Новгородский Государственный Университет
имени Ярослава Мудрого
Институт Электронных и Информационных Систем
Кафедра Проектирования и Технологии Радиоаппаратуры

Техническая электродинамика

Лекция № 7

«Переменное электромагнитное поле»

Применение метода комплексных амплитуд

Все реальные электромагнитные процессы можно представить в виде суммы дискретных гармонических колебаний.

Анализ гармонических процессов существенно упрощается при использовании *метода комплексных амплитуд*. Напомним формулу Эйлера:

$$e^{j(\omega t+\varphi)} = \cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi)$$

Тогда вместо любой скалярной функции Ψ, изменяющейся по закону:

$$\Psi = \Psi_m \cos(\omega t+\varphi),$$

где *Ψm* – амплитуда; *φ* – начальная фаза,

$\omega = 2\pi f = 2\pi / T$ - круговая частота гармонического колебания,

вводится в рассмотрение комплексная функция:

$$\dot{\Psi} = \psi_m e^{i(\omega t+\varphi)} = \dot{\psi}_m e^{i\omega t}$$

$\dot{\psi}_m = \psi_m e^{i\varphi}$ - комплексная амплитуда функции.

Для перехода от комплексной функции $\dot{\Psi}$ к исходной функции нужно взять от $\dot{\Psi}$ реальную часть:

$$\psi = \operatorname{Re}\dot{\Psi}$$

Комплексные векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$

Уравнения Максвелла являются линейными дифференциальными уравнениями. Поэтому при изучении гармонических электромагнитных полей можно вместо векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ рассматривать комплексные векторы

$$\dot{\overline{E}} = \dot{\overline{E}}_m e^{i\omega t}; \qquad \dot{\overline{H}} = \dot{\overline{H}}_m e^{i\omega t}.$$

связанные с векторами $\overline{E}$ и $\overline{H}$ соотношениями:

$$\overline{E} = \operatorname{Re} \dot{\overline{E}}; \qquad \overline{H} = \operatorname{Re} \dot{\overline{H}}.$$

Если $\overline{E} = \overline{E}_m \cos(\omega t + \varphi)$, то $\dot{\overline{E}}_m = \overline{E}_m e^{i\varphi}$.

Аналогичные соотношения выполняются для вектора $\overline{H}$.

$$\dot{\overline{H}}_m = \overline{H}_m e^{i\varphi}.$$

Первое уравнение Максвелла в комплексной форме

Перейдем в системе уравнений Максвелла к комплексным векторам $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$.

Первое уравнение Максвелла $rot\,\bar{H} = \bar{j}_{np} + \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ в комплексной форме принимает вид:

$$rot\,\dot{\bar{H}} = \dot{\bar{j}}_{np} + i\omega\,\dot{\bar{D}}$$

Учитывая, что $\dot{\bar{j}}_{np} = \sigma\,\dot{\bar{E}}$, а $\dot{\bar{D}} = \varepsilon_a\,\dot{\bar{E}}$ получаем:

$$rot\,\dot{\bar{H}} = \sigma\,\dot{\bar{E}} + i\omega\varepsilon_a\,\dot{\bar{E}} = i\omega\varepsilon_a(1 - \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_a})\,\dot{\bar{E}}$$

Введём обозначение $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_a(1 - \dfrac{i\sigma}{\omega\varepsilon_a})$ - комплексная диэлектрическая проницаемость среды

где $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon_a} = tg\delta$ - тангенс угла потерь.

Получим $rot\,\dot{\bar{H}} = i\omega\,\dot{\varepsilon}\,\dot{\bar{E}}$ - первое уравнение Максвелла для гармонического поля

Второе уравнение Максвелла в комплексной форме

При переходе к комплексным векторам магнитную проницаемость среды также следует считать комплексной величиной

$$\dot{\mu} = \mu' - i\mu'' = |\dot{\mu}| e^{-i\delta_m}$$

Угол δ_m характеризует отставание по фазе вектора $\overline{B}$ от вектора $\overline{H}$, возникающее, например, в ферромагнетиках (явление гистерезиса).

С учетом изложенного второе уравнение Максвелла

$$rot\,\overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

можно записать в виде

$$rot\,\dot{\overline{E}} = -i\omega\,\dot{\mu}\,\dot{\overline{H}}$$

В случае гармонического поля третье и четвертое уравнение Максвелла являются следствием первых двух уравнений.

Уравнение баланса комплексной мощности

Средний поток энергии через поверхность S, ограничивающую объём V:

$$P_{cp} = \mathrm{Re} \oint_S \dot{\overline{\Pi}}\, d\overline{S}$$

Среднее за период значение вектора Пойнтинга равно вещественной части:

$$\overline{\Pi}_{cp} = \mathrm{Re}\, \dot{\overline{\Pi}}$$

где $\dot{\overline{\Pi}} = \frac{1}{2}\left[\dot{\overline{E}}, \dot{\overline{H}}\right]$ - комплексный вектор Пойнтинга.

Решение прямой задачи электродинамики

Большинство задач электродинамики можно отнести к двум классам:

1) задачи в которых требуется найти векторы э/м поля по заданным источникам (прямая задача);

2) по заданному распределению поля требуется найти его источники.

Определение векторов поля непосредственно из уравнений Максвелла затруднительно, поэтому целесообразно преобразовать их таким образом, чтобы получить дифференциальные уравнения.

Пусть среда является *линейной*, *однородной* и *изотропной*. Рассмотрим систему уравнений Максвелла совместно с материальными уравнениями.

$$rot\overline{H} = \bar{j}_{np} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}, \qquad rot\overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

$$div\overline{D} = \rho, \quad div\overline{B} = 0$$

$$\overline{D} = \varepsilon_a \overline{E};$$

$$\overline{B} = \mu_a \overline{H};$$

$$\bar{j}_{np} = \sigma \overline{E}.$$

Уравнение Даламбера для вектора $\overline{H}$

Возьмём ротор от обеих частей первого уравнения Максвелла и изменим порядок дифференцирования по времени и координатам.

Учитывая $\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E}$,
получаем

$$rotrot\ \overline{H} = rot\,\overline{j}_{np} + \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} rot\,\overline{E}$$

Известно, что $rot\ rot\ \overline{a} = grad\ div\ \overline{a} - \nabla^2 \overline{a},$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа

Т.к. $div\ \overline{H} = 0$, то $rot\ rot\ \overline{H} = grad\ div\ \overline{H} - \nabla^2 \overline{H} = -\nabla^2 \overline{H}$

Так же учитывая $rot\ \overline{E} = {-\mu_a \partial \overline{H}}/{\partial t}$ перепишем исходное уравнение в форме

$$\nabla^2 \overline{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial t^2} = -rot\,\overline{j}_{np}$$

Уравнения Даламбера для вектора $\overline{H}$

Полученное выше уравнение эквивалентно трём скалярным, которые относятся к уравнениям вида

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, y, z, t)$$

где *V* – скорость.

Такие уравнения описывают волновые процессы, причем параметр *V* равен скорости этого процесса. Эти уравнения принято называть *неоднородными уравнениями Даламбера*, или *неоднородными волновыми уравнениями*.

Аналогичные уравнения с правой частью f(x,y,z,t)=0 называют *однородными уравнениями Даламбера*, или *однородными волновыми уравнениями*.

Уравнения Даламбера для вектора $\overline{E}$

Возьмём ротор от обеих частей второго уравнения Максвелла.

Учитывая, что

$$rot\ rot\ \overline{E} = grad\ div\ \overline{E} - \nabla^2 \overline{a} = \frac{1}{\varepsilon_a} grad\ \rho - \nabla^2 \overline{E},$$

и используя первое уравнение Максвелла, получаем

$$\nabla^2 \overline{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} = \mu_a \frac{\partial \overline{j}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_a} grad\ \rho$$

Уравнения Гельмгольца

В случае гармонического поля, переходя к комплексным векторам $\dot{\bar{E}}$ и и $\dot{\bar{H}}$ ограничиваясь рассмотрением установившихся процессов (р=0), получаем

$$\nabla^2 \dot{\bar{E}}_m + \dot{k}^2 \dot{\bar{E}}_m = 0;$$

$$\nabla^2 \dot{\bar{H}}_m + \dot{k}^2 \dot{\bar{H}}_m = 0,$$

где - $\dot{k} = \omega\sqrt{\dot{\varepsilon}\,\dot{\mu}}$ – комплексная постоянная распространения или комплексное волновое число.

Уравнения такого вида принято называть *однородными уравнениями Гельмгольца.*

Переменное электромагнитное поле

Спасибо за внимание