Предел последовательности.

Числовые последовательности

- Кратко последовательность обозначают символом {Xn} или (Xn), при этом Xn называют членом или элементом этой последовательности, n —номером члена Xn.
- Числовая последовательность —это функция, область определения которой есть множество N всех натуральных чисел. Множество значений этой функции, т. е. совокупность чисел Xn, n € N, называют множеством значений последовательности. Множество значений последовательности может быть как конечным, так и бесконечным.

Множество значений последовательности {(-1)"} состоит из двух чисел 1 и -1, а множества значений последовательностей $\{n^2\}$ и $\{1/n\}$ — бесконечны.

Последовательность, у которой существует предел, называют сходящейся. Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют расходящейся; иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является ее пределом.

Предел числовой последовательности.

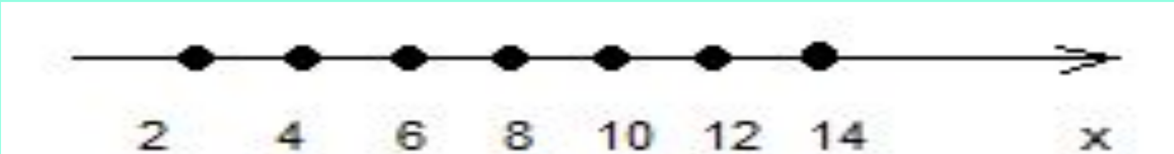
Рассмотрим две числовые последовательности:

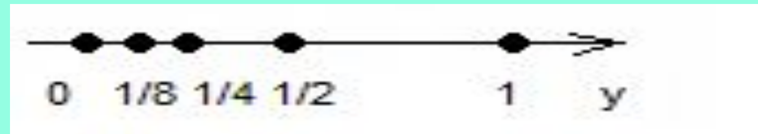
(x_n) : 2, 4, 6, 8, 10, …, $2n$,…;

(y_n) : 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, … $\frac{1}{2^n}$, …

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатных прямых.

Обратите внимание как ведут себя члены последовательности.



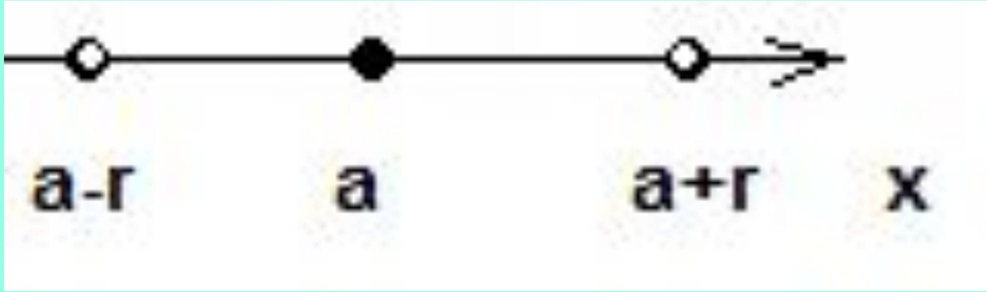


Замечаем, что члены последовательности y_n как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности x_n таковой точки не наблюдается.

Но, естественно, не всегда удобно изображать члены последовательности, чтобы узнать есть ли точка «сгущения» или нет.

__**Определение 1.**__ *Пусть* a *- точка прямой, а* r *- положительное число. Интервал* $(a-r, a+r)$ *называют* ***окрестностью точки*** a *, а число* r *-* ***радиусом окрестности***.

Геометрически это выглядит так:



Например:

(-0.1, 0.5) – окрестность точки 0.2, радиус окрестности равен 0. 3.

Теперь можно перейти к определению точки «сгущения», которую математики назвали «*пределом последовательности*».

Определение 2. *Число* b *называют* ***пределом последовательности*** y_n *, если в любой заранее выбранной окрестности точки* b *содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.*

Пишут: $y_n \to b$.

Читают: y_n стремится к b.

Либо пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Читают: предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b.

Сходящиеся и расходящиеся последовательности.

- Последовательность, у которой существует предел, называют сходящейся.
- Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют расходящейся; иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является ее пределом.

Определение: Число a называют ***пределом числовой последовательности***

$a_1, \; a_2, \ldots a_n, \ldots$

если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$|\, a_n - a \,| < \varepsilon$.

Условие того, что число a является пределом числовой последовательности

$a_1, \; a_2, \ldots a_n, \ldots ,$

записывают с помощью обозначения $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

и **произносят** так: «Предел a_n при n, стремящемся к бесконечности, равен a ».

Предел числовой последовательности

Пример 1. Для любого числа $k > 0$ справедливо равенство:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

Пример 2 . Для любого числа $k > 0$ справедливо равенство:

$$\lim_{n \to \infty} n^k = \infty$$

Пример 3. Для любого числа a такого, что $|\,a\,| < 1,$ справедливо

равенство: $$\lim_{n \to \infty} a^n = 0$$

Пример 4. Для любого числа a такого, что $|\,a\,| > 1,$ справедливо равенство: $$\lim_{n \to \infty} a^n = \infty$$

Пример 5 . Последовательность:

$-1\,,\,1\,,\,-1\,,\,1\,,\,\ldots\,,$

заданная с помощью формулы общего члена

$a_n = (-1)^n\,,$

предела не имеет.