Расчет криволинейных стержней

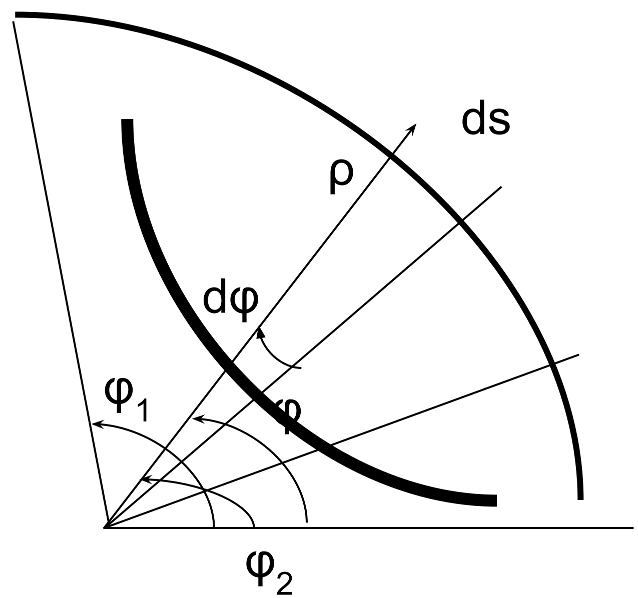
Доцент кафедры
самолетостроения
к.т.н. Мухин Д.В.

Интеграл Мора можно использовать для определения перемещений как прямолинейных, так и криволинейных стержневых систем.

Поскольку интеграл Мора вычисляется по длине, для криволинейных стержней вместо dx в подынтегральном выражении используется элемент длины дуги $ds = \rho d\varphi$

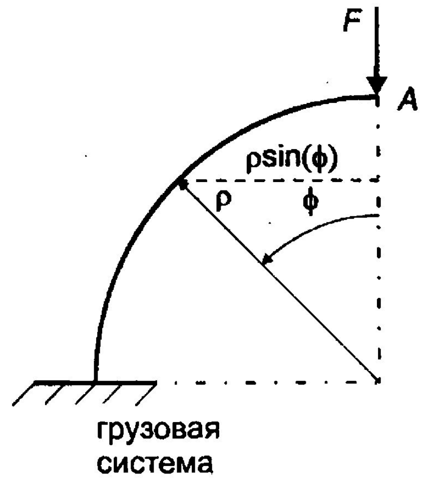
где ρ - радиус кривизны стержня, который может быть постоянным, а может быть функцией от угловой координаты φ.

$$\delta = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{M_{zP} M_{z1} \rho}{EI_z} d\varphi$$



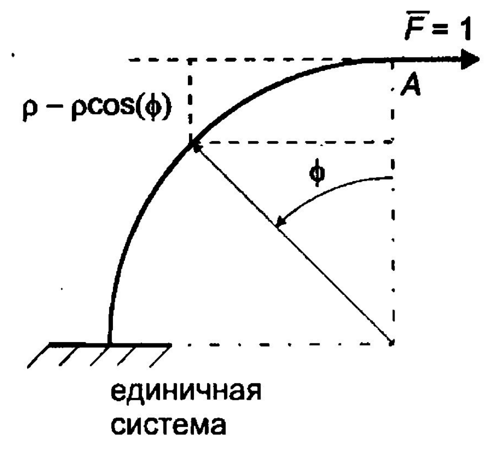
Пример:

Для кривого бруса в форме четверти круга найти горизонтальное перемещение точки ***A.***



Нарисуем вспомогательную единичную систему и нагрузим ее горизонтальной единичной силой в точке ***A.***

В полярной системе координат положение произвольного сечения характеризуется радиусом-вектором ρ (в нашей задаче ρ = ***Const*** — радиус круга) и углом φ от произвольно выбранной начальной точки дуги.



Изгибающий момент от внешних сил $M_F(\varphi) = F \cdot \rho \cdot \sin\varphi$

Изгибающий момент от единичной силы $M_1(\varphi) = 1 \cdot \rho \cdot (1 - \cos\varphi) = \rho(1 - \cos\varphi)$

Горизонтальное перемещение точки А

$$\Delta_{A\text{гор}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{M_F M_1}{EI_z} \rho d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{F\rho\sin\varphi \cdot \rho(1 - \cos\varphi)}{EI_z} \rho d\varphi = \frac{F\rho^3}{2EI_z}$$

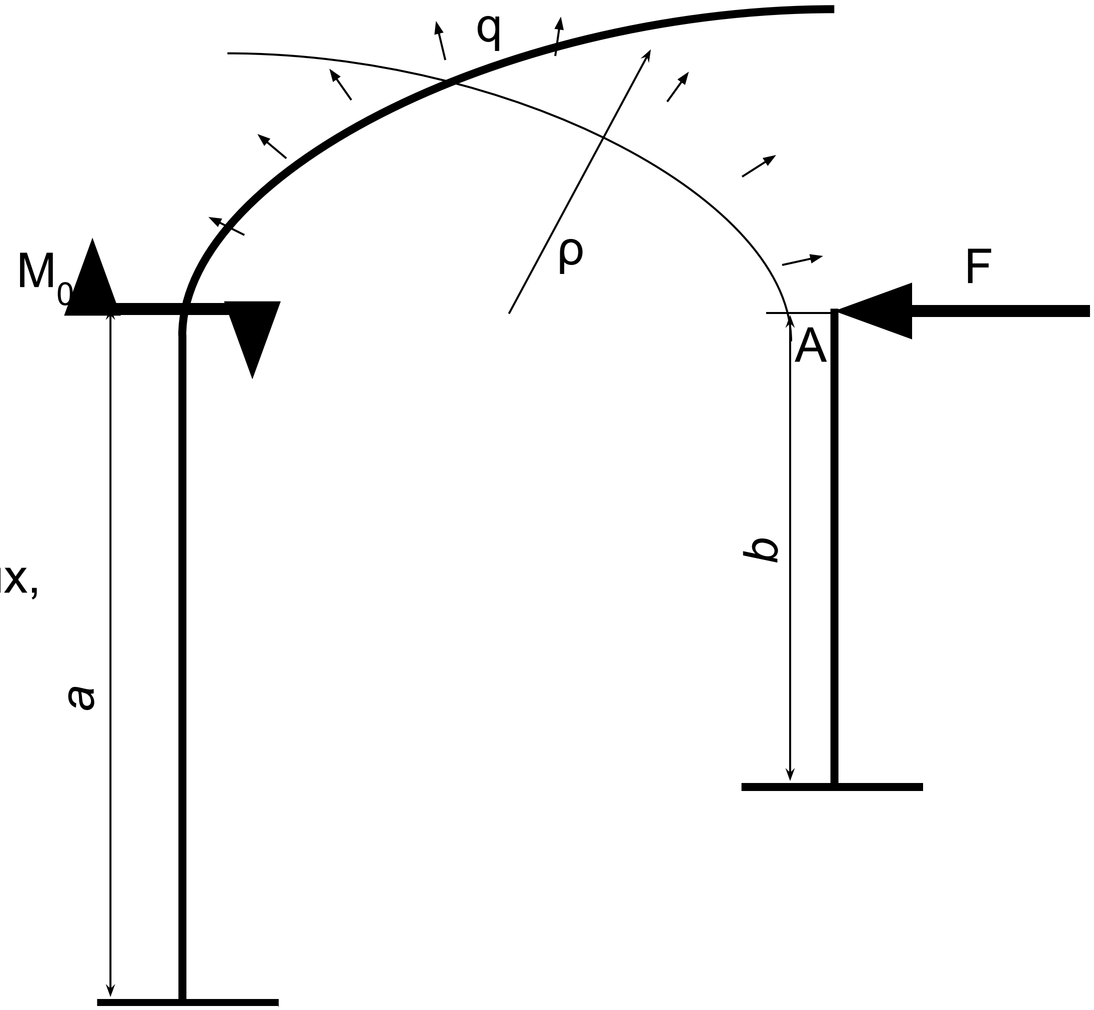
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\phi)\cdot(1 - \cos(\phi))}{1} \, d\phi = 0.5$$

Задана плоская рама, состоящая из двух прямолинейных и одного криволинейного участка.

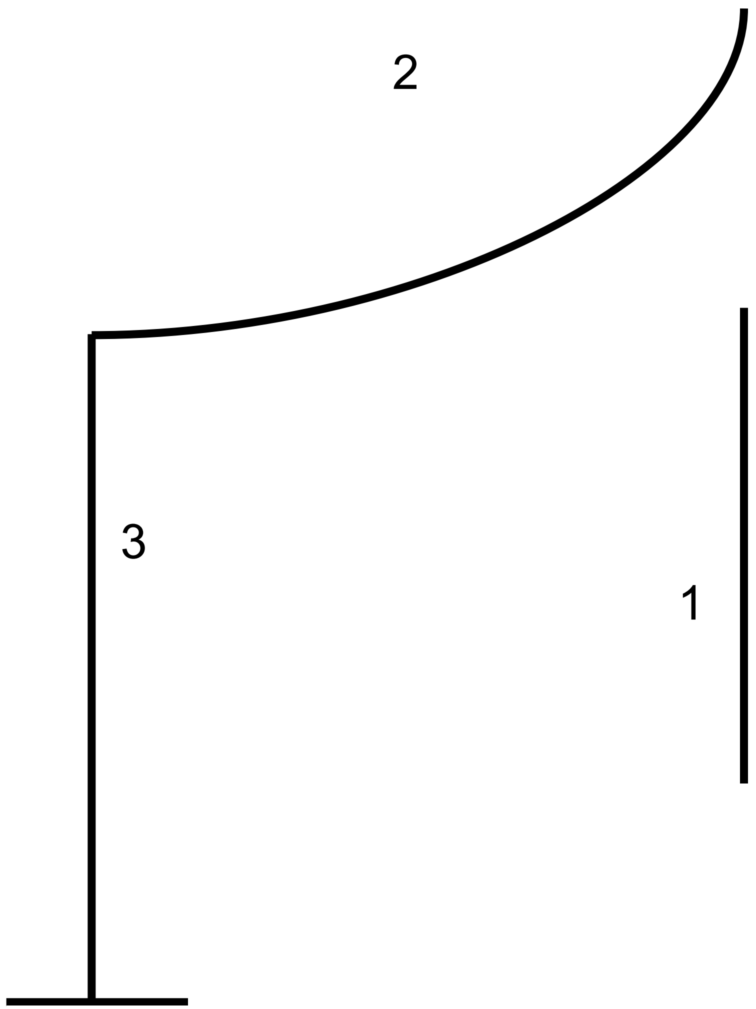
Система раз статически неопределима.

На систему действуют сосредоточенная сила F, сосредоточенный момент M_0, и распределенная нагрузка интенсивностью q.

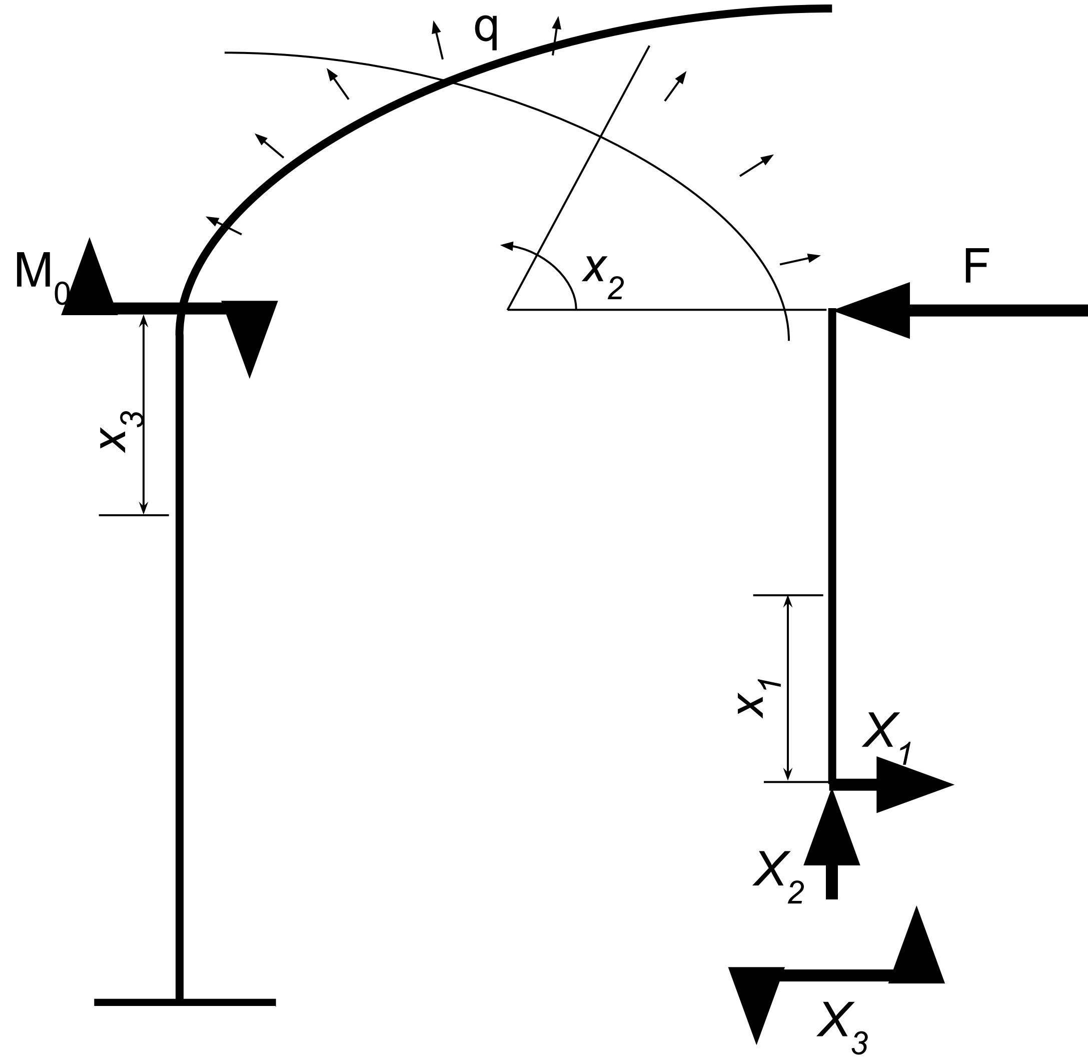
Определить значения силовых факторов, действующих в стержнях, определить поворот сечения в точке А.



Основная система



Эквивалентная система

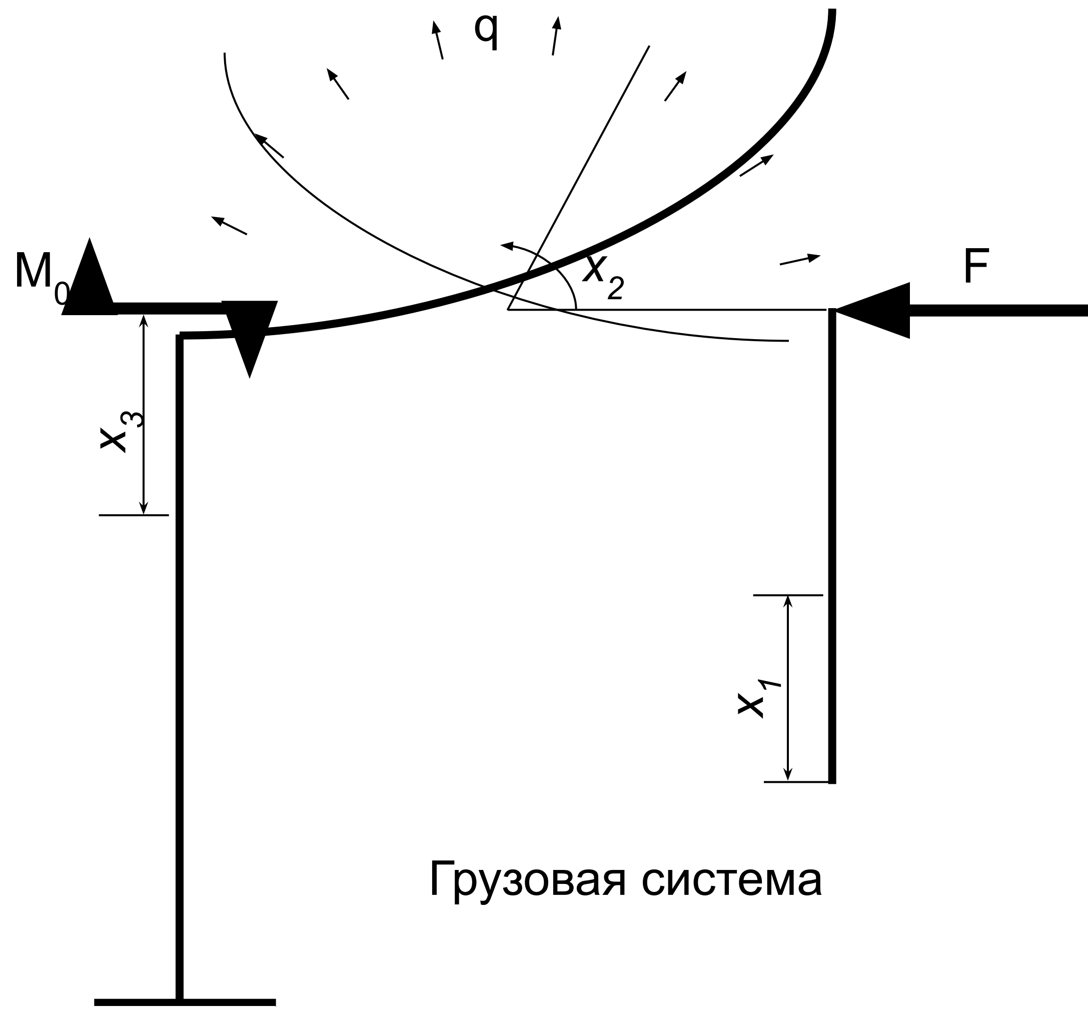


При расчете интегралов Мора будем учитывать только изгибающий момент

Выражаем значения моментов через координаты x.

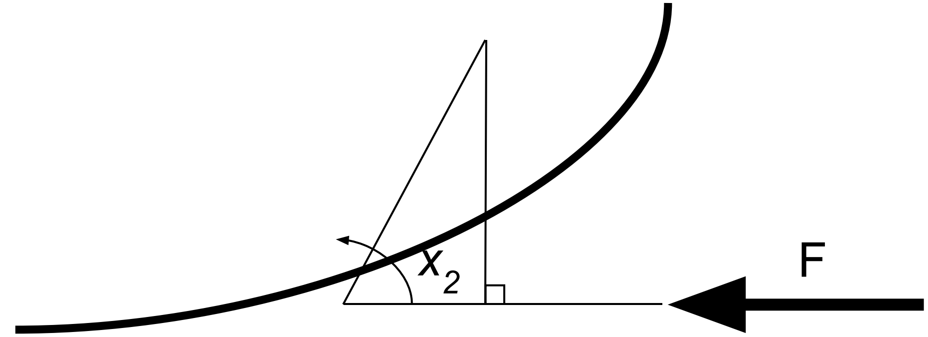
В первом стержне значение изгибающего момента равно

$M_P(x_1)=0$



Грузовая система

Во втором стержне момент будет складываться из момента от силы F и момента от распределенной нагрузки интенсивностью q



В сечении с координатой x_2 момент от силы F будет равен

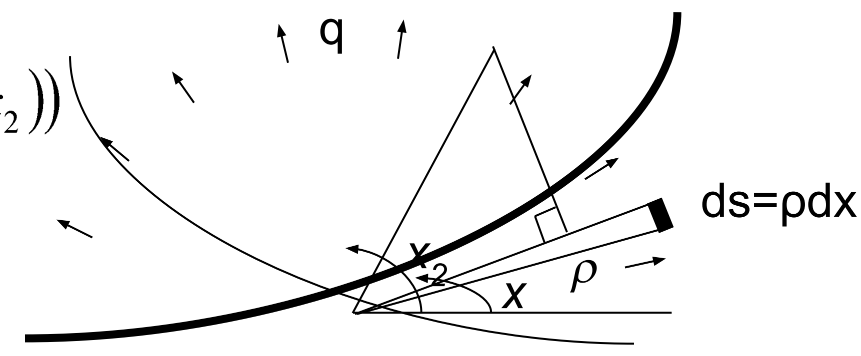
$$M_{PF}(x_2) = -F \cdot \rho_0 \cdot \sin x_2$$

Момент от распределенной нагрузки может быть получен суммированием элементарных моментов, действующих на элементарный участок стержня ds=ρdx

$$dM_{Pq} = \rho_0 \sin(x_2 - x) \cdot q \cdot ds = q\rho_0^2 \sin(x_2 - x)dx$$

В сечении с координатой x_2 момент от распределенной нагрузки интенсивностью q будет равен интегралу

$$M_{Pq}(x_2) = \int_0^{x_2} q\rho_0^2 \sin(x_2 - x)dx = q\rho_0^2(1 - \cos(x_2))$$



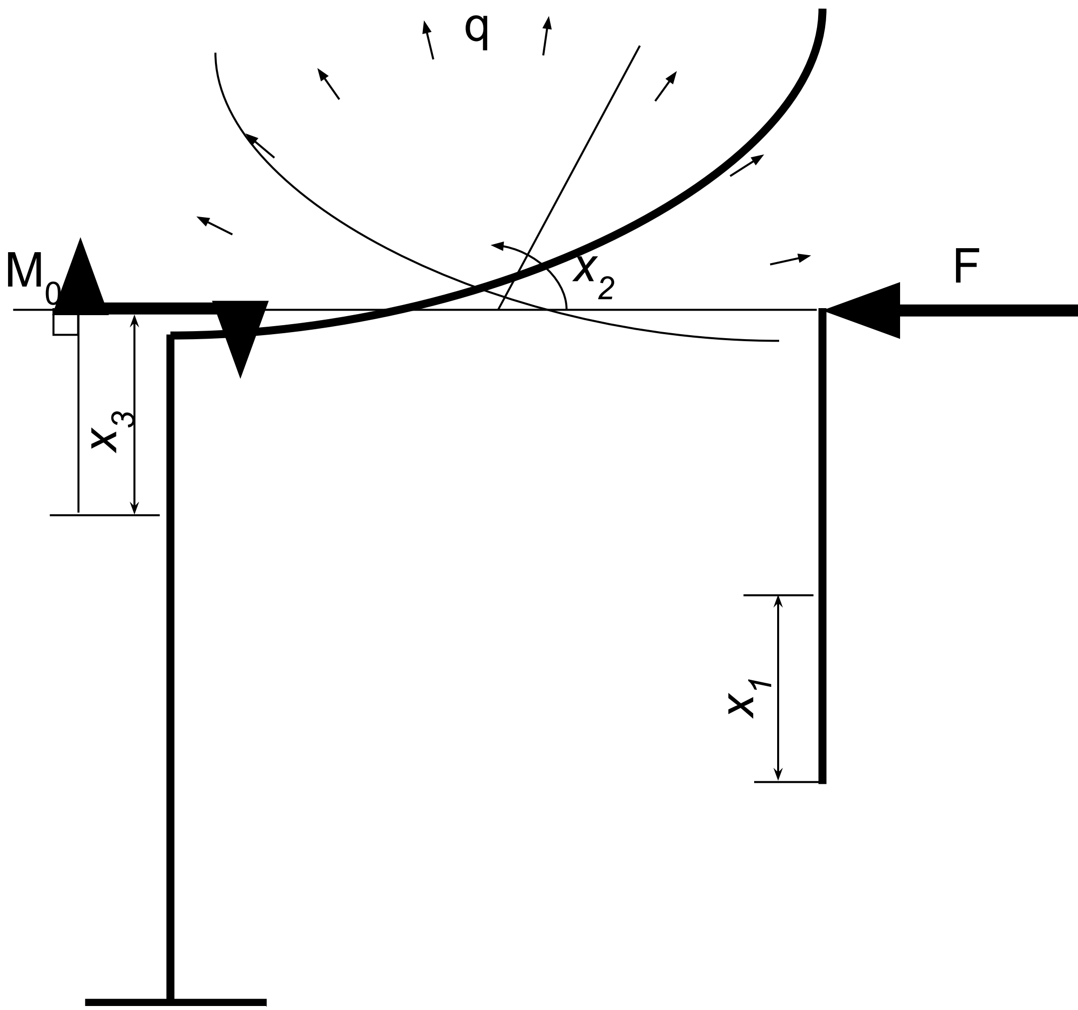
Суммарный момент

$$M_P(x_2) = -F \cdot \rho_0 \cdot \sin x_2 + q\rho_0^2(1 - \cos(x_2))$$

На участке третьего стержня момент будет складываться из моментов от силы F, распределенной нагрузки q (от всей грузовой площадки) и сосредоточенного момента M_0

В сечении с координатой x_3 момент будет равен

$$M_P(x_3) = F \cdot x_3 + 2 \cdot \rho_0 q - M_0$$

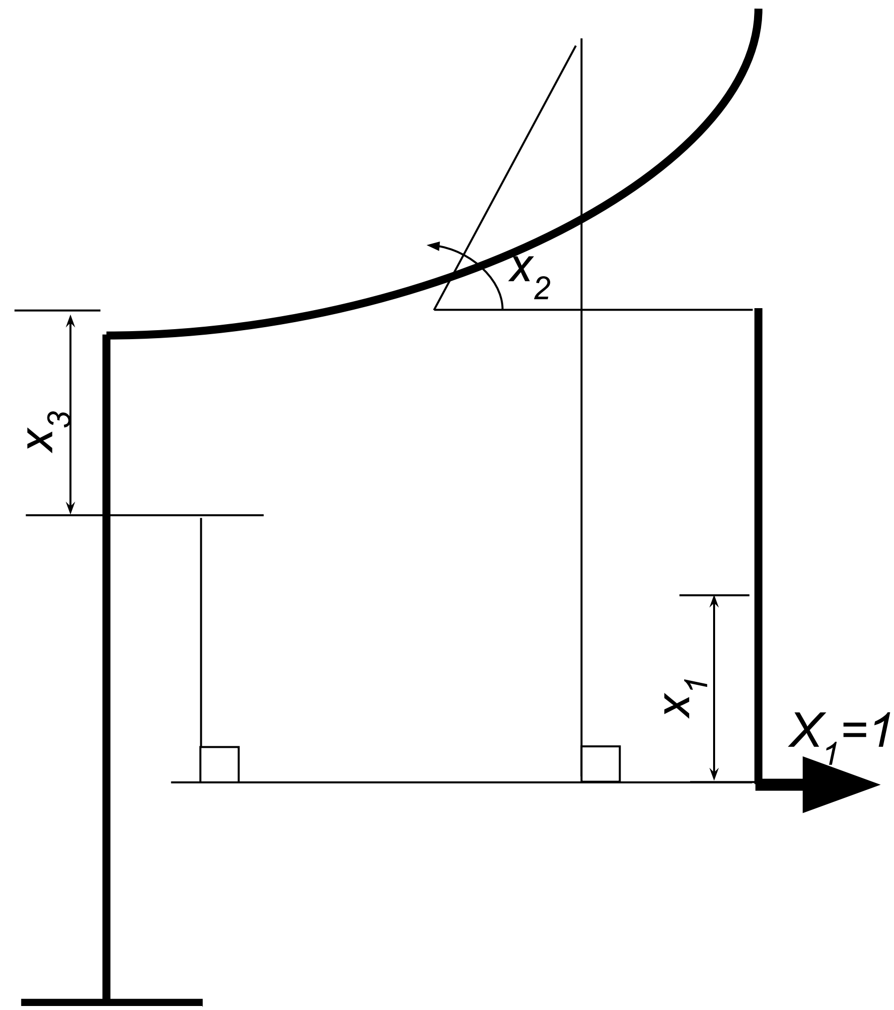


От единичной силы, направленной по направлению силы X_1, моменты в стержнях будут равны

$$M_1(x_1) = 1 \cdot x_1 = x_1$$

$$M_1(x_2) = 1 \cdot \left(b + \rho_0 \sin\left(x_2\right)\right) =$$
$$= b + \rho_0 \sin\left(x_2\right)$$

$$M_1(x_3) = 1 \cdot \left(b - x_3\right) = b - x_3$$

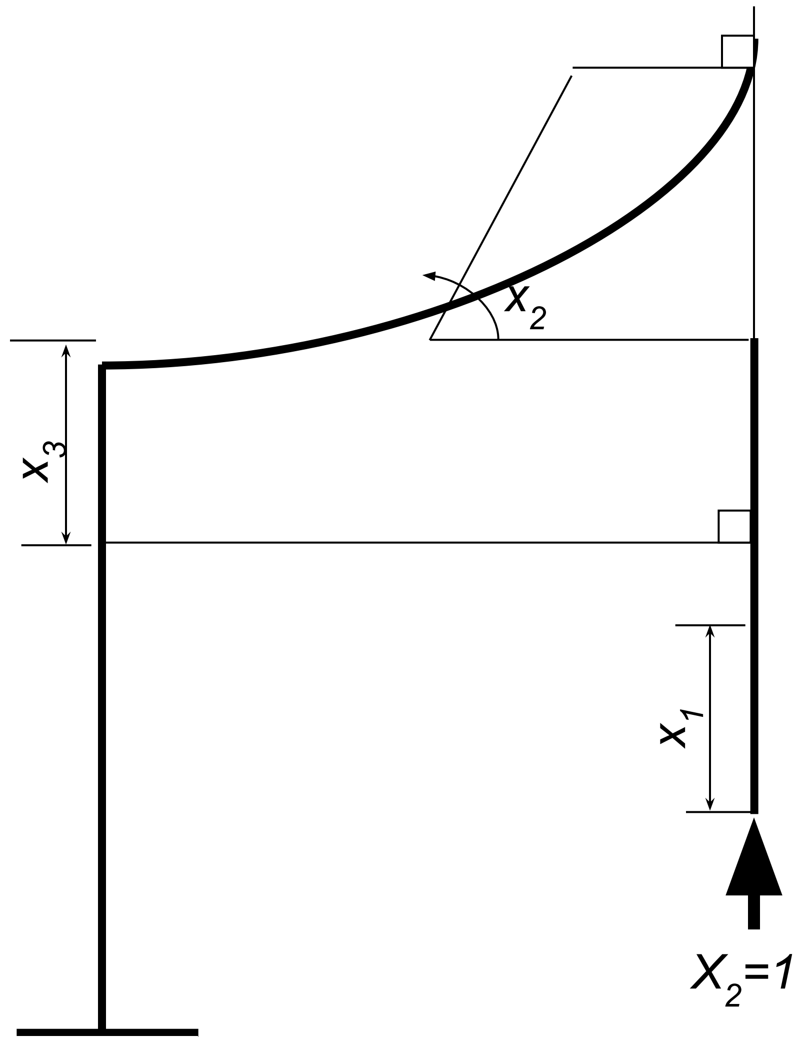


От единичной силы, направленной по направлению силы X_2, моменты в стержнях будут равны

$$M_1(x_1) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$M_1(x_2) = 1 \cdot \left(\rho_0 - \rho_0 \cos(x_2)\right) =$$
$$= \rho_0\left(1 - \cos(x_2)\right)$$

$$M_1(x_3) = 1 \cdot 2\rho_0 = 2\rho_0$$

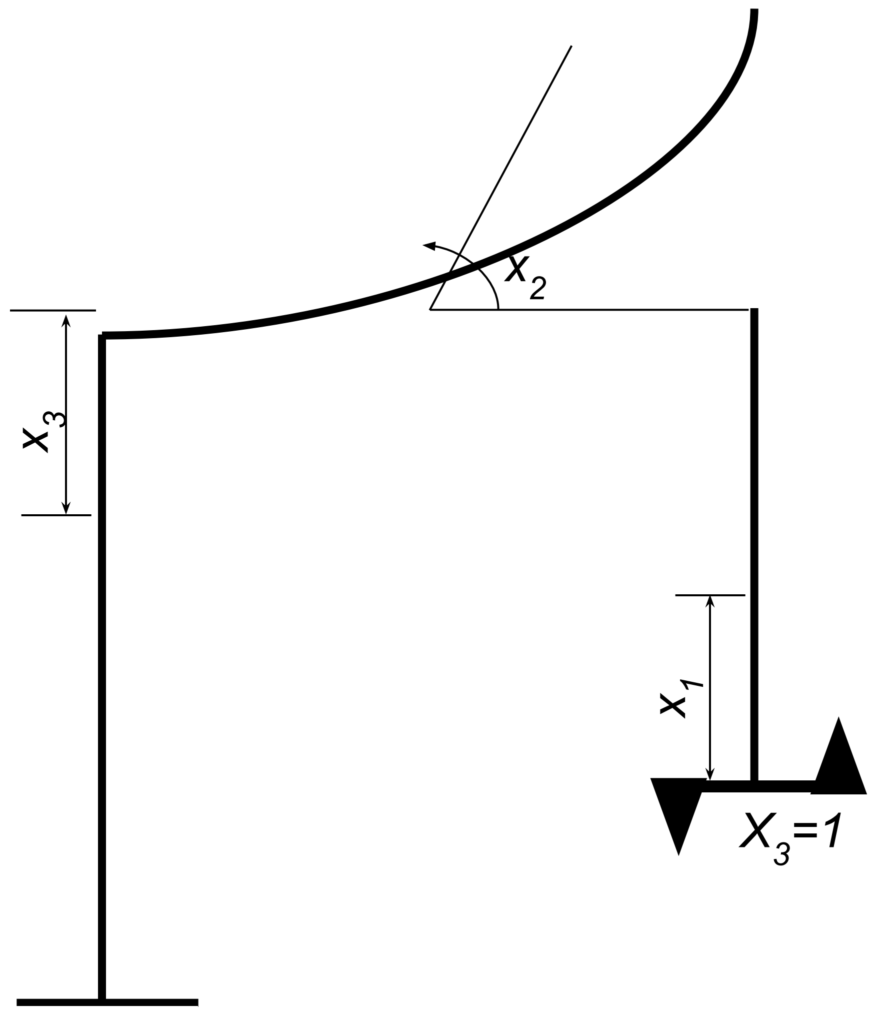


От единичной силы, направленной по направлению силы X_1, моменты в стержнях будут равны

$$M_1(x_1) = 1$$

$$M_1(x_2) = 1$$

$$M_1(x_3) = 1$$



Система канонических уравнений метода сил для три раза статически неопределимой системы имеет вид

$$\begin{cases} \delta_{1P} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = 0 \\ \delta_{2P} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0 \\ \delta_{3P} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0 \end{cases}$$

Для более компактного вида и удобства обработки систему можно представить в матричном виде

$$\delta \cdot X = -\delta_P$$

$$X = \left(X_1, X_2, X_3\right)^T$$

$$\delta_P = \left(\delta_{1P},\ \delta_{2P},\ \delta_{3P}\right)^T$$

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix}$$

Величины δ_{ij} и δ_{iP} расчитываются как интегралы Мора между соответствующими моментами

$F \equiv 100$ Í $\quad q \equiv 4000 \frac{}{\text{ì}} \quad M_0 \equiv 2$ Í·Í $\quad E \equiv 2 \cdot 10$ Ïa

длины участков

$a \equiv 0.1$ ì

$b \equiv 0.2$ ì

$\rho_0 \equiv 0.1$ ì

$$L \equiv \begin{pmatrix} b \\ \pi \\ a \end{pmatrix}$$

$J := 10^{-7}$ ì^4 момент инерции сечения

$n := 3$ степень статической неопределимости

$m := 3$ число участков

$k := 1..m \qquad \rho_k := 1 \qquad \rho_2 := \rho_0 \qquad \rho$ - радиус кривизны (для прямых участков $\rho=1$)

изгибающие моменты от внешних сил

$$M_P(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ -F \cdot \rho_0 \cdot \sin(x) + q \cdot \rho_0{}^2 \cdot (1 - \cos(x)) \\ F \cdot x + \left(q \cdot 2 \cdot \rho_0{}^2\right) - M_0 \end{bmatrix}$$

изгибающие моменты от единичных сил

$$M_1(x) := \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ b + \rho_0 \cdot \sin(x) & \rho_0 \cdot (1 - \cos(x)) & 1 \\ b - x & 2 \cdot \rho_0 & 1 \end{bmatrix}$$

коэффициенты податливости $\qquad i := 1..n \qquad j := 1..n$

$$\delta_{i,j} := \sum_{k=1}^{m} \left(\rho_k \cdot \int_0^{L_k} \frac{M_1(x)_{k,i} \cdot M_1(x)_{k,j}}{E \cdot J} \, dx \right)$$

$\delta =$

	1	2	3
1	$1.36 \cdot 10^{-6}$	$5.64 \cdot 10^{-7}$	$5.89 \cdot 10^{-6}$
2	$5.64 \cdot 10^{-7}$	$4.36 \cdot 10^{-7}$	$2.57 \cdot 10^{-6}$
3	$5.89 \cdot 10^{-6}$	$2.57 \cdot 10^{-6}$	$3.07 \cdot 10^{-5}$

$$\delta P_i := \sum_{k=1}^{m} \left(\rho_k \cdot \int_0^{L_k} \frac{M_P(x)_k \cdot M_1(x)_{k,i}}{E \cdot J} \, dx \right)$$

$\delta_P =$

	1
1	$2 \cdot 10^{-4}$
2	$1.67 \cdot 10^{-4}$
3	$9.43 \cdot 10^{-4}$

Решаем систему уравнений методом обращения матрицы

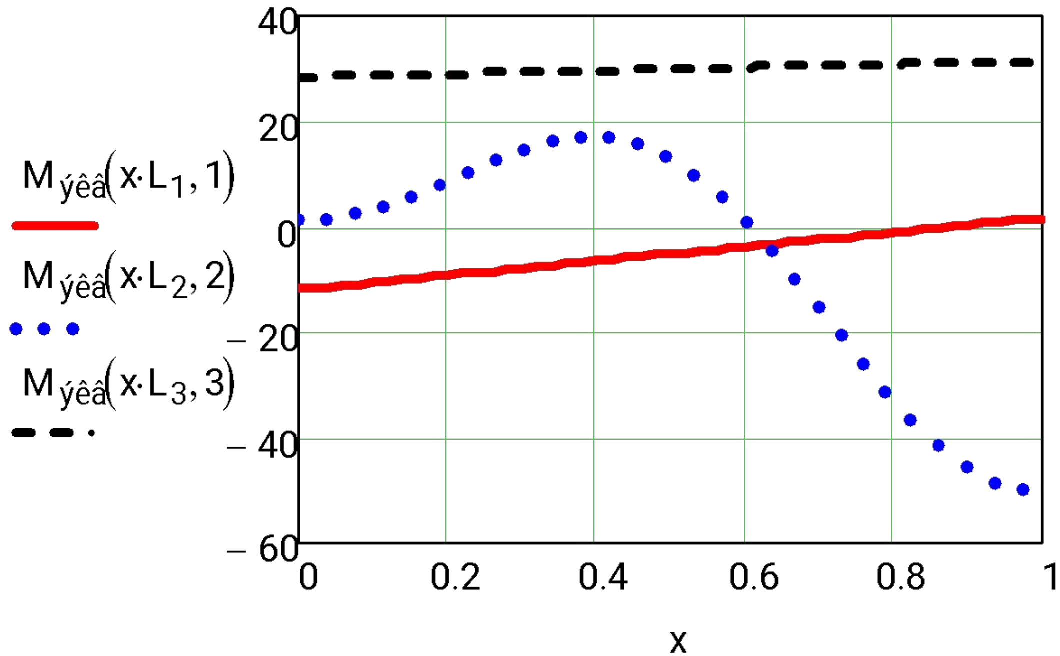
$$X := -\delta^{-1}\cdot\delta_P$$

$X =$

	1	
1	68.17	Н
2	-256.71	Н
3	-12.08	Н·ì

Рассчитываем действительные значения внутренних силовых факторов (изгибающего момента)

$$M_{ýêâ}(x,k) := M_P(x)_k + \sum_{i=1}^{n}\left[X_i\cdot\left(M_1(x)\right)_{k,i}\right]$$

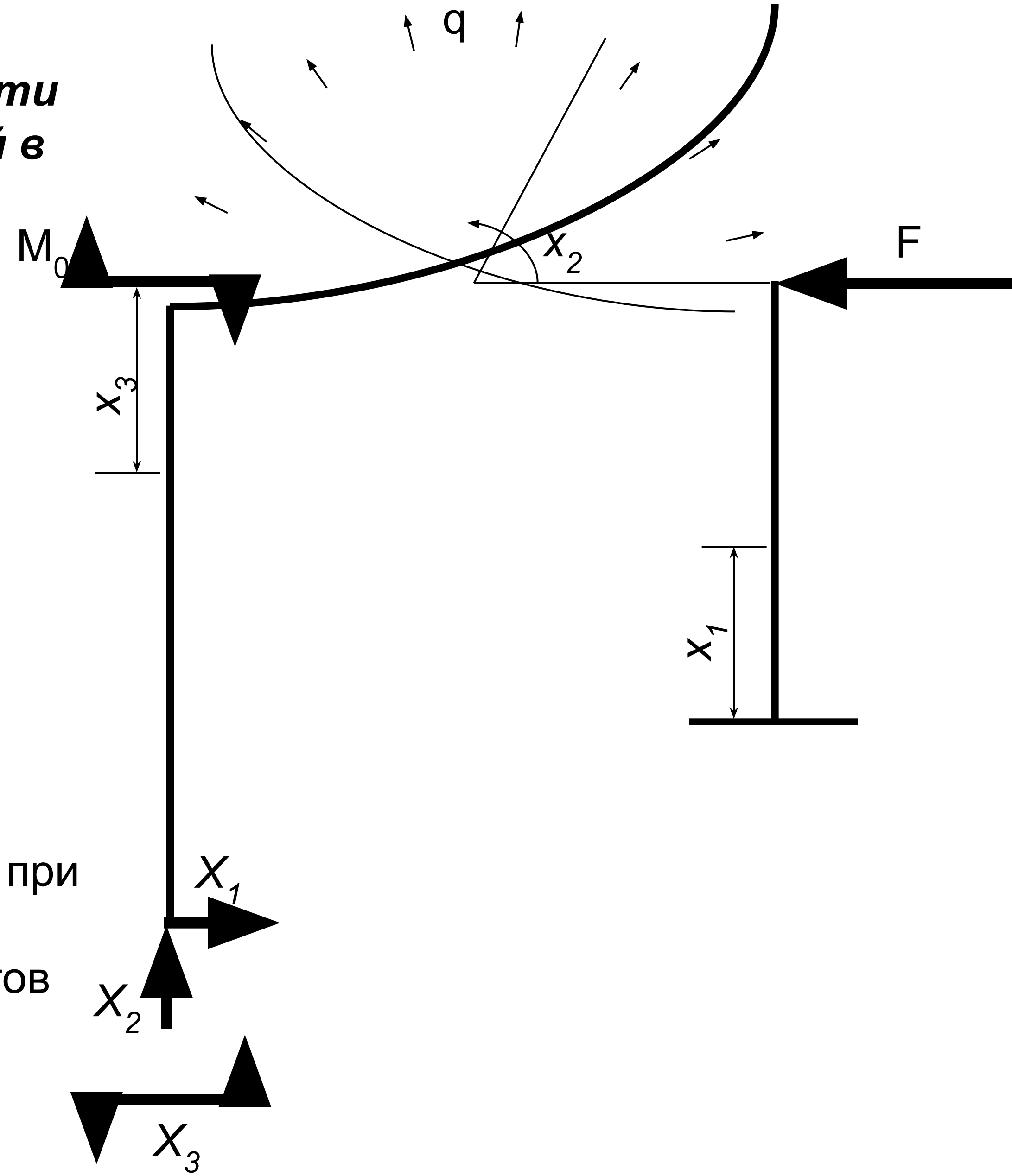


Проверка правильности решения

Сущность проверки правильности решения в расчете перемещений в местах отброшенных связей в условиях нагружения эквивалентной нагрузкой при другом варианте раскрепления.

Важно!!! Система координат не должна меняться.

В качестве другого варианта раскрепления рассмотрим отбрасывание второй консольной заделки. Для расчета перемещений при помощи интегралов Мора выведем выражения для изгибающих моментов от единичных сил

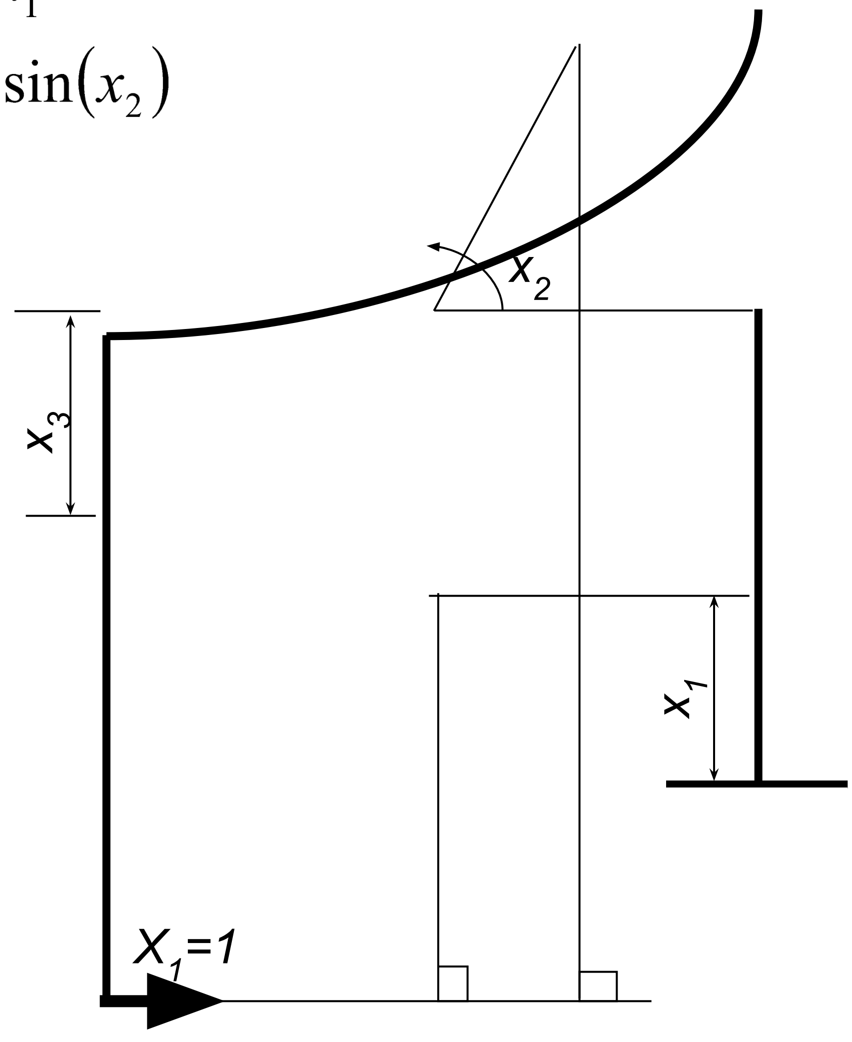


От единичной силы, направленной по направлению силы X_1, моменты в стержнях будут равны

$$M_B(x_1) = 1 \cdot (a - b + x_1) = a - b + x_1$$

$$M_B(x_2) = 1 \cdot (a + \rho_0 \sin(x_2)) = a + \rho_0 \sin(x_2)$$

$$M_B(x_3) = 1 \cdot (a - x_3) = a - x_3$$

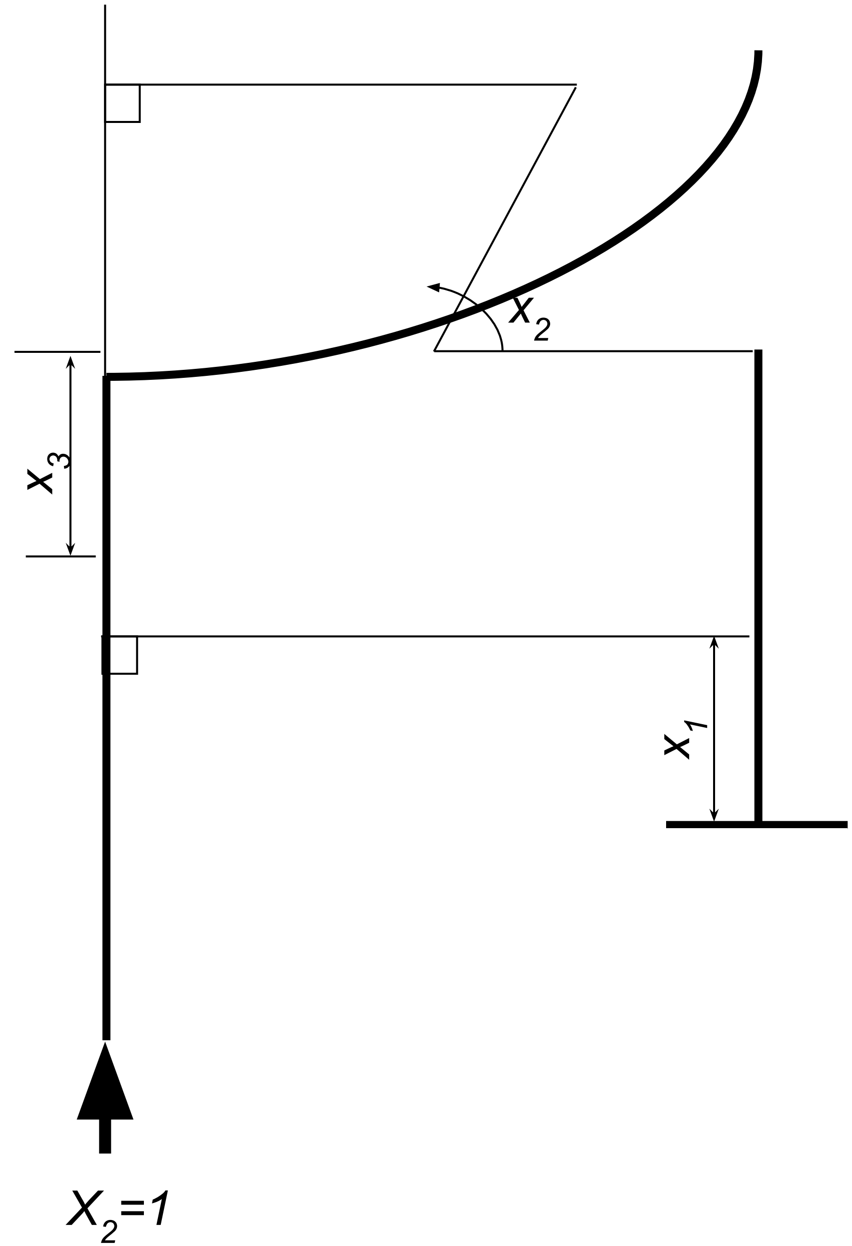


От единичной силы, направленной по направлению силы X_2, моменты в стержнях будут равны

$$M_B(x_1) = 1 \cdot (2 \cdot \rho_0) = 2\rho_0$$

$$M_B(x_2) = 1 \cdot (\rho_0 + \rho_0 \cos(x_2)) =$$
$$= \rho_0 + \rho_0 \cos(x_2)$$

$$M_B(x_3) = 1 \cdot 0 = 0$$

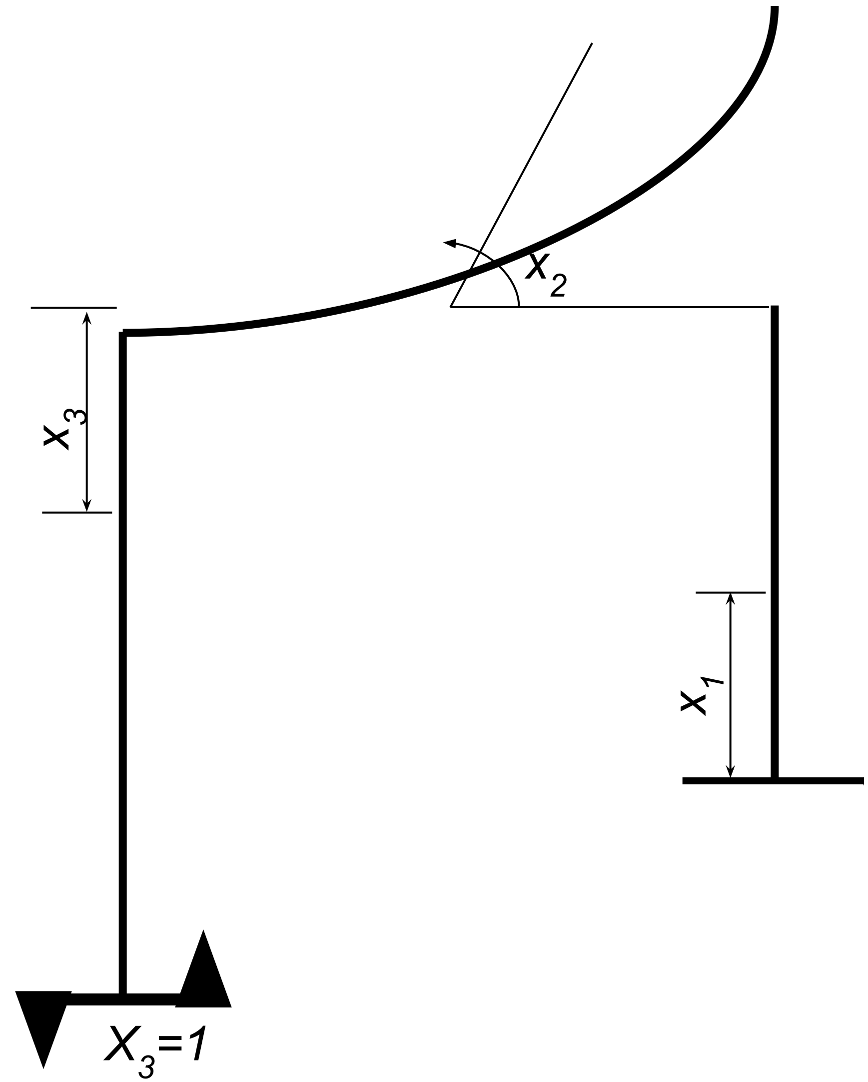


От единичной силы, направленной по направлению силы X_3, моменты в стержнях будут равны

$$M_B(x_1) = 1$$

$$M_B(x_2) = 1$$

$$M_B(x_3) = 1$$



Рассчитываем перемещения в эквивалентной системе

$$M_B(x) := \begin{bmatrix} a - b + x & 2\cdot\rho_0 & 1 \\ 1\cdot\left(a + \rho_0\cdot\sin(x)\right) & \rho_0 + \rho_0\cdot\cos(x) & 1 \\ -x + a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$j := 1..n$

должно быть

$$\Delta_j := \sum_{k=1}^{m}\left(\rho_k\cdot\int_0^{L_k}\frac{M_{\text{ýêâ}}(x,k)\cdot M_B(x)_{k,j}}{E\cdot J}\,dx\right)$$

$\Delta_{\text{ãîðèç}} = 0$

$\Delta_{\text{âåðò}} = 0$

$\theta = 0$

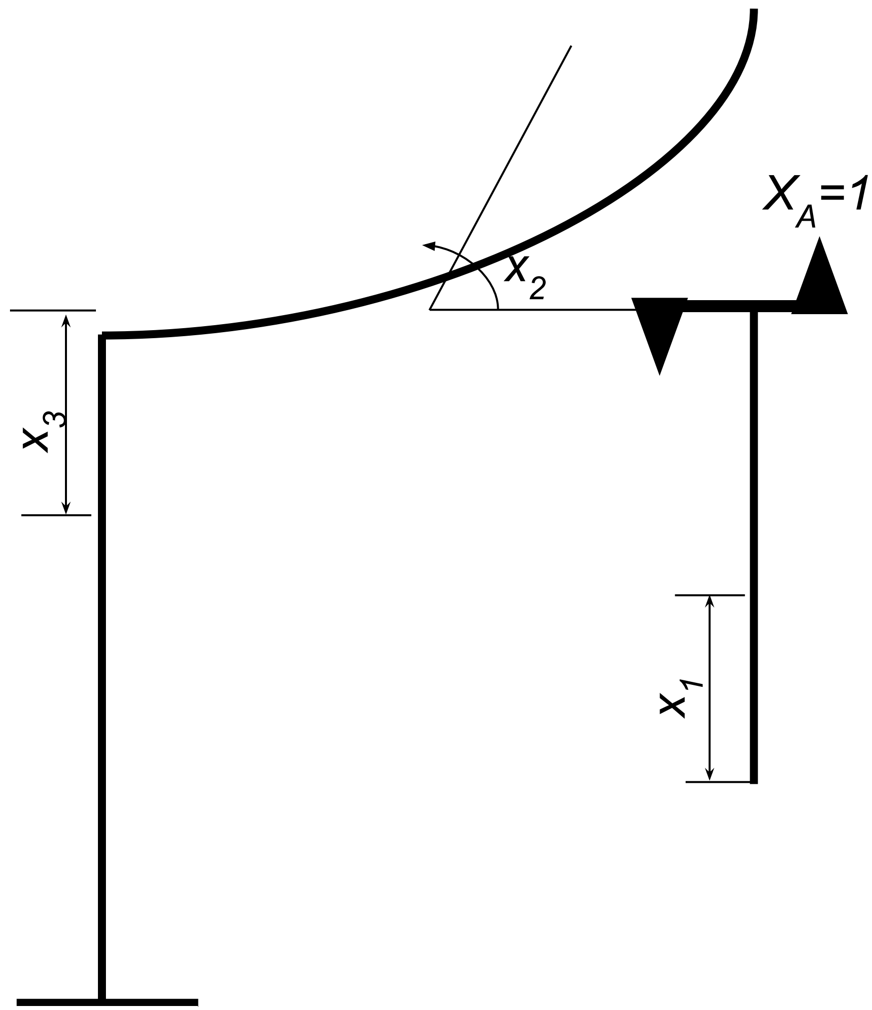
$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверка пройдена

Определяем угол поворота сечения в точке А

Для расчета угла поворота приложим в т А единичный момент и выразим моменты в стержнях

$$M_A(x_1) = 0$$
$$M_A(x_2) = 1$$
$$M_A(x_3) = 1$$



Рассчитываем угол поворота сечения в т А по интегралу Мора

$$M_A(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\acute{y}\hat{e}\hat{a}}(x,k) := M_P(x)_k + \sum_{i=1}^{n} \left[X_i \cdot \left(M_1(x)\right)_{k,i}\right]$$

$$\theta a := \sum_{k=1}^{m} \left[\rho_k \cdot \int_0^{L_k} \left(M_{\acute{y}\hat{e}\hat{a}}(x,k)\right) \cdot \frac{M_A(x)_k}{E \cdot J}\, dx\right] = 3.013 \times 10^{-3}\, deg$$

Задача решена