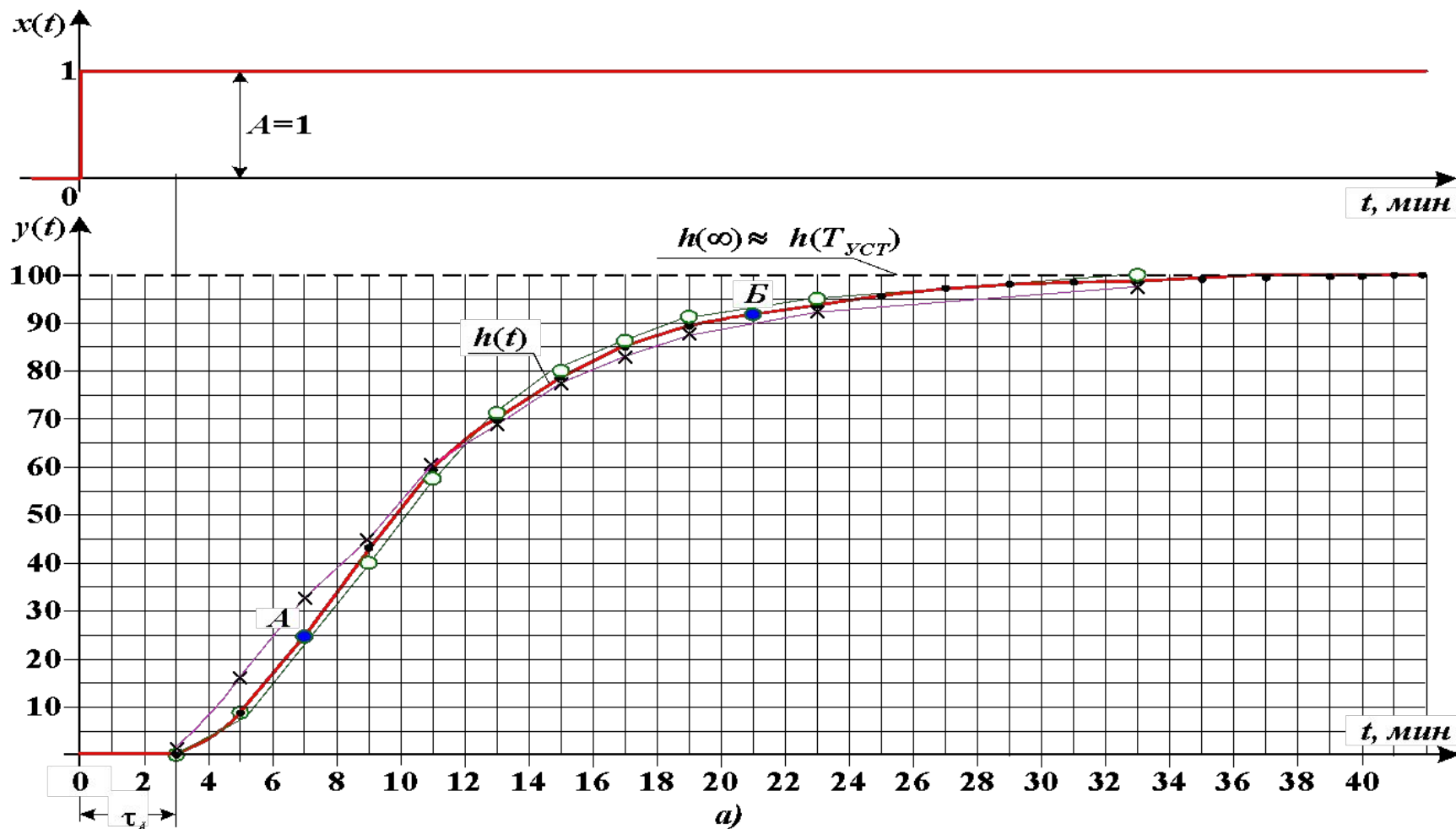
$t_j, \text{мин}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$h(t_j), \%$	0,00	8,7	25,5	43,5	58,5	70,0	78,5	84,5	88,8	92,0	94,3
$t_j, \text{мин}$	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42
$h(t_j), \%$	95,9	97,0	97,9	98,5	98,9	99,2	99,4	99,6	99,7	99,9	100



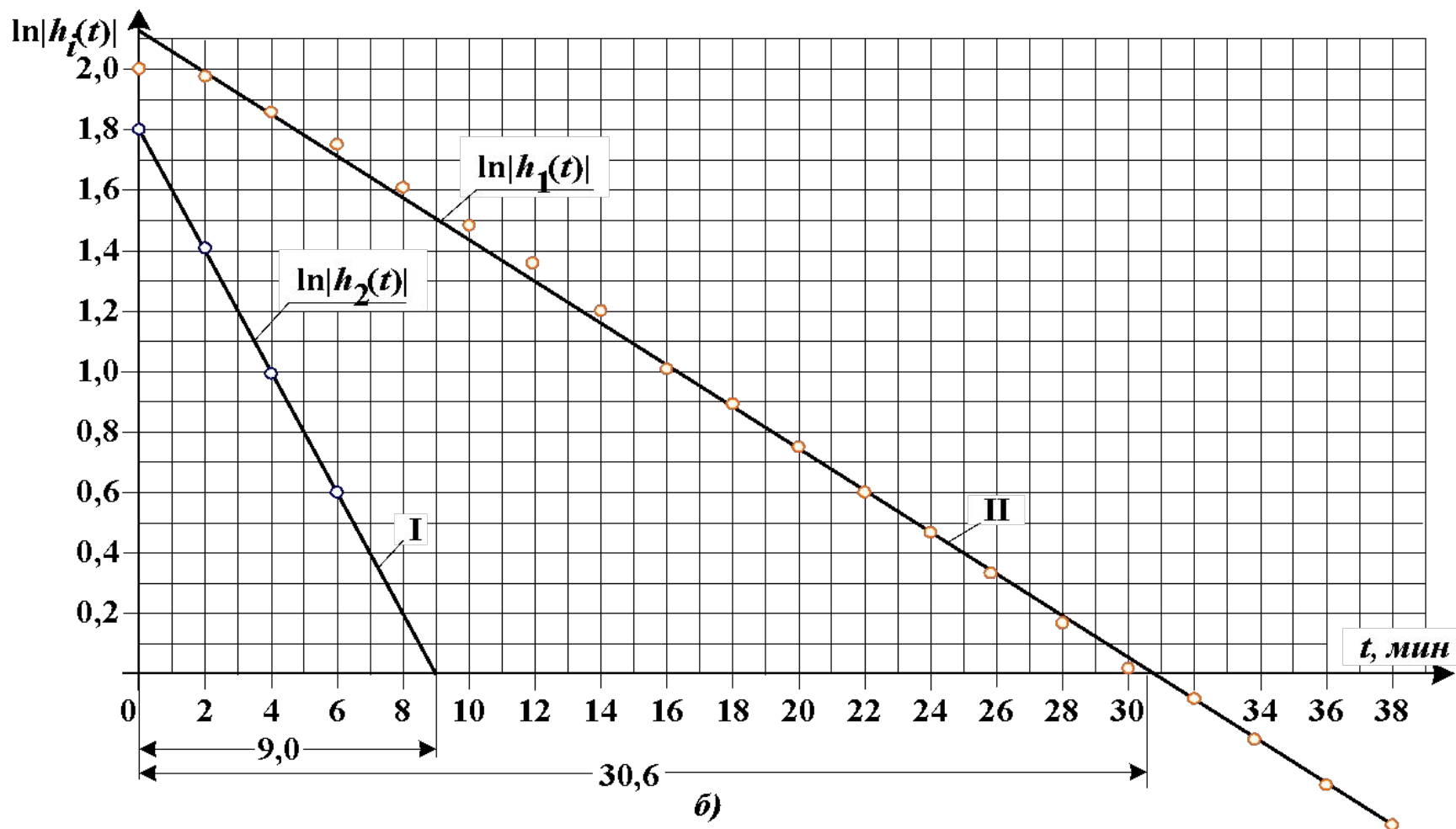
# Графики к примеру определения коэффициентов $W(s)$ методом последовательного логарифмирования



# График а)



# График б)



Величина  $C_0$  равна в данном случае  $h(42) = 100$ .

Вычтя из нее ординаты функции  $h(t_i)$ , найдем функцию  $h_1(t_i) = C_0 - h(t_i)$ , значения которой показаны в таблице 2

Там же приведены величины  $\ln |h_1(t_i)|$ , а сама функция  $\ln |h_1(t_i)|$  изображена в полулогарифмическом масштабе на рисунке График ).

Проведем к графику этой функции асимптоту  $I$ , пересекающую ось ординат в точке  $2,213$  и ось абсцисс в точке  $t_1 = 30,6$  мин.

Получим  $\ln C_1 = 2,213$ , откуда находим величины  $C_1$  и  $\alpha_1$ :

$$C_1 = 163,3; \quad \alpha_1 = -\ln C_1 / (0,434 t_1) = \\ = -163,3 / 0,434 / 30,6 = -0,166.$$



## таблицу 2

Вычислим функцию  $C_1 e^{-\alpha_1 t} = 163,3 e^{-0,166 t_i}$  при  $t_i = 0, 2, 4, \dots, 42$  мин и результаты занесем в таблицу 2.

Далее найдем функцию «невязок»

$$h_2(t_i) = h_1(t_i) - 16,3 e^{-0,166 t_i},$$

значения которой приведены также в таблице 2

Как видно из таблицы 2, в интервале времени  $0 \div 6$  мин

аппроксимация  $h_1(t)$  выражением  $C_1 e^{-\alpha_1 t} = 163,3 e^{-0,166 t_i}$

- неудовлетворительна, поэтому необходимо ввести в рассмотрение второй член разложения выражения (3.14).



## Таблица 2.

### Результаты расчета для примера определения модели объекта

$t_i, \text{мин}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$ h_1 $	100	91,3	74,5	56,5	41,5	30,0	21,5	15,5	11,2	8,0	5,7
$\ln h_1 $	2,00	1,96	1,872	1,75	1,618	1,477	1,33	1,191	1,04	0,903	0,78
$C_1 e^{-\alpha_1 t}$	-1633	-117	-84	-60,3	—	—	—	—	—	—	—
$ h_2 $	63,3	25,7	9,5	8,8	—	—	—	—	—	—	—
$\ln h_2 $	1,801	1,41	0,977	0,58	—	—	—	—	—	—	—
$t_i, \text{мин}$	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42
$ h_1 $	4,1	3,0	2,1	1,5	1,1	0,8	0,6	0,4	0,3	0,1	0,0
$\ln h_1 $	0,613	0,477	0,321	0,176	0,041	-0,097	-0,22	-0,398	-0,52	-1,0	—





## График б)

На рисунке ( **График б)** построена функция  $\ln |h_2(t)|$  и к ней проведена асимптота при  $t \rightarrow \infty$ , которая пересекает ось абсцисс в точке  $t_2 = 9,0$  мин и ось ординат в точке  $\ln C_2 = 1,766$ .

Из графика имеем:  $C_2 = 63,24$  и  $\alpha_2 = -\frac{1,766}{0,434 \text{ Ч}} = -0,452$

Учитывая отрицательный знак функции  $h_2(t)$ , получаем  $C_2 = -63,24$ .

Из **графика б)** асимптота достаточно хорошо совпадает с функцией  $\ln |h_2(t)|$ , поэтому можно принять  $n = 2$  и записать аналитическое решение дифференциального уравнения:



$$h(t) = 10 \left( 1 - 16,3e^{-0,16 t_i} + 0,6624e^{-0,45 t_i} \right)$$

Проведем проверку «начальных условий» согласно

$$h(0) = C_0 - C_1 - C_2 = 100 - 163,3 + 63,24 = -0,06;$$

$$h(0) = a_1 C_1 + a_2 C_2 = 0,166 \cdot 163,3 - 0,452 \cdot 63,24 = -1,35. \quad \blacksquare$$

Относительная ошибка невелика (менее 2%), поэтому уточнения величин  $a_i$  и  $C_i$  делать нет необходимости.

Однако для контроля вычислим несколько значений  $h(t)$  по аппроксимирующему выражению при  $t = 2$  мин,  $t = 6$  мин и  $t = 20$  мин.

Получим соответственно:  $h(2) = 8,5$ ;  $h(6) = 43,9$ ;  $h(20) = 94,11$ .

Ординаты экспериментальной функции  $h(t)$  при этих же значениях времени равны 8,7; 43,5 и 94,3.



---

## Вывод.

Достигнутая **точность** **приближения** **математического описания** переходной функции  $h(t)$  в виде **СУММЫ ДВУХ ЭКСПОНЕНТ** составила **менее 0,5%**, поэтому динамические свойства объекта можно описать передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{100e^{-3s}}{(6,03s + 1)(2,22s + 1)}$$



## 2. АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОСТЫМИ КОМПЛЕКСНЫМИ КОРНЯМИ

---

Этот метод аппроксимации применяют в тех случаях, когда переходная функция имеет **колебательный характер**.

Поэтому можно предположить, что динамические свойства промышленного объекта описываются передаточной функцией, не имеющей нулей и обладающей несколькими парами простых комплексных полюсов.

Здесь также используется **идея последовательного приближения**  $h(t)$  решением линейного дифференциального уравнения, поэтому предполагается, что **отрицательные вещественные части полюсов аппроксимирующей  $W(s)$  отличаются друг от друга примерно в  $1,5 \div 2$  раза**.

---



), (3.18)

Последовательность действий нахождения коэффициентов  $W(s)$  такова.

Из переходной функции  $h(t)$  (График) яется время чистого запаздывания  $T$  и затем определяется функция

$h_1(t) = C_0 - h(t)$ , которая разлагается в ряд

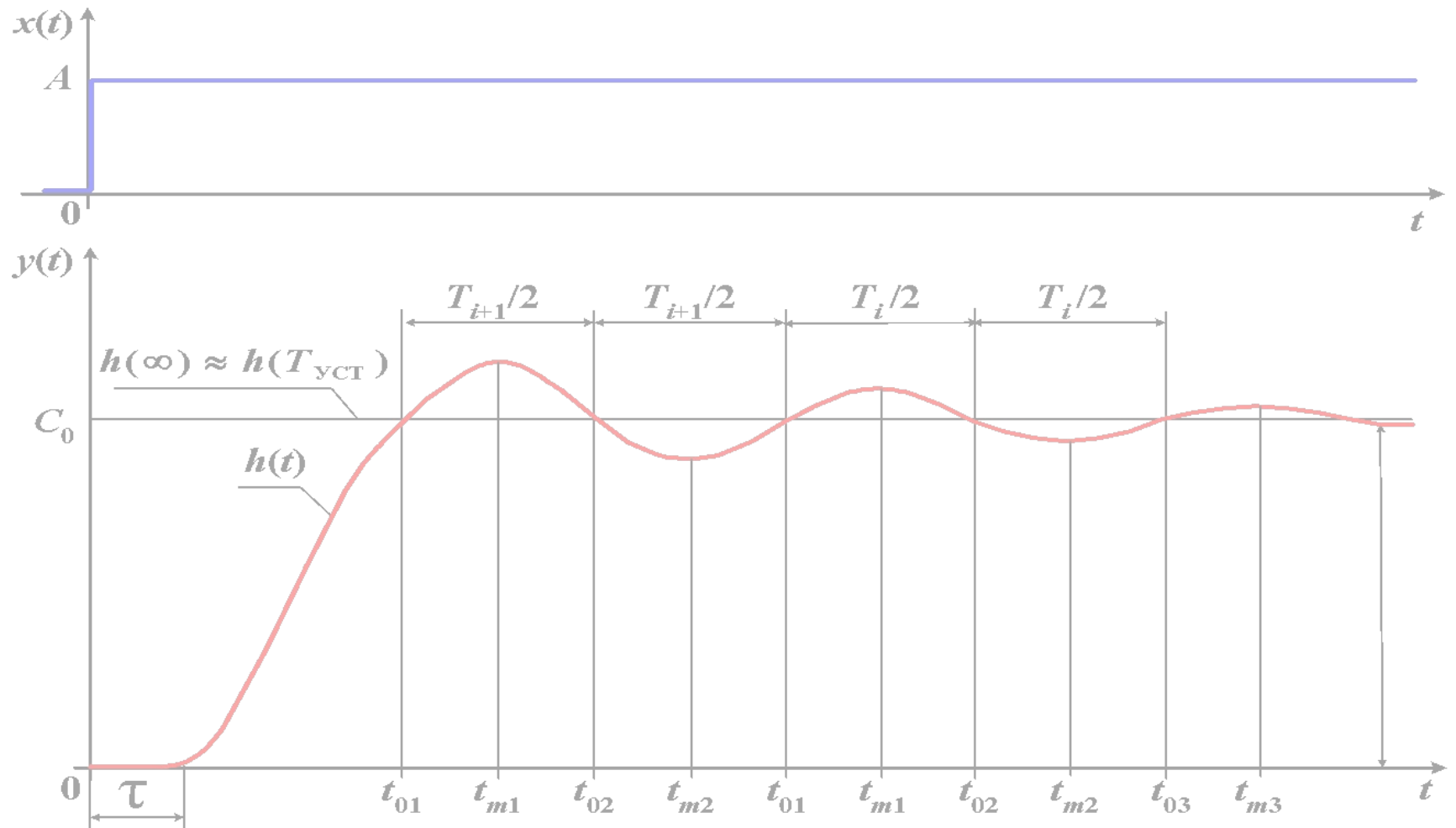
$$h_1(t) \approx \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \phi_i), \quad (3.18)$$

где  $\alpha_i$  – вещественная часть, а  $\beta_i$  – коэффициент при мнимой части комплексного корня  $s_i = \alpha_i + j\beta_i$  характеристического многочлена линейного дифференциального уравнения (ДУ) (2.2);  $\phi_i$  – фазовый сдвиг в экстремальных точках функции  $h(t)$ ;  $C_0 = h(\infty) \approx$

$h(T_{уст})$ .



# Переходная функция колебательного объекта



•

---

Как уже отмечалось, метод последовательного логарифмирования дает хорошие результаты, если выполняется условие

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} < 0,5; \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Полагая временно  $n = 1$  и учитывая, что величина  $\alpha_1$  - наименьшая из всех корней  $\alpha_i$ , напомним соотношение

$$h_1(t) \approx C_1 e^{-\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t + \phi_1),$$

которое обращается в равенство при  $t \rightarrow \infty$ , и при этом определению подлежат коэффициенты  $C_1, \alpha_1, \beta_1, \phi_1$ .

---



## График

Величина  $\beta_i$  находится достаточно просто, если известен период  $T_1$  колебаний  $h_1(t)$ , так как  $\beta_1 = 2\pi/T_1$ .

В точках  $t_{0g}$ ;  $g = 0, 1, 2, \dots$ , в которых функция  $h_1(t)$  проходит через нуль, справедливо равенство

$$\sin(\beta_1 t_{0g} + \phi_1) = 0,$$

что позволяет найти  $\phi_1 = -\beta_1 t_{0g} + g\pi$ ;  $g = 0, 1, 2, \dots$

### График

В точках  $t_{\text{э}g}$  при  $g = 0, 1, 2, \dots$  колебания  $h_1(t)$  достигают **экстремумов** (в точках  $t_{0g}$  график функции  $h_1(t)$  проходит через нуль, а в точках  $t_{\text{м}g}$  - через максимумы кривой) и, следовательно, можно написать, что

$$\sin(\beta_1 t_{\text{э}g} + \phi_1) = (-1)^g.$$





,

Для значений времени  $t = t_{\text{э}g}$  справедливо равенство

$$|h_1(t_{\text{э}g})| = |C_0 - h(t_{\text{э}g})| \approx C_1 e^{-\alpha_1 t_{\text{э}g}},$$

или после логарифмирования получим

$$\ln |h_1(t_{\text{э}g})| \approx \ln C_1 - \alpha_1 t_{\text{э}g}.$$

Построив в **полулогарифмическом масштабе** значения функции  $|h_1(t_{\text{э}g})|$ , определим **ИЗВЕСТНЫМ** способом  $C_1$  и  $\alpha_1$ .



),

Далее вычисляется функция «НЕВЯЗКИ»  $h_2(t_{эг})$ :

$$h_2(t) = h_1(t) - C_1 e^{-\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t + \phi_1)$$

учитывающая влияние других составляющих ряда, (3.18) на форму  $h(t)$ .

Наиболее медленно затухающей функцией будет

$$C_2 e^{-\alpha_2 t} \sin(\beta_2 t + \phi_2)$$

так как величина  $\alpha_2$  наименьшая из всех корней  $\alpha_i$ ;  $i = 2, 3, \dots, n$ .

Поэтому полагаем  $n = 2$  и получим:

$$h_2(t) \approx C_2 e^{-\alpha_2 t} \sin(\beta_2 t + \phi_2).$$



•

---

Коэффициенты  $C_2, \alpha_2, \beta_2, \phi_2$  определяются приемами, которые использовались для определения  $C_1, \alpha_1, \beta_1, \phi_1$ .

Процесс *последовательного приближения*  $h(t)$  решением дифференциального уравнения с простыми комплексными корнями продолжается до тех пор, пока очередная функция «**НЕВЯЗКИ**»  $h_i(t)$  не станет близка к **НУЛЮ**.

После аппроксимации  $h(t)$  рядом находится **(3.18)** образование Лапласа  $H(s)$  по формуле

$$H(s) = -e^{-st} \sum_{i=1}^n C_i \frac{\cos \phi_i + (s + \alpha_i) \sin \phi_i}{(s + \alpha_i)^2 + \beta_i^2} + \frac{C_0}{s}.$$



•

---

Далее записывается уравнение передаточной функции

$$W(s) = \frac{H(s)s}{A} \cdot$$

Если коэффициенты  $C_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\phi_i$  найдены достаточно точно, то должны выполняться следующие  $n$  «начальных условий»:

$$h(0) = -e \sum_{i=1}^n C_i \sin \phi_i + C_0 = 0;$$



;

---

$$h(0) = \sum_{i=1}^n C_i (-\alpha_i \sin \phi_i + \beta_i \cos \phi_i) = 0;$$

$$h'(0) = \sum_{i=1}^n C_i [(\alpha_i^2 - \beta_i^2) \sin \phi_i - 2\alpha_i \beta_i \cos \phi_i] = 0 \text{ и т.д.}$$

Определение некоторых коэффициентов опирается на знание периода колебаний функции  $h(t)$ , который **находится непосредственно из графика переходной функции.**

Для этого необходимо, чтобы переходная функция имела несколько (не менее двух или трех) периодов колебаний, что **бывает довольно трудно** получить при исследовании динамики промышленных объектов.



# 1

---

## Вывод.

Если достигнута требуемая **точность приближения математического описания** рассматриваемой переходной функции  $h(t)$ , то динамические свойства объекта можно описать передаточной функцией вида

$$W(s) = \frac{k}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}$$

с **простыми комплексными корнями** характеристического уравнения (полинома знаменателя).



### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ МЕТОДОМ «ПЛОЩАДЕЙ»

---

Пусть требуется по таблично или графически заданной переходной функции  $h(t)$  определить коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  при  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , а так же число  $n$  аппроксимирующей передаточной функции, для которой  $n$  является порядком полинома знаменателя  $W(s)$ , определяемой по формуле

$$W(s) = \frac{\prod_{i=1}^n b_i s^i + 1}{\prod_{i=1}^n a_i s^i + 1}.$$



(3.19)

Некоторые из коэффициентов  $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots$  могут быть равны нулю, так что всегда порядок числителя  $W(s)$  меньше или равен порядку знаменателя.

При рассмотрении данного метода будем использовать обратную передаточную функцию  $W^{-1}(s)$ , определяемую выражением

$$W^{-1}(s) = \frac{1}{W(s)} = \frac{\prod_{i=1}^n a_i s^i + 1}{\prod_{i=1}^n b_i s^i + 1} \quad (3.19)$$





*i*

Суть метода заключается в разложении функции

$$W^{-1}(s) = 1 + \sum_{i=1}^n \bar{a}_i s^i \quad (3.20)$$

в «усеченный» ряд по степеням  $s$  при  $s \rightarrow 0$  и последующем определении коэффициентов  $\bar{a}_i$  и порядка  $n$  путем последовательного приближения  $h^0(t)$  решениями линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Коэффициент  $\bar{a}_1$  находится из следующих соображений.

Вычислим площадь под кривой  $C_0 - h^0(t) = k - h^0(t)$ :



# T

$$S_1 = \int_0^{\infty} [k - h^0(t)] d_t = \lim_{m \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} [k - h^0(t)] d_t = \lim_{m \rightarrow 0} L\{k - h^0\}$$

где  $L\{k - h^0\}$  – преобразованная по Лапласу функция  $[k - h(t)]$ .

В то же время имеем:

$$L\{k - h^0\} = \frac{k}{s} - \frac{k}{W^{-1}(s)s} = \frac{W^{-1}(s) - 1}{W^{-1}(s)} \frac{k}{s} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{a}_i s^{i-1}}{W^{-1}(s)} k.$$



---

Предел последнего выражения при  $s \rightarrow 0$  равен  $k\bar{a}_1$ , поэтому получаем  $S_1 = k\bar{a}_1$ .

Введем аппроксимирующую переходную функцию  $h_1(t)$ , для которой передаточная функция определяется выражением

$$W_1^{-1}(s) = \frac{\bar{a}_1 s + 1}{k}.$$

Преобразование Лапласа функции  $h_1(t)$  имеет вид:

$$H_1(s) = \frac{k}{\bar{a}_1 s + 1} \frac{1}{s}.$$

Используя выражение для  $H_1(s)$ , найдем изображение функции  
**«НЕВЯЗОК»** :

$$L\{h_1(t) - h^0(t)\} = \frac{W^{-1}(s) - \bar{a}_1 s^{-1}}{(\bar{a}_1 s + 1)W^{-1}(s)} \frac{k}{s} = k \frac{\sum_{i=2}^n \bar{a}_i s^{i-1}}{(\bar{a}_1 s + 1)W^{-1}(s)}.$$



Площадь «второго порядка» равна:

$$S_2 = \int_0^{\infty} [h_1(t) - h^0(t)] dt = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \mathcal{L}\{h_1(t) - h^0(t)\} = k\bar{a}_2,$$

так как функция

$$\frac{1}{s} \mathcal{L}\{h_1(t) - h^0(t)\} = k \frac{\sum_{i=2}^n \bar{a}_i s^{i-2}}{(\bar{a}_1 s + 1)W^{-1}(s)}$$

стремится при  $s \rightarrow 0$  к величине

$$k\bar{a}_2$$



Далее вводится переходная функция  $h_2(t)$ , по аналогии находится  $\bar{a}_3$  и т.д.

В общем случае получаем зависимость для определения коэффициентов разложения  $\bar{a}_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$S_i = \int_0^{\infty} [h_{i-1}(t) - h^0(t)] d^i t = k \bar{a}_i; \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $h^0(\infty) = k = h^0(T_{уст})$  при единичном входном воздействии  $x(t) = 1$ .



**Практическое использование** последнего выражения затрудняется как сложностью вычисления  $S_i$ , так и появлением накапливающихся ошибок при неточном определении ординат  $h_i(t)$  и приближенном интегрировании.

Поэтому величины  $S_i$  обычно определяются по формуле

$$S_i = S_1^i \int_0^{\Gamma} [k - h^0(t)] \frac{(-\chi)^{i-1}}{(i-1)!} + \frac{(-\chi)^{i-2}}{(i-2)!} + e \frac{S_{i-1}^{i-1-g}}{S_1^{i-1-g}} \frac{(-\chi)^g}{g!} d\chi,$$

где

$$\chi = \frac{t}{S_1} = \frac{t}{\int_0^{\Gamma} [k - h^0(t)] dt}$$

# T

В частности, при  $n = 2$  имеем:

$$S_2 = S_1^2 \int_0^{\Gamma} [k - h^0(t)] (1 - \chi) d\chi,$$

а при  $n = 3$  получаем:

$$S_3 = S_1^3 \int_0^{\Gamma} [k - h^0(t)] \left[ \frac{1}{3} - 2\chi + \frac{\chi^2}{2} \right] d\chi.$$





*i*

Кoeffициенты исходной передаточной функции (3.19)  
связаны с величинами  $\bar{a}_i$  или, точнее, с «площадями»  $S_i$   
соотношением

$$a_i = \frac{S_i}{k} b_i + \sum_{g=1}^{i-1} b_g \frac{S_{i-g}}{k}; \quad i = 1, 2, \dots, 2n, \quad (3.21)$$

где некоторые  $b_i$  при  $i = n, n - 1, \dots$   
и всегда  $b_i, a_i$  при  $i = n + 1, n + 2, \dots, 2n$  равны нулю.



# Некоторые рекомендации при использовании метода «площадей»

В общем случае при определении коэффициентов  $W(s)$  методом «площадей» не накладывается особых ограничений на порядки числителя и знаменателя, однако разложение функции (3.20) может расходиться, что чаще всего имеет место при  $h(+0) = 0$ ,  $k(+0) \neq 0$  и т. д.

Для улучшения сходимости процесса следует заранее полагать:

$b_n = 0; b_{n-1} \neq 0$ , если  $h(+0) = 0$ , но  $k(+0) \neq 0$

$b_n = b_{n-1} = 0$ , если  $h(+0) = 0; k(+0) = 0$

при  $h(+0) = k(+0) = 0$ ;  $k(+0) \approx 0$  можно принимать  $b_n =$

$b_{n-1} = b_{n-2} = \dots = b_1 = 0$ .



;

---

Порядок передаточной функции  $n$  определяется по величинам «площадей» :

если  $S_i$  мало по сравнению с  $S_{i-1}$ , то  $n = i - 1$ ;

если  $S_i < 0$ , то  $n = i - 1$  и необходимо увеличить порядок числителя аппроксимирующей функции  $W(s)$ .

На практике чаще всего задаются следующими структурами передаточной функции  $W(s)$ :

$$W(s) = \frac{k}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + 1}; \quad W(s) = \frac{k}{a_2s^2 + a_1s + 1}$$

или

$$W(s) = \frac{b_1s + k}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + 1}.$$



(3.21)

**Метод «площадей» не связан с графическими построениями** и может быть применен для определения динамических характеристик по **недостаточно гладким** переходным функциям.

В этом случае требуется осуществить сглаживание лишь начального и конечного участков  $h(t)$ , так как именно по ним определяются порядок  $W(s)$  и величина  $k$ .

Процесс вычисления  $S_i$  и решения системы линейных алгебраических уравнений (3.21) легко **алгоритмизируется применительно к счету на компьютерах.**

Для  $n < 2 \div 3$  определение коэффициентов  $W(s)$  может быть проведено и вручную, хотя затраты времени на это в **несколько раз больше**, чем при использовании метода последовательного логарифмирования.



# Пример.

Рассмотрим пример определения коэффициентов передаточной функции (3.1) методом «площадей» по переходной функции, заданной таблицей 1 и изображенной на рисунке график б) - данные предыдущего примера.

- По виду  $h(t)$  можно предположить, что  $h(+0) = 0$ ;  $\dot{h}(+0) = 0$ ;  $\ddot{h}(+0) \approx 0$ , и поэтому порядок числителя передаточной функции принимается равным нулю.

- Для удобства вычисления «площадей» произведем нормировку переходной функции и воздействия  $x(t) = A/A = 1/1 = 1$ , т.е.  $x(t) \in 1(t)$ .  
$$h^0(t) = \frac{h(t)}{1(t)}$$



*мин .*

- Затем одним из известных методов численного интегрирования находим величину

$$S_1 = \int_0^{42} [1 - h^0(t)] dt = 8,357 \text{ мин.}$$

В нашем примере  $S_1$  вычислялось по формуле Симпсона с помощью компьютера.

- Произведем изменение масштаба времени  $\chi = t / 8,357$ .

При  $0 \leq t \leq 42$  получим  $0 \leq \chi \leq 5,025$ .

- Далее по приведенным выше формулам находим  $S_2 = 15,631 \text{ мин}$  и  $S_3 < 0$ .



- Так как ни по виду начального участка  $h(t)$ , ни из анализа физических процессов, происходящих в исследуемом объекте, не следует, что надо увеличивать порядок числителя передаточной функции, то прекращаем вычисление «площадей» и находим коэффициенты

$$\bar{a}_1 S_1 = 8,357 \text{ мин}; \quad \bar{a}_2 S_2 = 15,631 \text{ мин.}$$

Здесь  $k = 1$ ;  $\bar{a}_1$  и  $\bar{a}_2$  – коэффициенты **нормированной** передаточной функции

$$W(s) = \frac{k}{a_2 s^2 + a_1 s + 1} = \frac{1}{15,631 s^2 + 8,357 s + 1},$$



- 
- Переходим от нормированной передаточной функции к обычной функции  $W(s)$ :

$$W(s) = W(s) \frac{h(T_{уст})}{A} = \frac{100}{15,631s^2 + 8,357s + 1}$$

или с учетом заранее выделенного запаздывания  $\tau = 3 \text{ мин}$  получим

$$W(s) = \frac{100e^{-3s}}{15,631s^2 + 8,357s + 1}$$



• **Выводы к примеру.**

Значения функции  $y(t)$ , являющейся решением дифференциального уравнения

$$15,631 y'(t) + 8,357 y(t) + y(t) = 100x(t - 3)$$

при нулевых начальных условиях и когда  $x(t) = 1$  при  $t > 0$  и  $x(t) = 0$  при  $t < 0$  с приемлемой для практики точностью совпадают со значениями  $h(t)$ , приведенными в таблице 1.

Относительная ошибка не превышает долей процента.



## 4. АПРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

---

При использовании данного метода **предполагается**, что динамические свойства промышленного объекта приближенно описываются передаточной функцией следующего вида:

$$W(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad \text{ил} \quad W(s) = \frac{k e^{-s\tau}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}, \quad (3.22)$$

и

где **T** – время чистого запаздывания;

**k** – коэффициент усиления объекта;

**T<sub>1</sub>** и **T<sub>2</sub>** – коэффициенты (параметры объекта), называемые постоянными времени.



; (3.23)

Следовательно переходная функция объекта  $h(t)$  должна быть аппроксимирована решением линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$h(t) = h(\Gamma) \frac{3}{И} \left[ -\frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \frac{Ц}{Ч} \frac{Ш}{Ч'} \quad (3.23)$$

$$h(t) = h(\Gamma) \frac{3}{И} \left[ -\frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t-\tau}{T_2}} \right] \frac{Ц}{Ч} \frac{Ш}{Ч'} t \text{ и } \tau.$$



(3.22)

Так как время чистого запаздывания  $T$  и коэффициент усиления  $k$  определяются обычными приемами по переходной функции, то во всех методах, которые будут рассматриваться далее, *ставится задача нахождения  $T_1$  и  $T_2$ .*

**Совершенно понятно**, что далеко не все переходные функции можно аппроксимировать подобными выражениями с **приемлемой точностью**.

Вместе с тем большой опыт автоматизации различных промышленных объектов показывает, что весьма часто их динамические свойства «В **И** **М**» можно описать в первом приближении выражениями типа **(3.22)**, **достаточно удобными для выполнения вручную расчетов систем автоматического регулирования.**



%,

Заранее заданная структура передаточной функции (3.2) - всегда вызывает сомнения в справедливости подобной аппроксимации.

Поэтому после нахождения неизвестных  $T_1$  и  $T_2$  всегда требуется вычисление нескольких значений  $h(t)$  по формуле (3.2) при разных  $t$  и сравнении их с ординатами экспериментальной переходной функции  $h_3(t)$ .

Относительную ошибку аппроксимации определяют по формуле

$$\delta_g = \frac{h(t_g) - h_3(t_g)}{h_3(T_{уст})} \cdot 100 \%$$

где  $g$  – номер опыта,  $g = 1, 2, \dots, q$ ;  $q$  обычно не более  $5 \div 6$ .



(3.22)

---

Если величина  $\delta_g$  не превышает  $2 \div 3\%$ , то можно считать допустимой аппроксимацию динамических свойств данного промышленного объекта передаточной функцией (3.22).

Определение постоянных времени объекта  $T_1$  и  $T_2$  может осуществляться:

- с помощью **графических построений**;
- **интерполяционными** методами;
- **аппроксимацией** переходной функции асимптотами.

*Рассмотрим наиболее распространенные методы для определения коэффициентов дифференциального уравнения второго порядка по переходной функции объекта.*



## 4.1. Определение постоянных времени объекта $T_1$ и $T_2$ с помощью графических построений

### Методика определения параметров объекта.

- Исходная переходная функция нормируется путем деления на величину  $h(T_{уст}) \approx h_\infty$  :

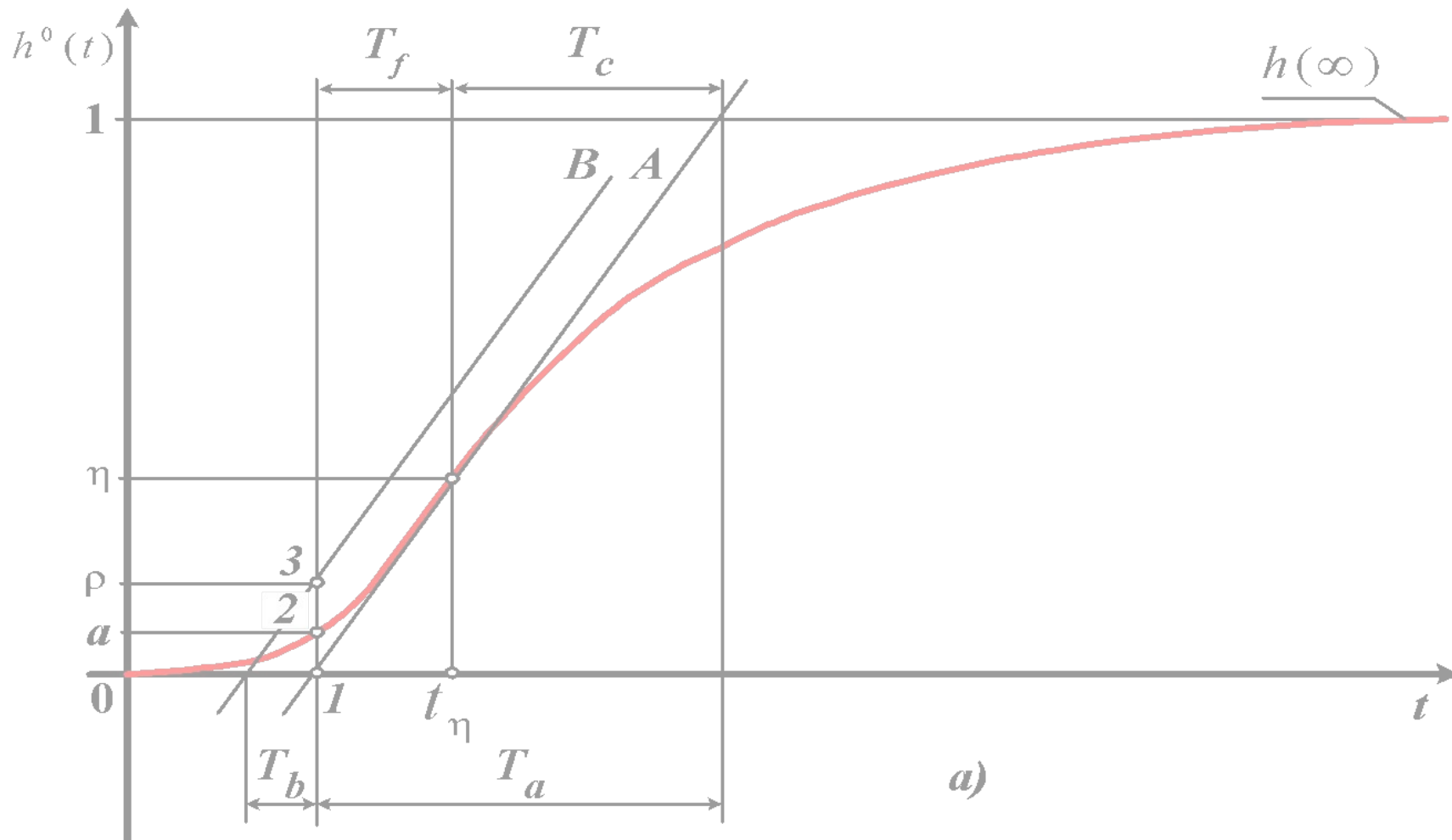
$$h^0(t) = \frac{h(t)}{h(T_{уст})}.$$

- На **графике** **а)** переходной функции  $h_0(t)$  определяется точка перегиба  $\eta$ , через которую проводится касательная до пересечения с осью абсцисс и линией  $h(T_{уст}) \approx Ak$  или просто  $h(T_{уст}) = k$ , если мы имеем дело с единичной переходной функцией.

Под точкой перегиба  $\eta$  здесь понимается такая точка переходной функции  $h(t)$ , в которой производная  $dh(t)/dt$  имеет максимальное значение.

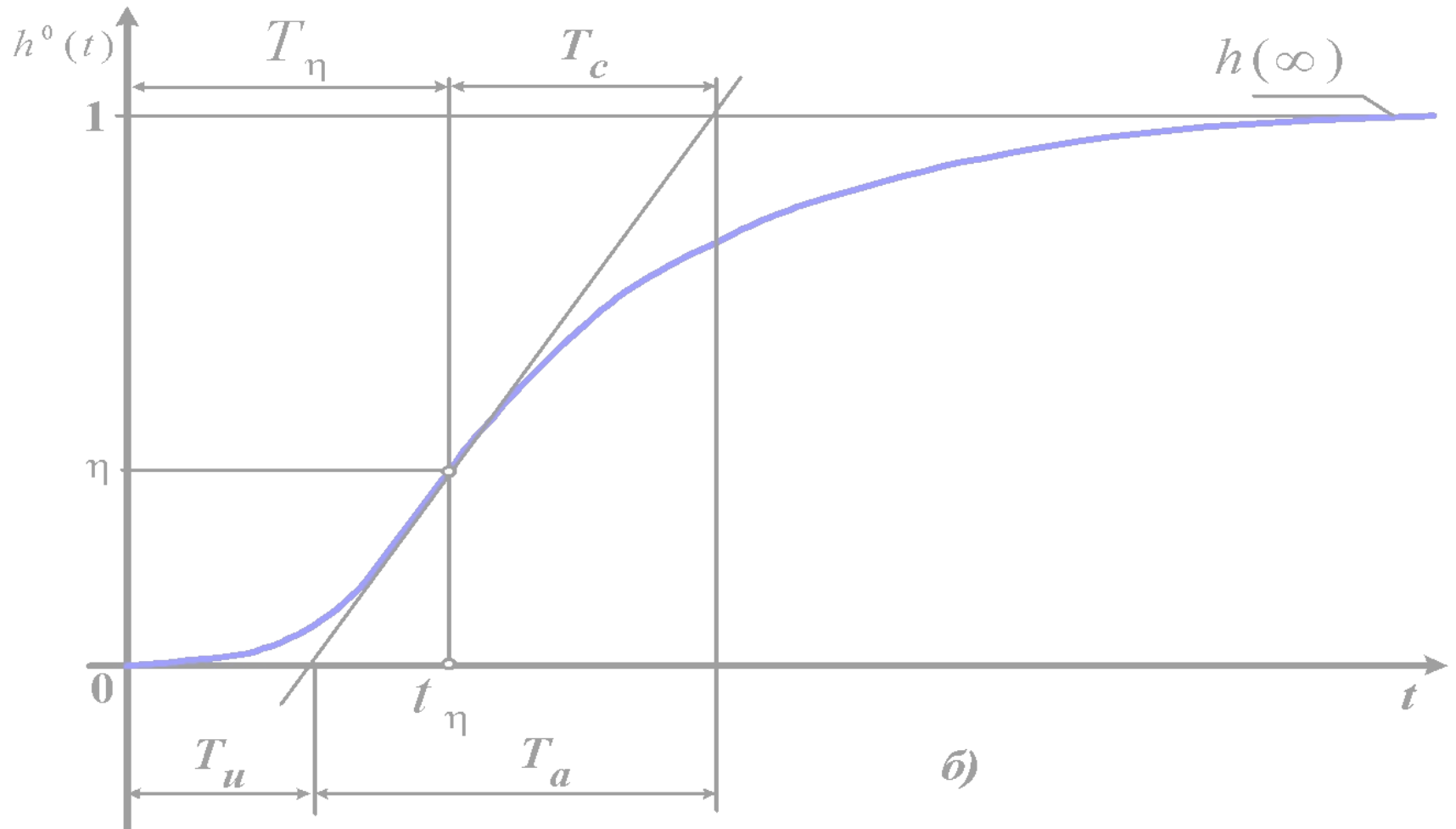


# Определение коэффициентов дифференциального уравнения второго порядка с помощью графических построений





# График б)



---

Так как переходные функции многих промышленных объектов не имеют явно выраженной точки перегиба, то определение ее координат надо осуществлять следующим образом.

- В средней, наиболее быстро изменяющейся части графика берется несколько ординат  $h(t_g) = h_g; g = 0, 1, 2, \dots, q; q$  обычно не более  $6 \div 7$  с интервалом  $\Delta t = t_g - t_{g-1} = \text{const}$  и вычисляются первые разности

$$\Delta h_g = h_g - h_{g-1}; g = 0, 1, 2, \dots, q-1.$$

- Далее находятся максимальная величина  $\Delta h_g$  и соответствующее ей значение времени  $t_\eta = t_g - 0,5\Delta t$  и, наконец, ордината  $h_\eta$ , через которую проводят касательную к  $h^0(t)$ .



- Далее возможны два варианта определения постоянных времени объекта  $T_1$  и  $T_2$ .
- В первом варианте из графика  $h(t)$  непосредственно находятся величины  $T_f$ ,  $T_c$  и  $T_a$ .
- Затем из точки 1 пересечения касательной  $A$  с осью абсцисс восстанавливается перпендикуляр, определяется точка 2 с ординатой  $a$  и точка 3 со значением  $\rho$ , которое определяется по формуле

$$\rho \approx a_{\text{к}}^{2,7} + \frac{0,5}{1 + (15^3 a)^{-3}}$$



[

- Через точку **3** проводится прямая линия **B**, параллельная касательной **A**, и находится время  **$T_b$** .
- Предположив, что  **$T_2 < T_1$** , вычисляют их значения из **эмпирических соотношений**:

$$T_2 = T_b \left[ 1 + 10a + 1,73(30a)^2 \right]^2 \text{ при } a \leq 0,005;$$

$$T_2 = (T_b + T_f) \frac{M}{H} - 200(0,03 - a)^2 + 30,086 + \frac{0,0015}{0,03 - a} \frac{H}{M} \text{ при } a > 0,005;$$

$$T_1 = T_c - T_2.$$



из графика б)

- Во втором варианте из графика б) или  $h(t)$  находятся

величины  $T_u, T_a, T_\eta, T_c$  и с помощью номограмм определяются  $T_1$  и  $b$ , где  $T_1 = T_2 b$ .

- Более удобно определить постоянные времена  $T_1$  и  $T_2$  можно с помощью других номограмм.
- Для этого, обозначим отношение

$$T_2/T_1 = \chi, \text{ где } T_2 < T_1; 0 < \chi < 1$$

и запишем два уравнения:

$$T_c = T_1 + T_2 = (1 + \chi)T_1; \quad T_a = T_1 \frac{\chi}{1 - \chi} \frac{1 - \chi}{\chi},$$

получаемые из формул

(3.23)



## номограммам

- По известной величине отношения  $T_c$  к  $T_a$ , находящейся в интервале значений  $0,73 \leq T_c/T_a \leq 1,0$ , и по **номограммам** - определяем координаты двух точек пересечения линии  $T_c/T_a = \text{const}$  (линии под углом  $-45^\circ$  к оси абсцисс) и кривой  $L$ .
- Далее по координатам любой из этих точек пересечения можно найти величины  $T_1$  и  $T_2$ .



# Достоинства и недостатки метода

**Недостатки рассмотренных графических методов аппроксимации переходной функции решением уравнения второго порядка ОЧЕВИДНЫ:**

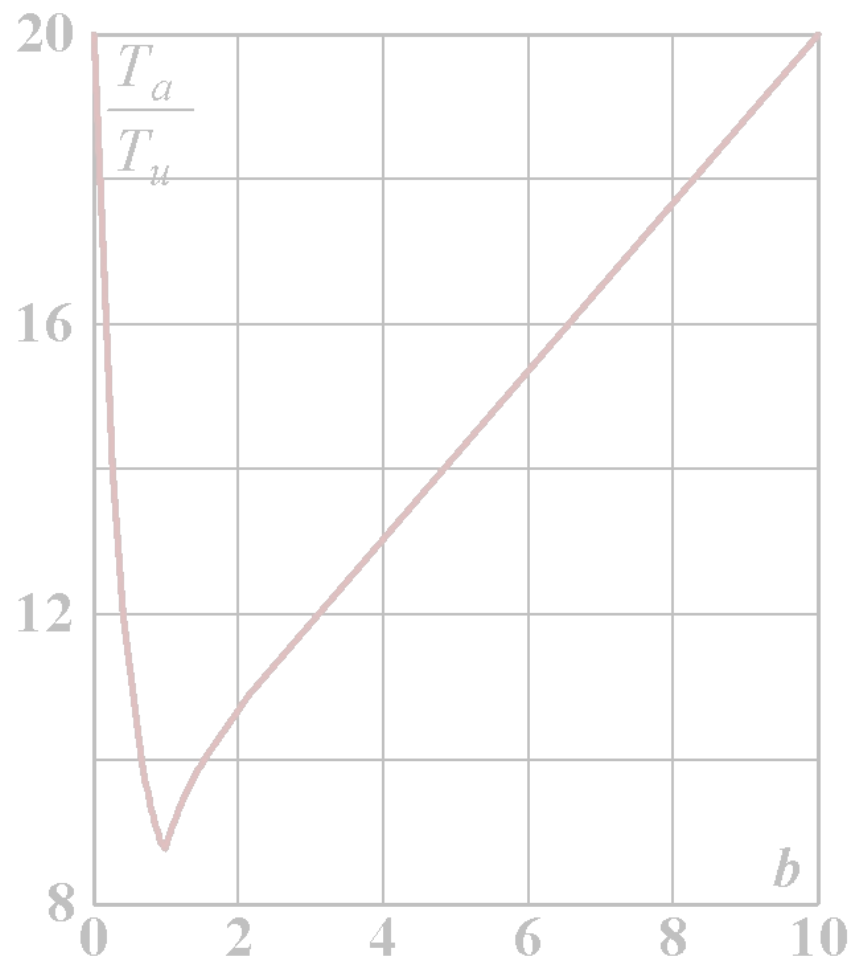
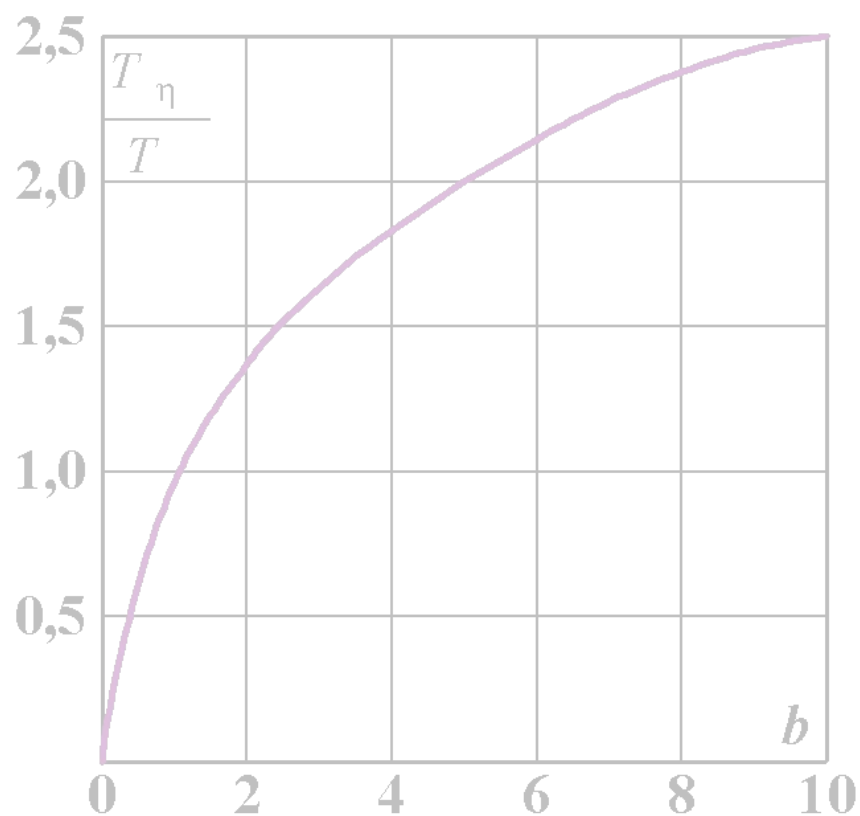
- не всегда можно определить точку перегиба  $h(t)$ ;
- проведение касательной связано с субъективными ошибками определения  $T_1$  и  $T_2$ ;
- по существу не учитываются форма и характер всей остальной переходной функции.

**Вместе с этим следует признать, что графические методы:**

- очень просты в применении;
- требуют мало времени для нахождения постоянных времени  $T_1$  и  $T_2$ .

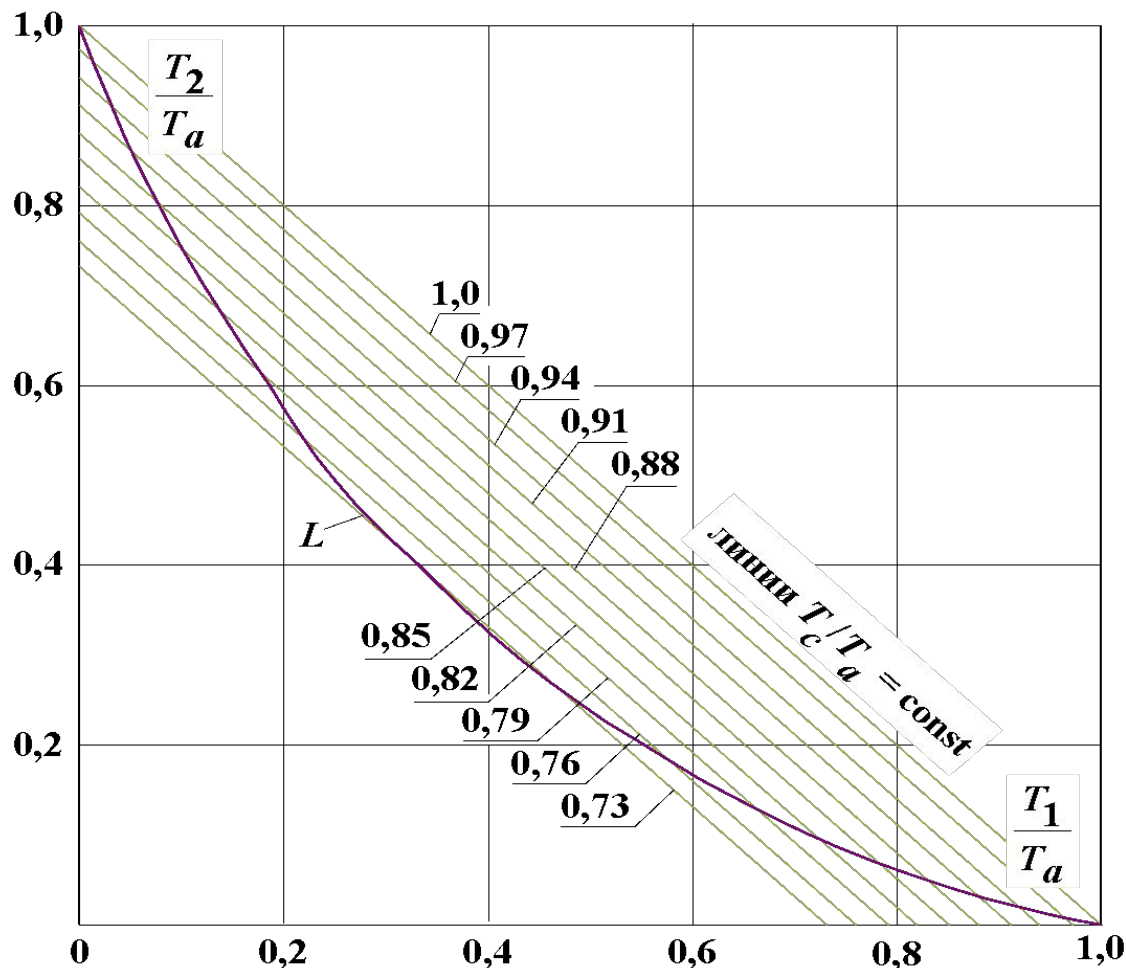


# Номограммы для определения коэффициентов дифференциального уравнения





# Номограммы для нахождения постоянных времени $T_1$ и $T_2$ по Ольденбургу и Сарториусу



# Пример.

Рассмотрим пример нахождения  $T_1$  и  $T_2$  по переходной функции  $h^0(t)$ , показанной на **рисунке** с помощью рассмотренных вариантов метода.

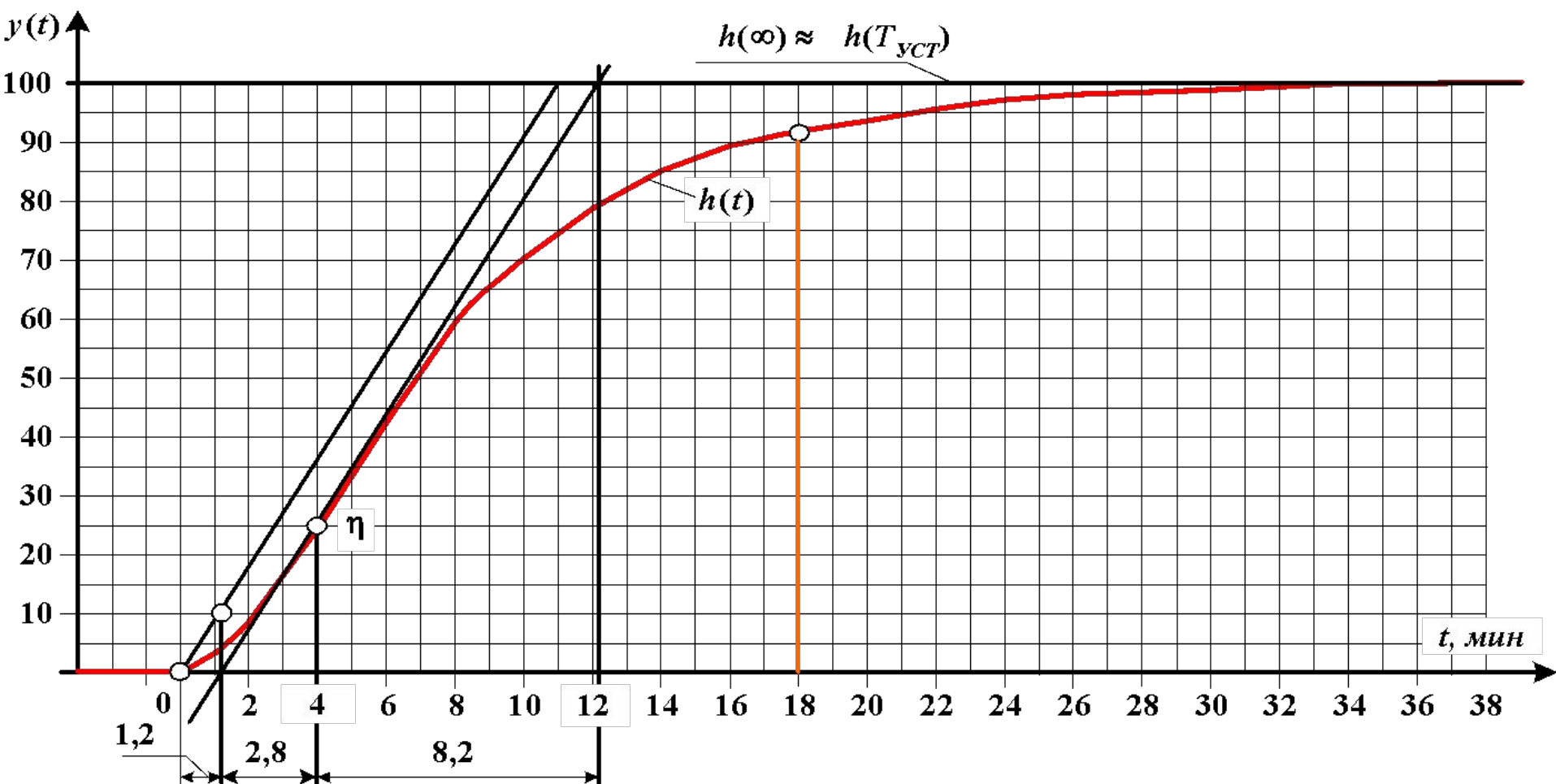
- Определить точку перегиба визуально довольно трудно, поэтому вычислим первые разности  $\Delta h_g$  на участке времени  $0 \div 12$  мин, т. е. там, где скорость изменения переходного процесса максимальна.

Получим следующие значения  $\Delta h_g$  при соответствующих  $t_g$  с шагом  $\Delta t = 2$  мин:

$t_g$	0	2	4	6	8	10	12
$h_g$	8,7	16,8	18,0	15,0	11,5	8,5	6,0



# График переходной функции к примеру определения динамических характеристик объекта



## график

- В качестве точки перегиба  $\eta$  переходной функции следует взять точку с координатами  $\{4 \text{ мин}, 0,25\}$  график

- Проведем касательную через точку  $\eta$  и найдем величины

$$T_{\eta} \approx 4 \text{ мин}; T_f = 2,8 \text{ мин}; T_c = 8,2 \text{ мин}; T_a = 11 \text{ мин};$$

$$T_b = T_u = 1,2 \text{ мин.} \quad \text{график}$$

$$\frac{T_a}{T_u} = \frac{11}{1,2} = 9,2$$

- Вычисляем отношение  $\frac{T_a}{T_u}$  по номограмме и по  $\frac{b_{II}}{b_I}$  находим:

$$b_I = 0,8, b_{II} = 1,8.$$

- Затем по номограмме определяем величины  $T_I, T_{II}$ , соответствующие  $b_I$  и  $b_{II}$ .



(3.23)

Получаем:  $\frac{T_{\eta}}{T_I} = \frac{4}{T_I} = 0,8$  и  $T_I = 5 \text{ мин}$ ;  $\frac{T_{\eta}}{T_{II}} = \frac{4}{T_{II}} = 1,2$   
и  $T_{II} = 3,33 \text{ мин}$ .

- Полагая постоянную времени  $T_1$  равной  $T_I$  или  $T_{II}$  и учитывая, что  $T_1 = bT_2$ , находим две передаточные функции:

$$W_I(s) = \frac{100}{(4s+1)(5s+1)}; \quad W_{II}(s) = \frac{100}{(3,33s+1)(6s+1)}$$

- Определить, какая из двух передаточных функций более точно описывает динамические свойства объекта, (3.23) — лишь путем вычисления ряда значений  $h(t)$  по формуле и сравнения их с ординатами переходной функции.



---

Подобный просчет и сравнение для данного примера показывают, что при малых значениях времени  $0 \leq t \leq 6$  мин лучшее приближение дает вариант II ( $T_1 = 3,33$  мин;  $T_2 = 6,0$  мин), при больших величинах  $t$  – вариант I ( $T_1 = 4$  мин;  $T_2 = 5$  мин).

Так как нам неизвестна область частот, в которой следует наиболее точно определять значения АФХ, то практически можно использовать любую из полученных передаточных функций.



1139,

- 
- Для определения  $T_1$  и  $T_2$  другим способом по **графику** определим величину  $a \approx 0,035$  и вычислим значение

$$\rho = 0,035 \frac{\text{Й}}{\text{К}} 2,73 + \frac{0,53}{1 + (150 \text{ Ч} 0,035)^{-3}} \frac{\text{Щ}}{\text{Ъ}} = 0,1139,$$

после чего восстановим перпендикуляр высотой  $\rho \approx 0,1$  из точки пересечения касательной с осью абсцисс.

- Проведем через вершину перпендикуляра прямую линию, параллельную касательной, и найдем величину  $T_b = 1,2$  **мин.**



;

- Далее вычислим  $T_2$  и  $T_1$ :

$$T_2 = (1,2 + 2,8) \frac{\text{М}}{\text{Н}} - 200(0,032 - 0,035) \frac{\text{Й}}{\text{Л}} + \frac{\text{Ж}}{\text{И}} 30,086 + \frac{0,0015}{0,032 - 0,035} \frac{\text{Ц}^{-1} \text{Ш}^{-1} \text{Ъ}}{\text{Ч} \text{Ь} \text{Э}} = 3,144 \text{ ми};$$

$$T_1 = 8,2 - 3,144 = 5,086 \text{ мин.}$$

- Передаточная функция имеет вид:

$$W_I(s) = \frac{100}{(3,144s + 1)(5,086s + 1)}.$$





## номограмме

Для нахождения постоянных времени **методом Ольденбурга и**

**Сарториуса** вычисляем отношение  $\frac{T_c}{T_a} = \frac{8,2}{11,0} = 0,746$  и по

номограмме определяем  $\frac{T_2}{T_a} = \frac{T_2}{1} = 0,46$  и  $\frac{T_1}{T_a} = \frac{T_1}{11} = 0,275$

Отсюда получаем  $T_1 = 3,015$  мин и  $T_2 = 5,12$  мин, и передаточная функция объекта будет:

$$W_I(s) = \frac{10}{(3,01 s + 1)(5,1 s + 1)}$$



## 4.2. Определение постоянных времени

### $T_1$ и $T_2$ интерполяционными методами

---

Это весьма **многочисленная группа методов** нахождения динамических характеристик объекта, основанная на измерении нескольких значений  $h(t)$  и составлении интерполяционных уравнений с двумя-тремя неизвестными.

*Решение уравнений осуществляется чаще всего графическими способами из-за наличия в них трансцендентных членов.*

Рассмотрим наиболее полно разработанную **методику аппроксимации по Орманну**.



(3.23)

Обозначим:  $T_1 + T_2 = T$ ;  $\bar{t} = t/T$ ;  $\bar{T}_1 = T_1/T$ ;  $\bar{T}_2 = T_2/T$ ;

$\bar{\tau} = \tau/T$  и, разделив  $h(t)$  на  $h_\infty \approx h(T_{уст})$ , преобразуем выражение (3.23) к виду:

$$h^0(t) = 1 - \frac{\bar{T}_1}{\bar{T}_1 - \bar{T}_2} e^{-\frac{\bar{t} - \bar{\tau}}{\bar{T}_1}} + \frac{\bar{T}_2}{\bar{T}_1 - \bar{T}_2} e^{-\frac{\bar{t} - \bar{\tau}}{\bar{T}_2}} \quad (3.24)$$



По графику кривой  $h^0(t)$  определяются величины  $h_4^0, h_8^0, h_{20}^0$ , являющиеся ординатами  $h^0(t)$  при соответствующих аргументах  $t = t_4, t_8, t_{20}$ , а также  $t_1, t_3, t_5, t_7$  – значения времени  $t$  в моменты равенства функции  $h^0(t)$  величинам **0,1; 0,3; 0,5 и 0,7** соответственно.

**Далее возможны четыре варианта аппроксимации.**

При аппроксимации переходной функции решением дифференциального уравнения второго порядка **без запаздывания** вначале вычисляются величины  $T \approx t_7/1,2$  и  $t_4 = 0,4T = t_7/3$  и по графику  $h(t)$  – ордината  $h_4^0$ .



Соотношение  $T \approx t_7/1,2$  получено эмпирическим путем, так как при различных соотношениях  $T_1$  и  $T_2$  оказалось, что равенство  $h^0(t_7) = 0,7$  имеет место почти при одном и том же значении  $t_7$ , равном  $1,2 \pm 0,015$ , что показано на графике  $t_7 = f(z^2)$ .

Зная по  $h_4^0$  номограмме можно определить величину  $z^2$ , связанную с искомыми постоянными времени соотношениями:

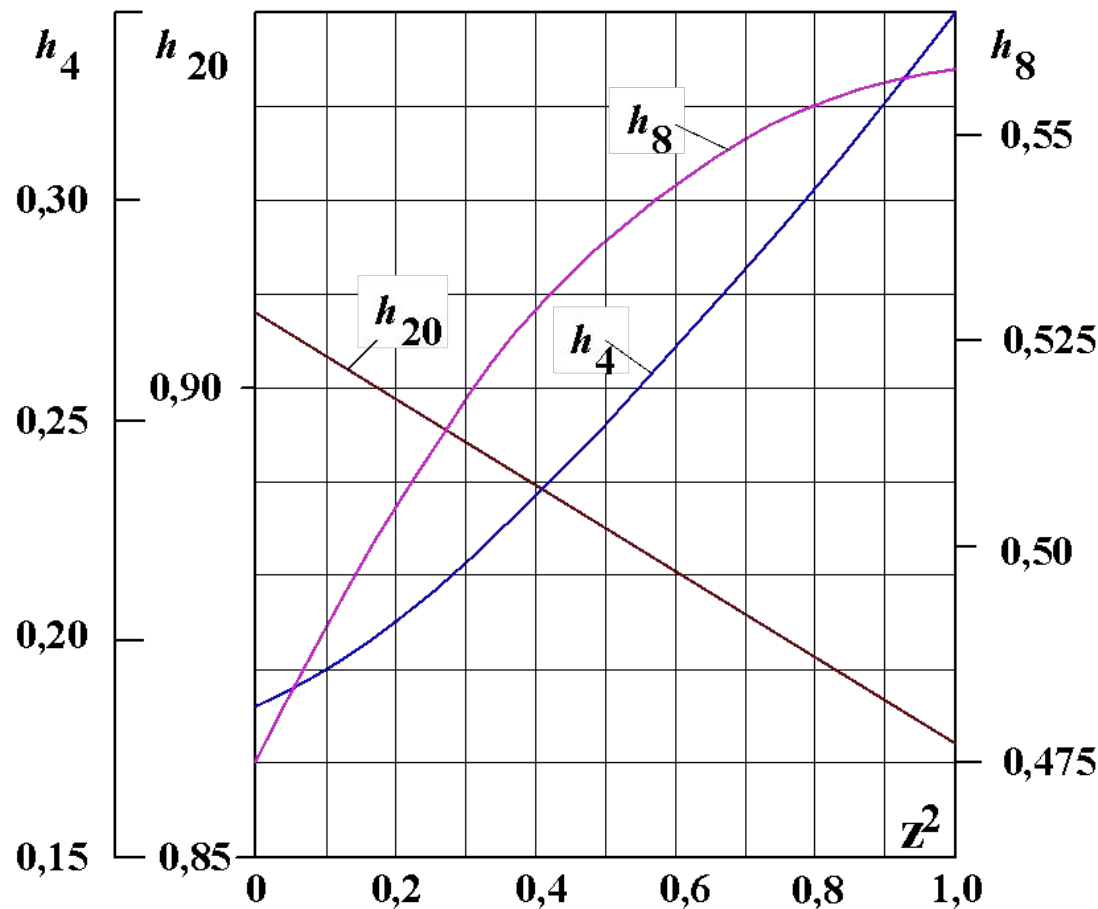
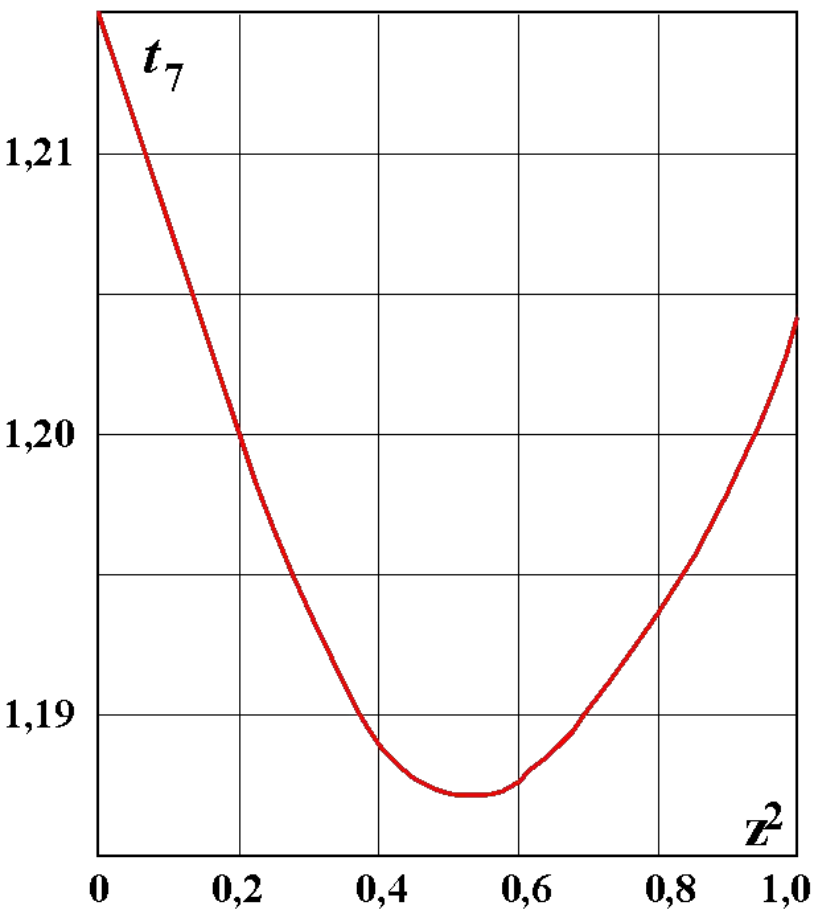
$$T_1 = \frac{t_7}{2,4} (1 + z); \quad T_2 = \frac{t_7}{2,4} (1 - z).$$



# Зависимость

$$t_7 = f(z^2)$$

# Номограмма для нахождения коэффициентов дифференциального уравнения интерполяционным методом



Проверка справедливости аппроксимации заданной функции  $h(t)$  выражением (3.24)  $\tau = 0$  выполняется путем определения по найденной величине  $z$  значений  $h_2^0$   $h_8^0$  и сравнением их с ординатами переходной функции при  $t = t_{20} = 2T$  и  $t = t_8 = 0,8T$ .

Если ошибка аппроксимации превышает  $2 \div 3\%$  или  $h_{0,19}^0$ , то надо полагать  $\tau \neq 0$ .



Во втором варианте метода Орманна определяются неизвестные величины  $T_1$ ,  $T_2$  и  $\tau$ .

Из графика нормированной переходной функции  $h^0(t)$  находятся время  $t_7$ , являющееся корнем уравнения  $h^0(t_7) = 0,7$ , а также величина  $t_4$ , удовлетворяющая равенству  $h^0(t_4) = 0,191$ .  $t_4 \approx t_7 / 3$

Если  $t_4$  и  $t_7$  известны, то имеем эмпирическое соотношение:

$$\tau \approx \frac{3t_4 - t_7}{2}$$

из которого находим





Далее все операции по определению  $T_1$  и  $T_2$  выполняются по первому варианту, однако всюду вместо времени  $t$  подставляется новая переменная  $t^* = t - \tau$ .

При проверке может оказаться, что  $h_8^0$  и  $h_2^0$  существенно отличаются от соответствующих экспериментальных значений.

*В этом случае необходимо аппроксимировать  $h(t)$  решением дифференциального уравнения второго порядка с кратными корнями.*

При  $h_4^0 > 0,33$  переходная функция может быть аппроксимирована решением дифференциального уравнения **первого порядка с запаздыванием**.



# Пример.

Из **график**  
а находим  $t_7 = 10$  мин и определяем:

$$T = \frac{t_7}{1,2} = \frac{10}{1,2} = 8,333 \text{ ми} \quad t_4 = 0,4T = 0,4 \cdot 8,333 = 3,333 \text{ мин.}$$

По нормированной функции  $h^0(t)$  находим

$$h_4^0(t_4) = h_4^0(3,33) = 0,19, \text{ а по } \text{номограмме} \text{ — величину } z^2 = 0,04 \text{ (соответственно } z = 0,2).$$

Далее вычисляем постоянные времени  $T_1$  и  $T_2$ :

$$T_1 = \frac{10}{2,4} (1 + 0,2) = 5,0 \text{ ми} \quad ; \quad T_2 = \frac{10}{2,4} (1 - 0,2) = 3,333 \text{ ми} .$$

*н* *н*



Для проверки по этой же номограмме определяем

$h_2^0 = 0,9055$  и  $h_8^0 = 0,4825$  при  $z^2 = 0,04$ .

Из графика переходной функции имеем:

$$h^0(t_{20}) = h^0(2T) = h^0(2 \cdot 8,333) = 0,897;$$

$$h^0(t_8) = h^0(0,8 \cdot T) = h^0(0,8 \cdot 8,333) = h^0(6,6664) = 0,49.$$

Относительные ошибки приближения не превышают **одного процента**, и поэтому динамику объекта можно описать передаточной функцией следующего вида:

$$W(s) = \frac{100}{(5s + 1)(3,333s + 1)}.$$



# Достоинства и недостатки интерполяционных методов

Аппроксимация переходных функций решением уравнения тиг (3.24) с помощью интерполяционных приемов обладает **положительными свойствами:**

- измерение  $h(t)$  в нескольких точках увеличивает информацию о характере переходного процесса;
- использование приближенного соотношения  $t_7 \approx 1,2(T_1 + T_2)$  делает операцию интерполяции **нестрогой** и в некотором смысле - **эквивалентной приближению.**

## Недостатки методов:

- заранее фиксированные значения узлов интерполяции **НЕ ВСЕГДА** позволяют осуществлять аппроксимацию таблично заданных переходных функций;
- переходные функции должны быть **гладкими.**



## 5. Аппроксимация переходной функции решением дифференциального уравнения первого порядка

---

*Большинство динамических объектов нефтяной и газовой промышленности можно с достаточной точностью описать передаточной функцией апериодического звена первого порядка.*

Если экспериментально получен **график** изменения выходной величины  $y(t)$  при единичном входном воздействии  $1(t)$ , то его можно (исходя из эвристических соображений) аппроксимировать аналитическим выражением вида:

$$y(t) = k(1 - e^{-t/T}).$$



(2.9)

---

Изображение  $Y(s)$  по Лапласу функции  $y(t)$  можно определить по таблицам преобразования Лапласа или, используя формулу прямого преобразования Лапласа.

Получим:

$$Y(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}.$$

Используя формулу (2.9) дающую связь между выходной координатой объекта и входной с учетом, что  $X(s) = L\{1(t)\} = 1/s$ , получим выражение передаточной функции:



---

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = sY(s) = \frac{sk}{s(Ts+1)} = \frac{k}{Ts+1}. \quad (3.25)$$

Коэффициент  $k$  представляет собой отношение между установившейся величиной выходного сигнала и амплитудой входного сигнала.

Постоянная времени  $T$  системы первого порядка равна отрезку времени, за которое переходная функция достигает **63%** своей установившейся величины.

графи  
к

## график

Если провести касательную к графику переходной функции на начальном участке до точки пересечения с уровнем установившейся величины  $h(t)$ , то полученный отрезок времени будет соответствовать значению  $T$ , так как наклон кривой  $y(t)$  при  $t = t_1 = 0$  равен

$$\left. \frac{d y(t)}{d t} \right|_{t=0} = \frac{k}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = k / T.$$

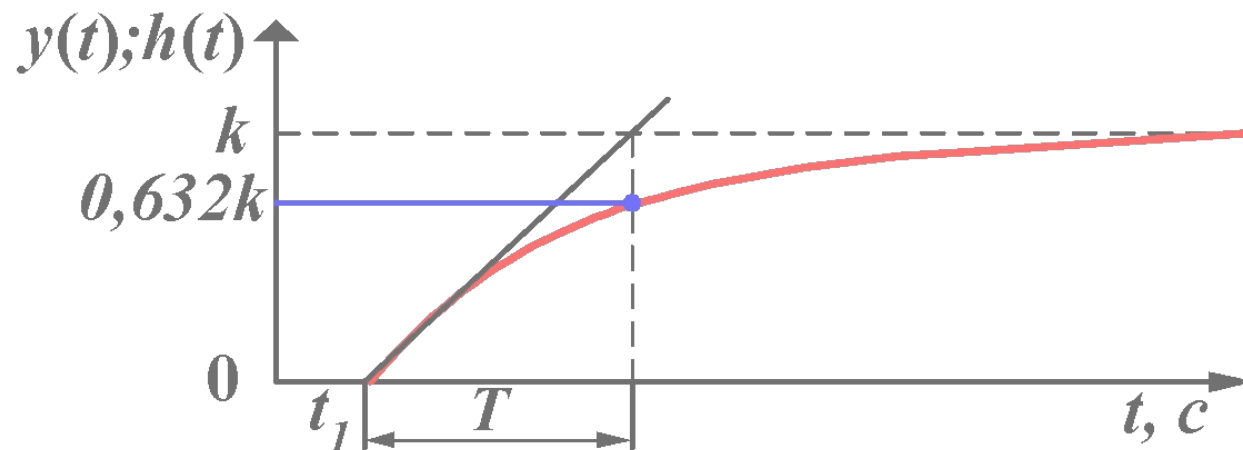
При  $t = T$  наклон достигает величины  $k$ .

графи  
к





# Переходная характеристика системы первого порядка



## 6. Аппроксимация переходной функции решением дифференциального уравнения первого порядка с запаздыванием

Если переходная функция запаздывает на время  $\tau$ , т.е. равна 0 в течение промежутка времени  $\tau$  после приложения ступенчатого воздействия, то система имеет чисто временное запаздывание, для которого преобразование Лапласа **графи** есть  $e^{-\tau s}$ .

Решение **к** линейного дифференциального уравнения первого порядка с запаздывающей правой частью и нулевыми начальными условиями будет:

$$h(t) = 0; \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$h(t) = h(\Gamma) \left[ 1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}} \right]; \quad t > \tau. \quad (3.26)$$



(3.27)

,

Аппроксимирующая передаточная функция будет иметь вид:

$$W(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{Ts + 1}, \quad (3.27)$$

Коэффициент усиления  $k$  находится обычным способом:

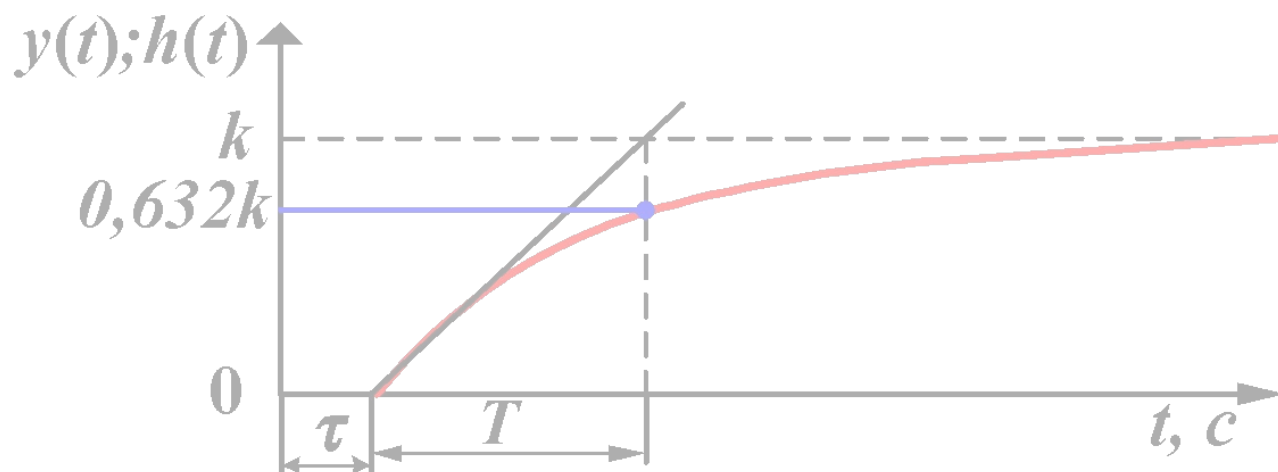
$k = h(T_{уст})/A$  или  $k = h^0(T_{уст})$ , если имеем дело с единичной функцией.

Постоянная времени  $T$  и время запаздывания  $\tau$  подлежат определению из экспериментальной переходной функции  $h(t)$ .

графика



# Переходная характеристика системы первого порядка с запаздыванием



## график

Если при определении значений  $T$  и  $\tau$  по графику переходной функции возникают определенные трудности, то применяют **интерполяционный метод** для их нахождения.

**Интерполяционный метод** заключается в следующем.

На нормированной переходной функции ( )  
 $h^0(t) = h(t)/h(T_{уст})$  выбираются две точки **А** и **В** с координатами  $h_A, t_A$  и  $h_B, t_B$ .

Желательно, чтобы точка **А** была расположена около точки перегиба, а ордината  $h_B$  равнялась  $0,8 \div 0,9$ .

Рассматривая точки **А** и **В** как интерполяционные узлы кривой, определяют неизвестные величины по формулам:



$$\tau = \frac{t_B \ln(1 - h_A^0) - t_A \ln(1 - h_B^0)}{\ln(1 - h_A^0) - \ln(1 - h_B^0)}; \quad T = - \frac{t_A - \tau}{\ln(1 - h_A^0)}$$

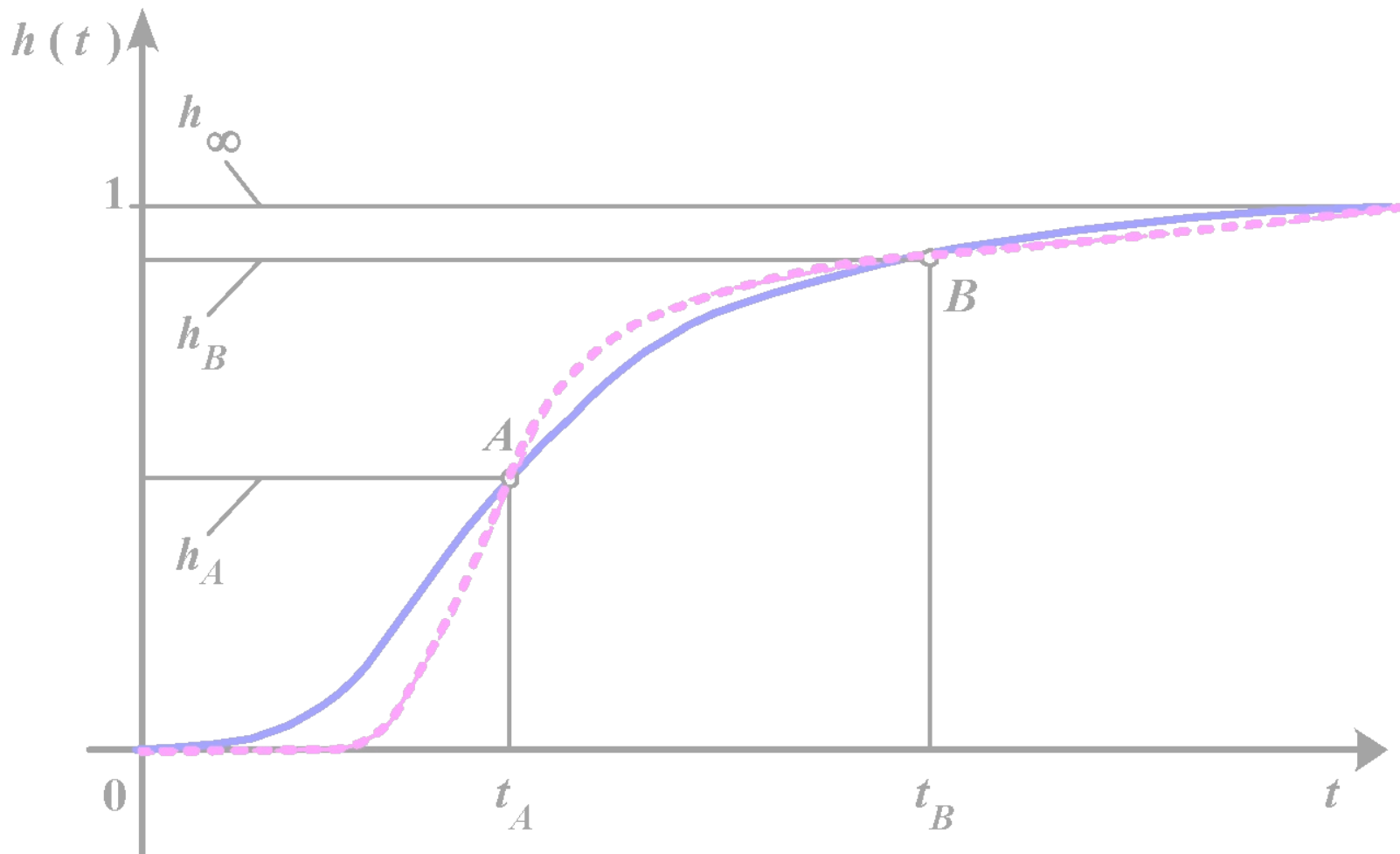
Аппроксимирующая кривая ( **график** ) будет пересекать экспериментальную переходную функцию в начале координат, точках **A** и **B** и в принципе - в бесконечности, т. е. при  $t = \infty$ .

Этим самым обеспечивается приемлемая точность описания динамически (3.27) **ств** объекта передаточной функцией типа

Приближенной проверкой допустимости подобной аппроксимации служит неравенство

$$0,594 h(T_{уст}) \leq h(t) \leq 0,632 h(T_{уст}).$$


# Определение $T$ и $\tau$ интерполяционным методом



# Пример.

- Определим величины  $T$  и  $\tau$  передаточной функции (3.27) по функции  $h^0(t)$ , показанной на графике а).
- Выберем на нормированной переходной функции две точки  $A$  и  $B$  с координатами  $\{4 \text{ мин}, 0,255\}$  и  $\{18 \text{ мин}, 0,92\}$ .

- Далее вычислим время запаздывания

$$\tau = \frac{18 \ln(1 - 0,255) - 4 \ln(1 - 0,92)}{\ln(1 - 0,255) - \ln(1 - 0,92)} = 2,155 \text{ ми н}$$

- и постоянную времени:

$$T = - \frac{4 - 2,15}{\ln(1 - 0,255) - \ln(1 - 0,92)} = 6,2 \text{ ми н}$$





•

- Получаем передаточную функцию объекта

$$W(s) = \frac{10 e^{-2,155 s}}{0,62 s + 1}$$

- В качестве проверки вычислим несколько значений  $h(t)$  по выражению

$$h(t) = 100 \left( 1 - \exp\left[-\frac{t - 2,155}{6,27}\right] \right)$$

и покажем их на графике кружками.

Из графиков видно, что подобная аппроксимация дает приемлемое приближение к заданной переходной функции в интервале времени  $7 \div 42$  мин при незначительных затратах времени на определение  $T$  и  $\tau$ .



## 7. Аппроксимация переходной функции решением дифференциального уравнения с кратными действительными корнями

Переходная функция промышленного объекта аппроксимируется решением линейного дифференциального уравнения порядка  $n$  с нулевыми начальными условиями

$$h(t) = h(\Gamma) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{T^i} C_i e^{-\frac{t}{T}} \quad (3.28)$$

Аппроксимирующая передаточная функция будет иметь такой вид:

$$W(s) = \frac{k}{(Ts + 1)^n} \quad (3.29)$$



## графике б)

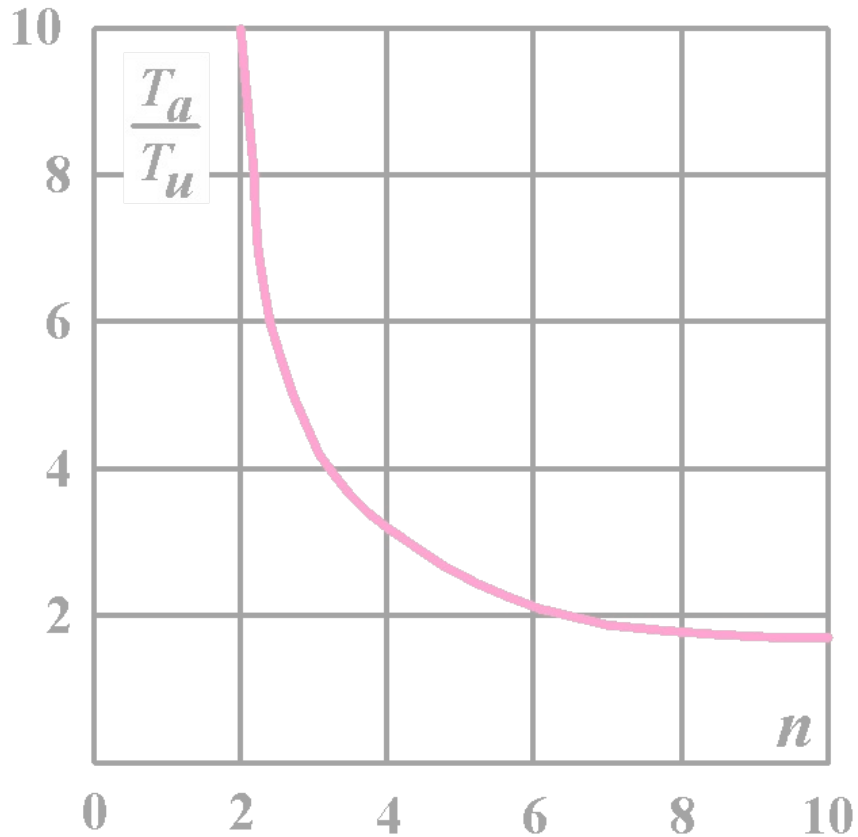
Требуется определить всего лишь два неизвестных параметра:  $T$  и  $n$ , сохранив при этом все преимущества и точность аппроксимации  $h(t)$  суммой экспонент с весом  $t^i$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

Существуют методы определения  $T$  и  $n$ , основанные на графических построениях в точке перегиба  $\eta$  переходной функции, например, показанной на графике б).

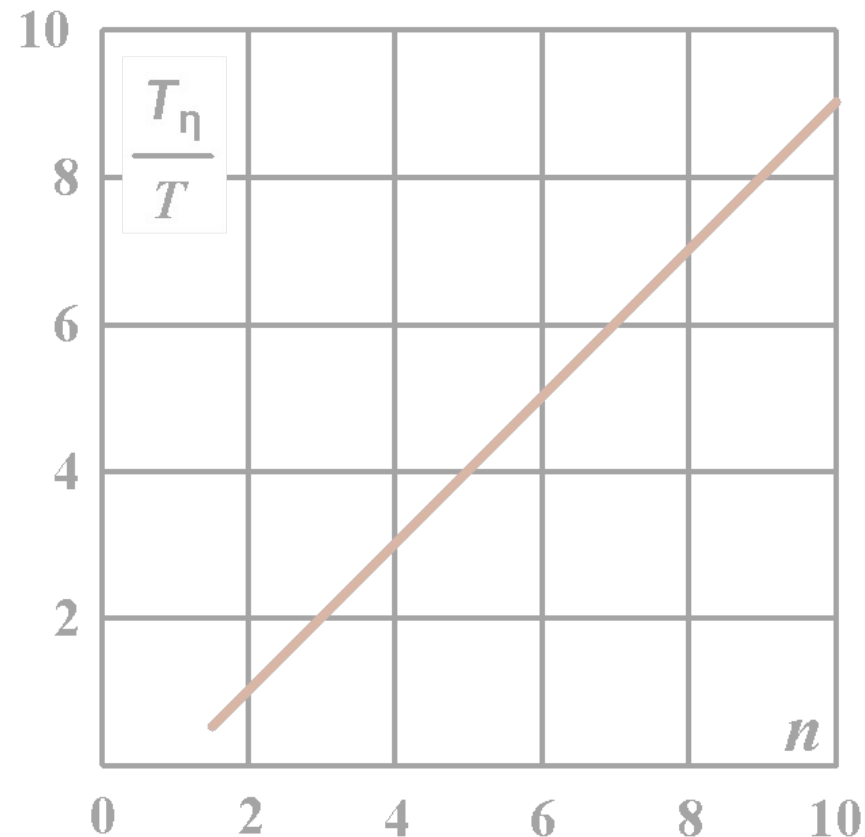
- Через точку  $\eta$  проводится касательная до пересечения с осью абсцисс и линией  $h(T_{уст})$ .
- По графику б) определяются величины  $T_a$ ,  $T_n$ ,  $T_u$  номограммы а)
- Далее по отношению  $T_a / T_u$  с помощью номограммы б) находят  $n$ , а затем по номограмме б) определяют  $T$ .



# Номограммы для нахождения коэффициентов дифференциального уравнения с кратными корнями



a)



б)



# Пример.

Аппроксимируем переходную функцию ( **график** ) решением дифференциального уравнения с кратными корням (3.28).

- Из графика  $h(t)$  находим:

$$T_u = 1,1 \text{ мин}; T_n = 4 \text{ мин}; T_a = 11 \text{ мин.}$$

- По номограмме **а)**, согласно отношения  $T_a / T_u = 11 / 1,1 = 10$ , определяем величину  $n = 2$ .

- В тех случаях, когда  $n$  дробное число, его надо округлять до ближайшего целого.

- Затем при  $n = 2$  по **номограмме б)** находим  $T_\eta / T = 4 / 1 = 1$ , откуда  $T = 4 \text{ мин.}$



(3.28)

- 
- Передаточная функция будет иметь следующий вид:

$$W(s) = \frac{100}{(4s + 1)^2}.$$

- Проверка точности аппроксимации осуществляется путем вычисления ряда значений  $h(t)$ , согласно (3.28), и сравнения их с экспериментальными величинами.



## 8. Аппроксимация переходных функций объектов, содержащих интегрирующие звенья

В общем случае дифференциальное уравнение движений выходной координаты объекта  $y(t)$  с **интегрирующими свойствами** может быть записано в таком виде:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{d t^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{d t^{n-1}} + \dots + a_l \frac{d^l y(t)}{d t^l} = b_m \frac{d^m x(t)}{d t^m} + \dots + b_1 x(t), \quad (3.30)$$

где  $n \geq m$ ;  $0 < l < n$ ;  $a_l, a_{l+1}, \dots, a_n$  – постоянные коэффициенты;

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$  – постоянные величины. Некоторые из них могут быть равны нулю, однако  $b_1 \neq 0$ .

В задачах исследования динамических характеристик промышленных объектов величина  $l$  обычно не больше 2.



(3.30)

---

Уравнение (3.30) можно легко свести к обычному для нас уравнению типа (2.2).

Это достигается подстановкой  $d^l y(t) / dt^l = z(t)$ .

Порядок нового уравнения будет равен  $n-l$ , и для определения его  $n-l + m$  неизвестных коэффициентов можно применять все рассмотренные выше способы аппроксимации переходных функций.

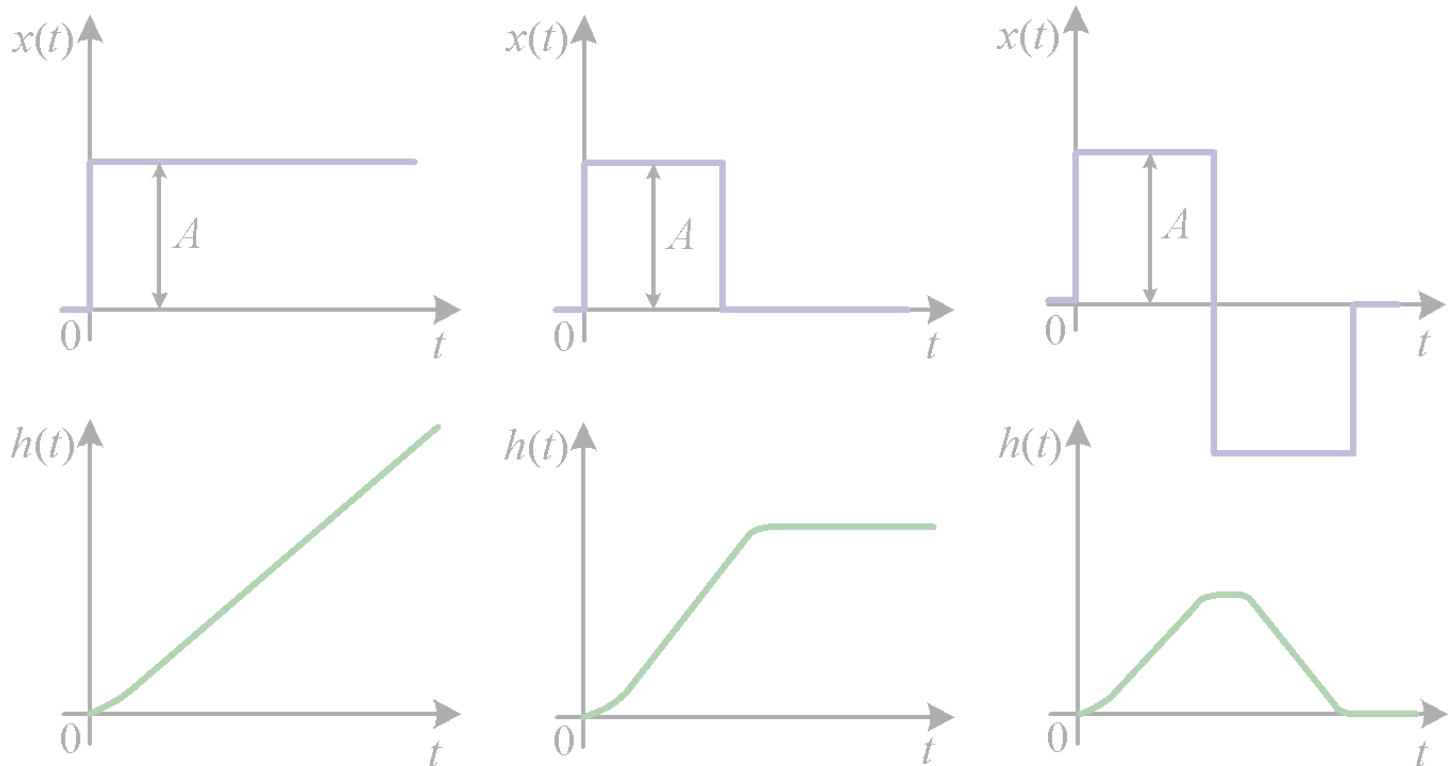
Однако подобное преобразование означает  $l$ -кратное дифференцирование исходной переходной функции промышленного объекта, что связано с появлением субъективных ошибок.





# Переходные функции объектов с интегрирующими свойствами

При известной форме испытательного входного воздействия  $x(t)$  нетрудно по виду переходной функции установить наличие в исследуемом объекте интегрирующих звеньев.



,

(3.30)

Аппроксимирующая передаточная функция, согласно (3.30) имеет полюс кратности  $l$  в начале координат и может быть представлена в следующей форме:

$$W(s) = \frac{1}{s^l} \frac{\prod_{g=1}^m (b_g s^g + 1)}{\prod_{i=l}^n a_i s^{i-l}} e^{-\tau s},$$

где  $T$  – время чистого запаздывания, определяемое обычными приемами из переходной функции.



На практике чаще применяют **графические методы** аппроксимации переходных функций объектов с интегрирующими свойствами.

В тех случаях, когда переходная функция изменяется с **постоянной скоростью** (графики а) и б), начиная с момента нанесения возмущения  $x(t) = A$  (или спустя время  $T$ ), динамические свойства объекта можно аппроксимировать передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{s} \text{ или } W(s) = \frac{k}{s} e^{-\tau s},$$

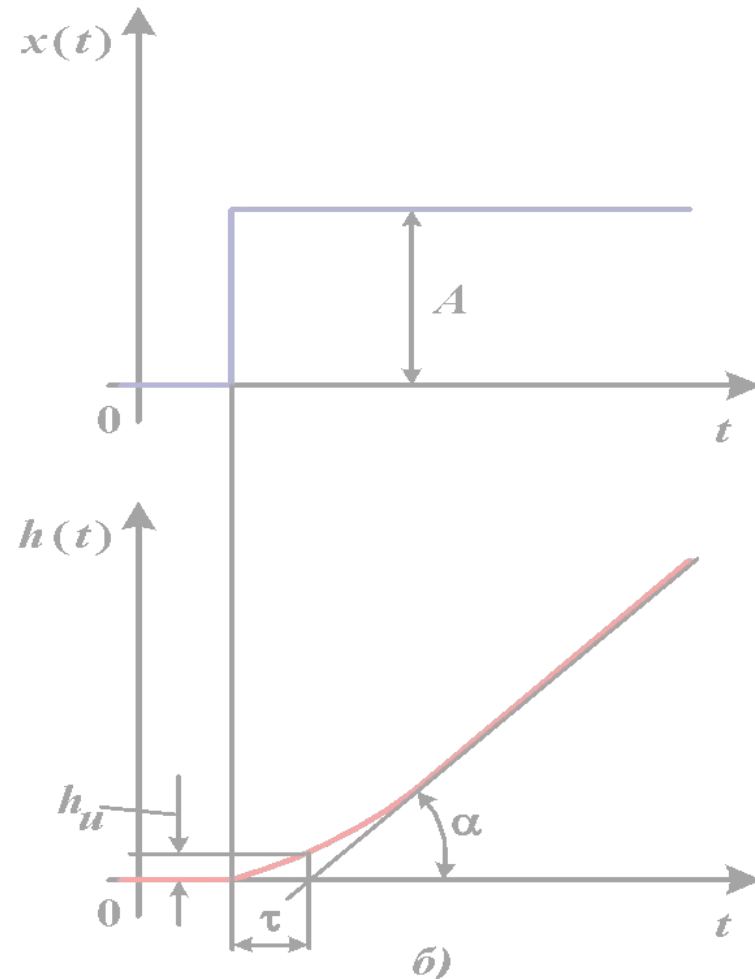
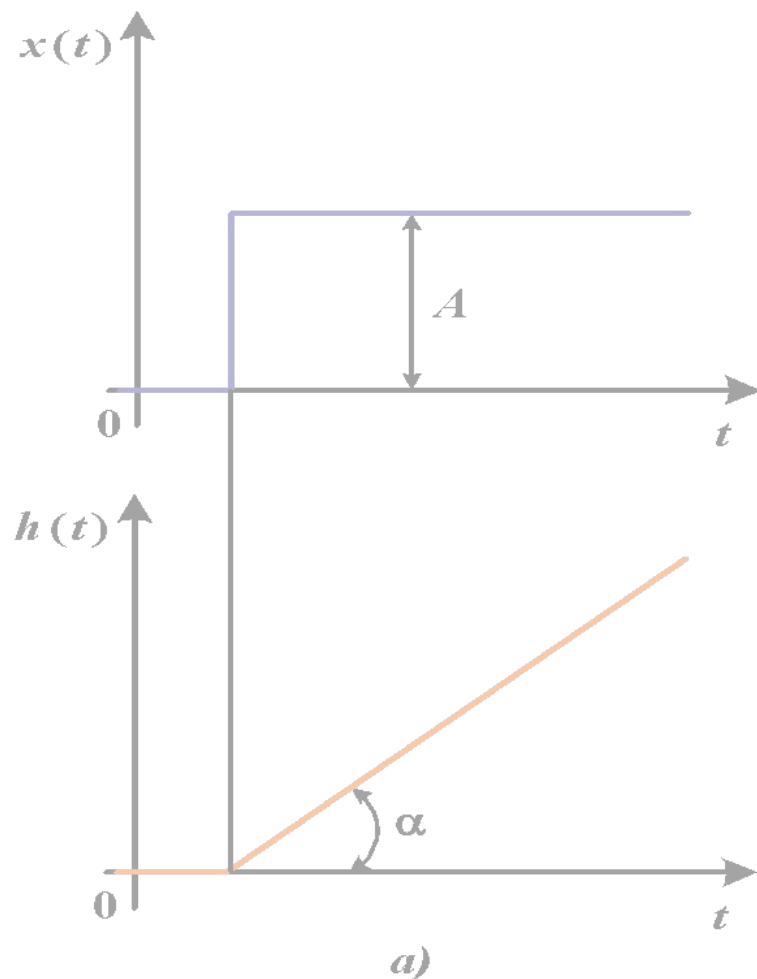
где  $k = \operatorname{tg} \alpha / A$ ;

$\operatorname{tg} \alpha$  – тангенс угла наклона асимптоты к  $h(t)$ ;

$T$  - равно отрезку оси абсцисс, отсекаемому асимптотой.



# Определение коэффициентов передаточной функции объекта с интегрирующими свойствами



## номограмм

Этот метод применим тогда, когда значения  $h(t)$  при  $0 \leq t \leq \tau$  не превышают величины  $\Delta$ , определяемой классом точности регистрирующей аппаратуры.

В более общем случае в качестве аппроксимирующей передаточной функции следует принимать следующее выражение:

$$W(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)^n} e^{-\tau s}.$$

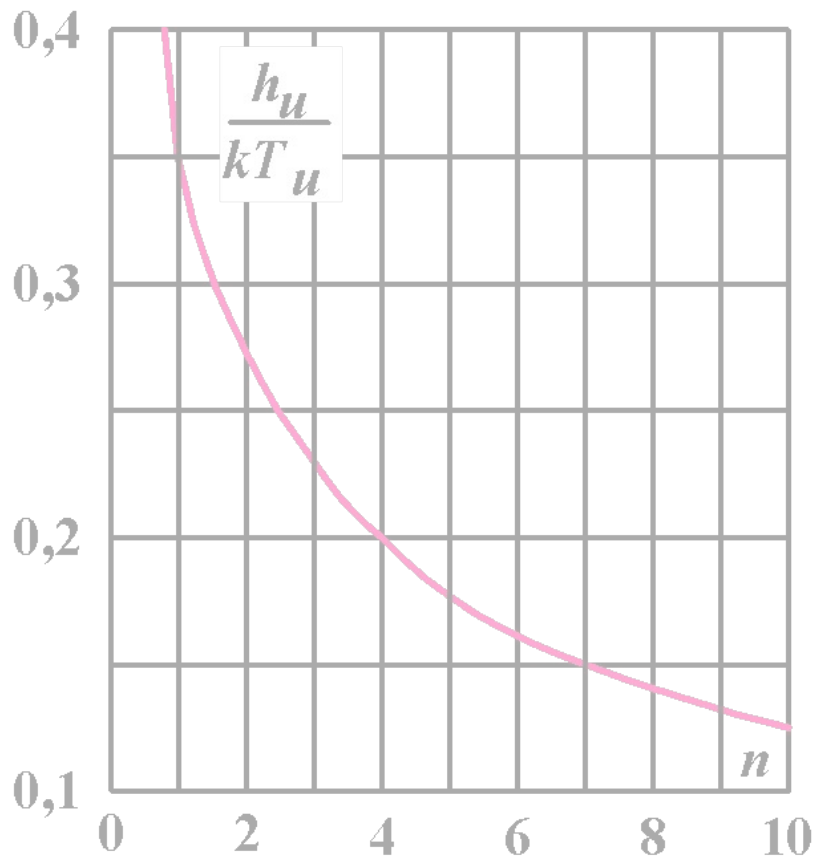
Для нахождения неизвестных  $k$ ,  $T$  и  $n$  из графика б) функции определяют угол наклона  $\alpha$  асимптоты к оси абсцисс, величины  $h_u$  и  $T_u = \tau$ .

Затем вычисляется  $k = \text{tg } \alpha / A$ , где  $A$  – амплитуда ступенчатого воздействия.

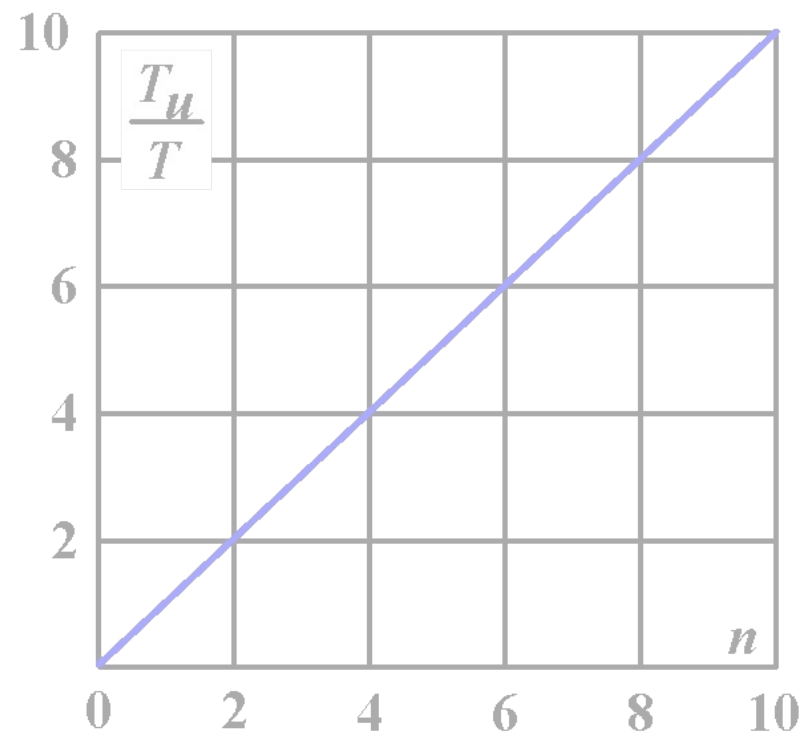
Из номограмм находятся  $T$  и  $n$ .



# Номограммы для нахождения коэффициентов дифференциального уравнения объекта с интегрирующими свойствами



a)



b)



---

# End



## Формула (2.9)

---

$$Y(s) = W(s)X(s) = W(s) / s.$$





## Формула (2.2)

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t) \quad (2.2)$$

Характеристический многочлен линейного дифференциального уравнения (2.2) или характеристическое уравнение:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_0 = 0$$

