Мир координат

Автор:

Меркулов Ярослав,

Ученик 11 Б класса

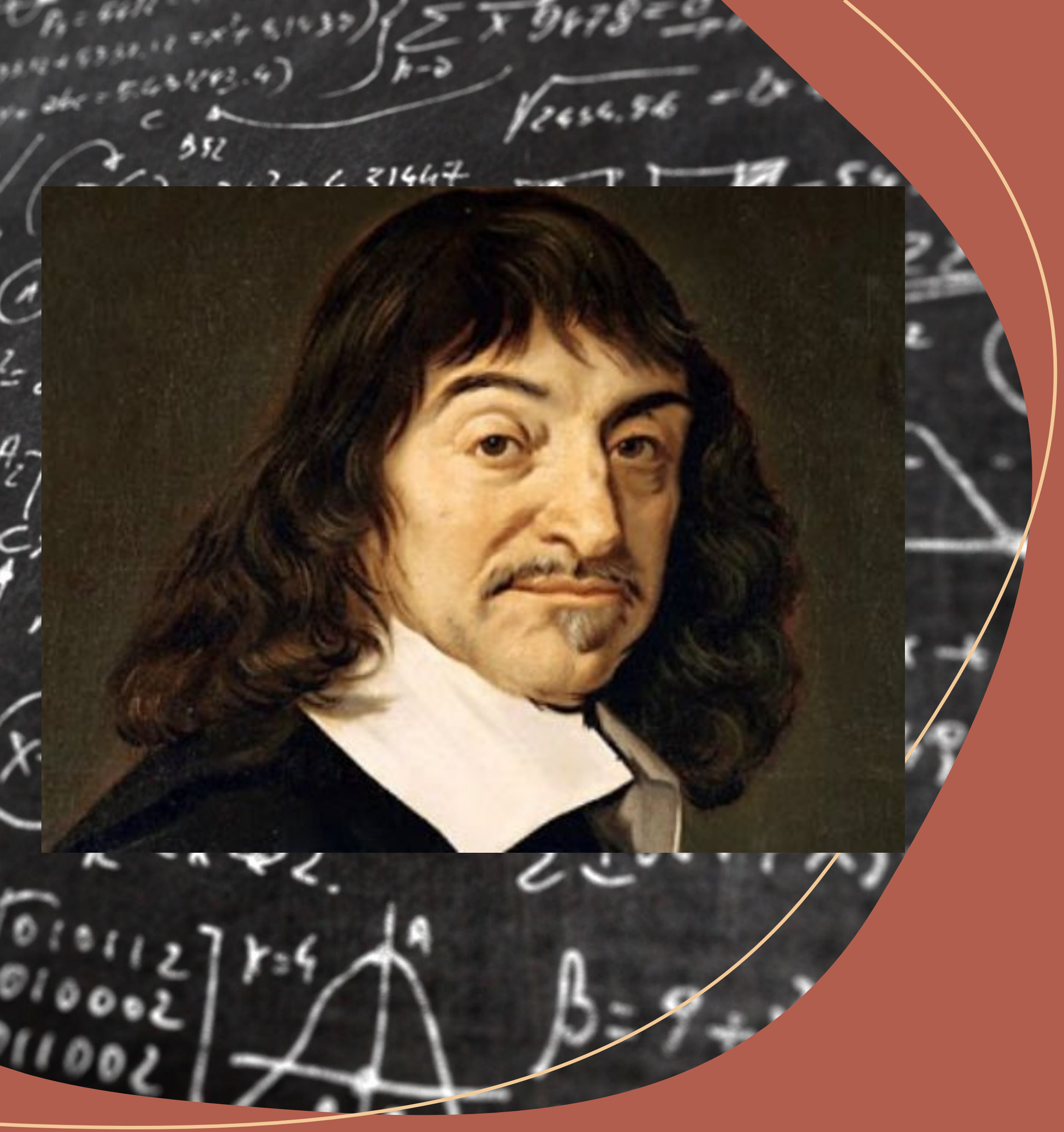
МБОУ лицей №2

Руководитель Саблина.Н.О

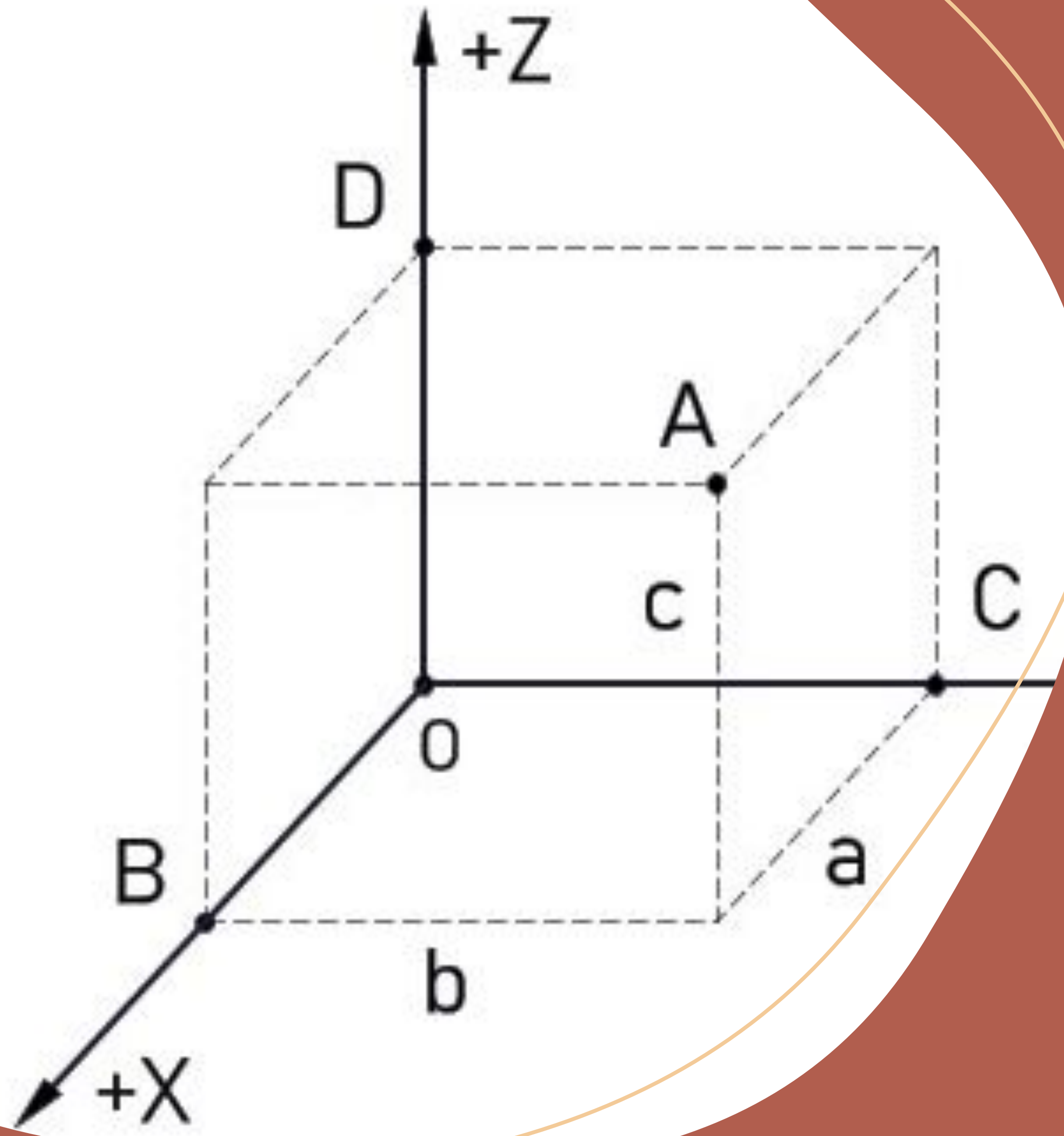
учитель математики.

Задачи

- Рассмотреть основные положения теории координат в пространстве .
- Рассмотреть наиболее выгодное расположение ПСК для основных многогранников.
- Решить задачи , выбранные из общего банка заданий ЕГЭ координатным методом.



Создателем метода координат считают французского философа и математика Рене Декарта (1596-1650), который в последней части большого философского трактата Декарта, вышедшего в 1637 году, дал описание метода координат и его применение к решению геометрических задач.



Основные понятия:

Метод координат — весьма эффективный и универсальный способ нахождения любых углов или расстояний между стереометрическими объектами в пространстве. Решая ту или иную математическую или физическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы.

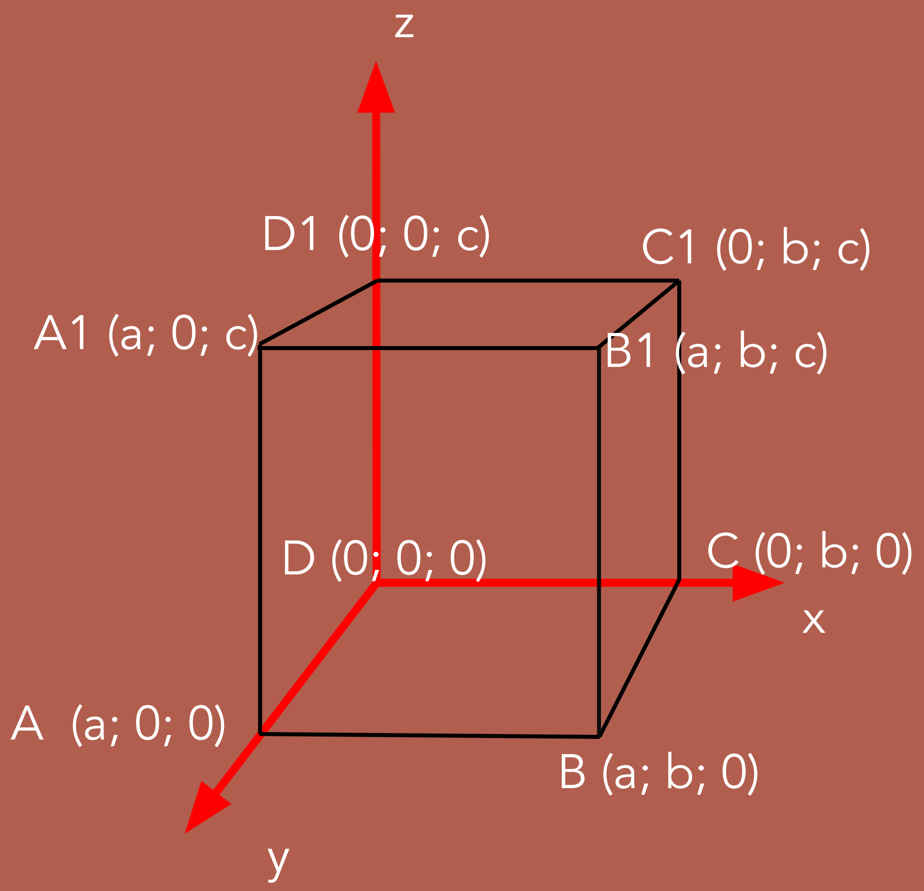
Координатный метод решения задач

Алгоритм применения метода координат к решению координатных задач

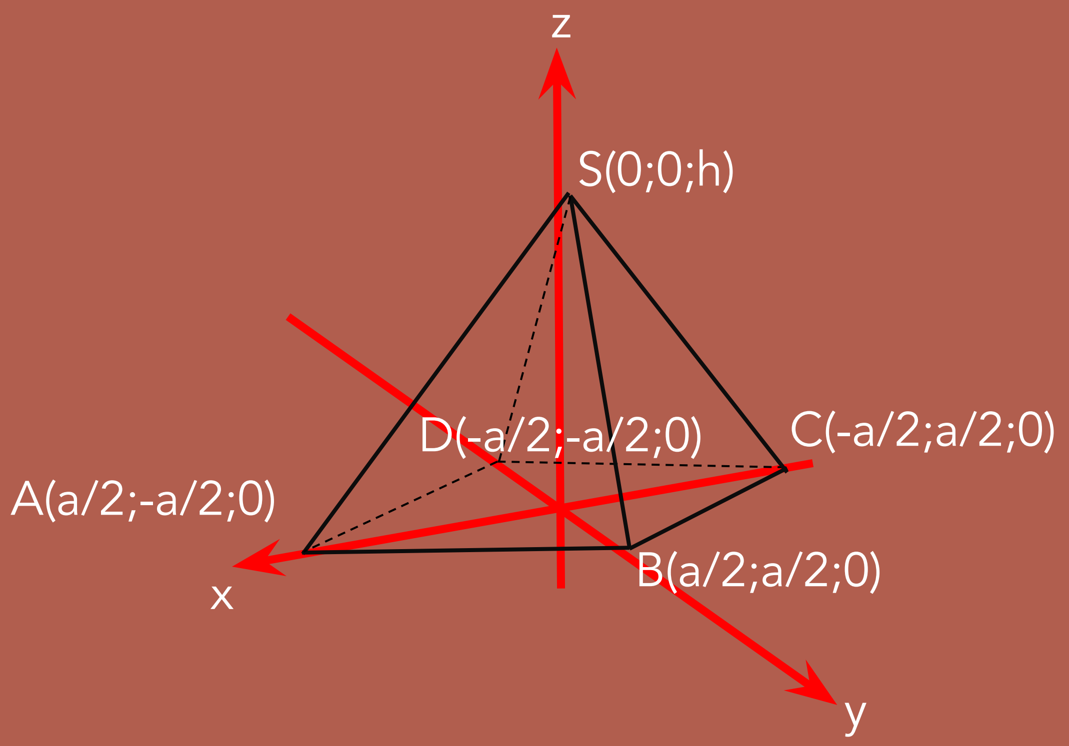
- Выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения.
- Находим координаты необходимых для нас точек.
- Решаем задачу ,используя основные способы решения методом координат.
- Переходим от аналитических соотношений к геометрическим.

Координаты многогранников

Правильная четырёхугольная пирамида



Прямоугольный параллелепипед



Основные виды задач.

Нахождение расстояния:

Между прямой и плоскостью

Между скрещивающимися прямыми

Между двумя точками

От точки до прямой

Нахождение угла:

Между двумя прямыми

Между прямой и плоскостью

Между плоскостями

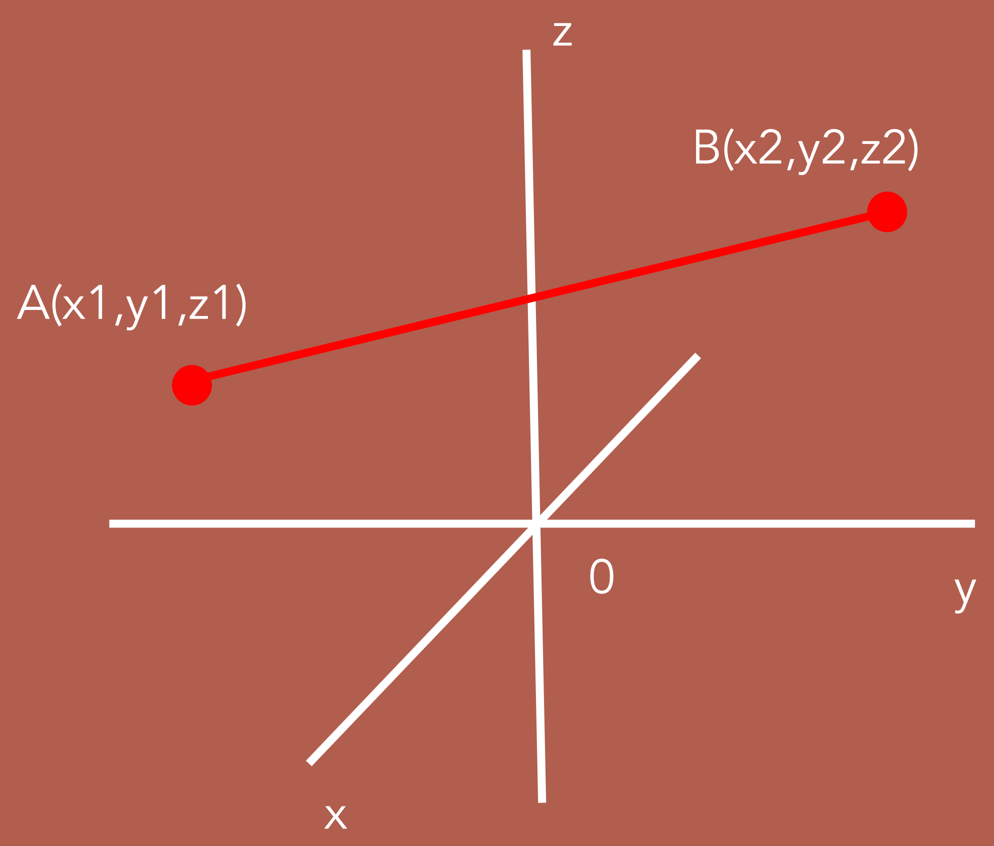
Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками A и B можно вычислить:

1) как длину отрезка AB, если отрезок AB удается включить в некоторый треугольник в качестве одной из его сторон

2) по формуле $p(A;B) = \sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)}$

3) по формуле $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$



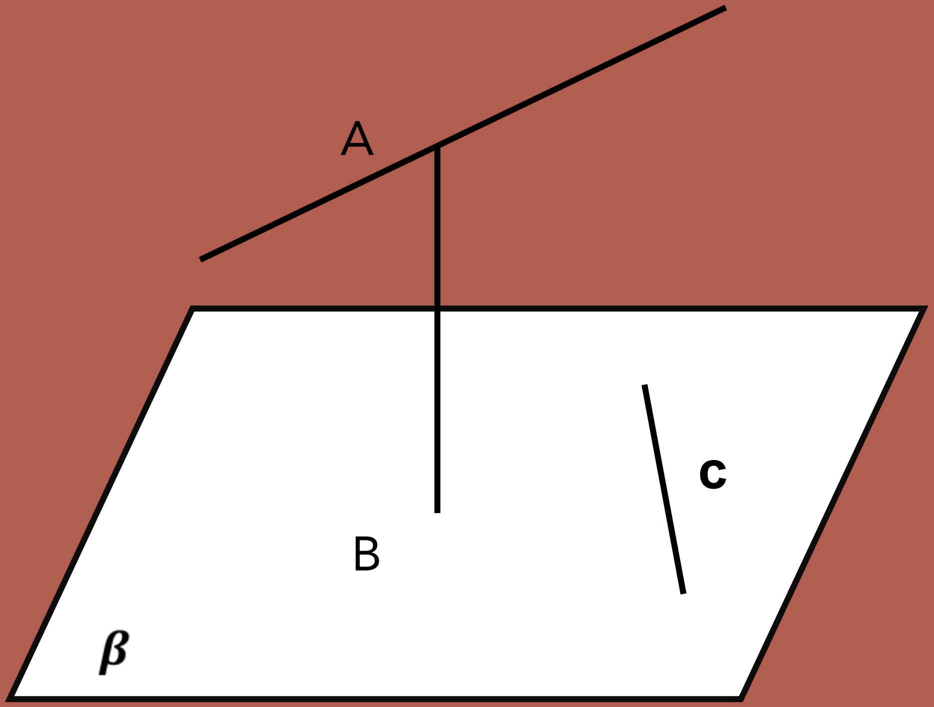
Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

1) равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой;

2) равно расстоянию между двумя параллельными плоскостями, содержащими эти прямые;

$$p(b; C) = p(b; \beta) = p(A; \beta)$$



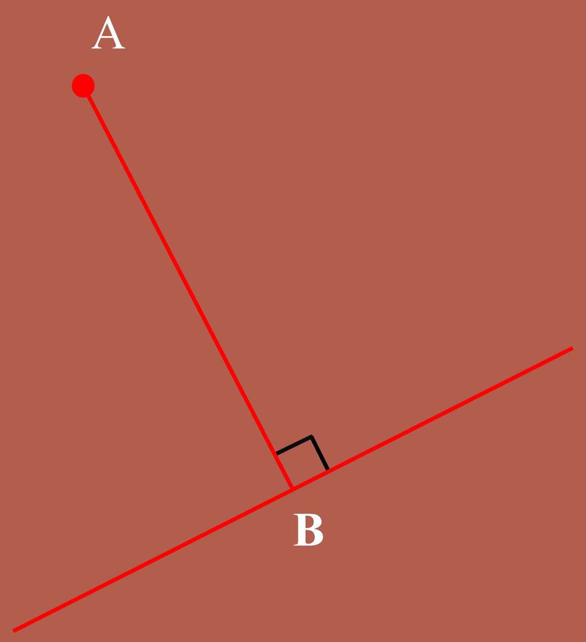
Расстояние от точки до прямой можно вычислить:

1) как длину отрезка перпендикуляра, если удается включить этот отрезок в некоторый треугольник в качестве одной из высот;

2)используя векторный метод;

3)используя координатно-векторный метод.

$$d = \frac{|A_x + B_y + C_z|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Расстояние от точки до плоскости

1) Равно расстоянию до плоскости
α от произвольной точки P, лежащей на прямой l, которая проходит через точку M и параллельна плоскости α ;

2) Равно расстоянию до плоскости
α от произвольной точки P, лежащей на плоскости β , которая проходит через точку M и параллельна плоскости α ;

3) Вычисляется по формуле $p(M; a) = p(M; ABC) = 3\frac{v_{\Delta BCM}}{s_{ABC}}$, где треугольник ABC расположен на плоскости a , объем пирамиды ABCM равен $v_{\Delta BCM}$

4) Вычисляется по формуле $p(M; a)\frac{|Ax_0+B_{y0}+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где $M(x0; y0; z0)$, плоскость a задана уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Нахождение угла между прямыми.

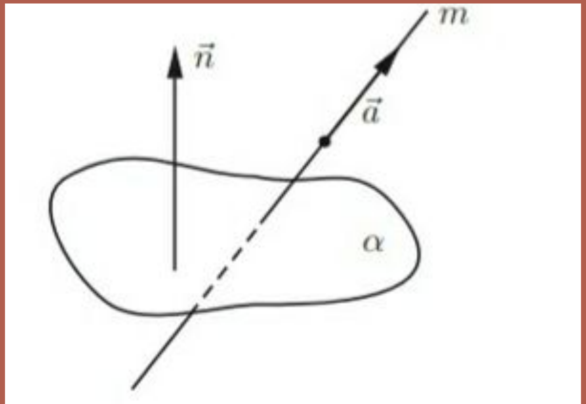
Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между двумя прямыми, параллельными им и проходящими через произвольную точку. Данный угол между двумя прямыми равен углу между их направляющими векторами. Таким образом, если нам удастся найти координаты направляющих векторов а (x1; y1; z1) иБ (x2; y2; z2), то сможем найти угол. Точнее, косинус угла по формуле:

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Алгоритм решение задач на нахождение угла между скрещивающимися прямыми

1. на рисунке изображаем указанные в задаче прямые (которым придаем направление, те. вектора)
2. вписываем фигуру в систему координат
3. находим координаты концов векторов
4. находим координаты векторов й
5. подставляем в формулу "косинус угла между векторами"
6. находим значение самого угла

Нахождение угла между прямой и плоскостью



- Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.
- Угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90
- Если прямая параллельна плоскости (или лежит в ней), то угол между ними считается равным 0

Угол между прямой и плоскостью можно вычислить:

1) если этот угол удается включить в прямоугольный треугольник в качестве одного из острых углов;

2) по формуле $\sin\varphi = \sin(l; a) = \dfrac{p(M; a)}{AM}$

Угол между плоскостями

Угол между пересекающимися плоскостями можно вычислить:

1) как угол между прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными к линии их пересечения;
2) как угол треугольника, если удается включить линейный угол в некоторый треугольник;

3) по формуле $\sin(a;b) = \dfrac{p(M;\beta)}{p(M;l)}$ где $M \in a$ $a \cap B = l$

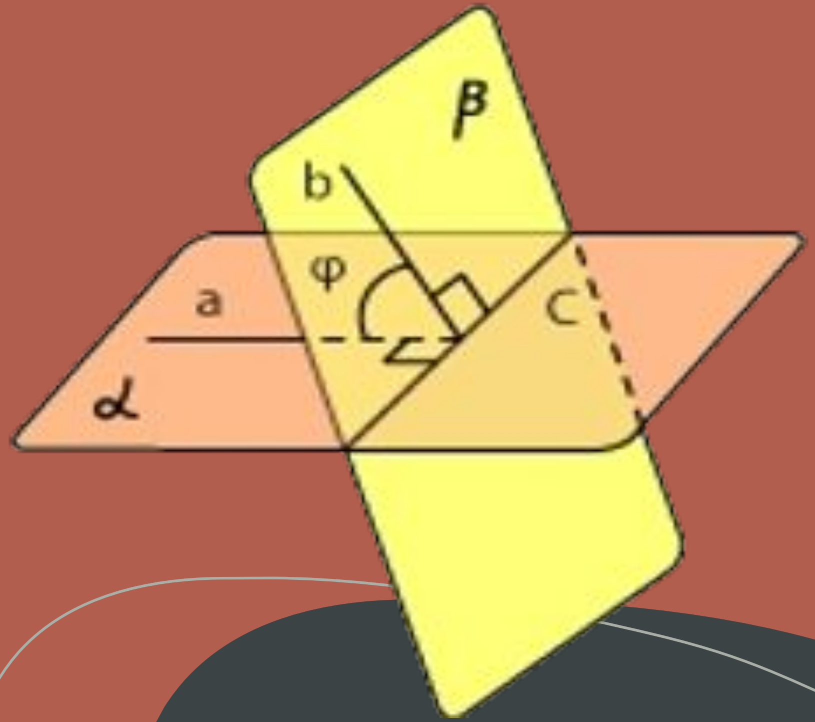
4) по формуле $\cos(a:\beta) = \dfrac{s'}{s}$ где S – площадь фигуры Ф, расположенной в плоскости α , S′

-

площадь проекции фигуры Ф на плоскость β ;

5) как угол между перпендикулярными им прямыми;

6) по формуле $\cos(a;\beta) = \dfrac{|\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$



В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S на сторонах AB и AC выбраны точки M и K соответственно так, что треугольник AMK подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия На прямой MK выбрана точка E так, что $ME : EK = 7 : 9$. Найти расстояние от точки E до плоскости BSC, если сторона основания пирамиды равна 6, а высота пирамиды равна

Решим задачу векторно-координатным методом.

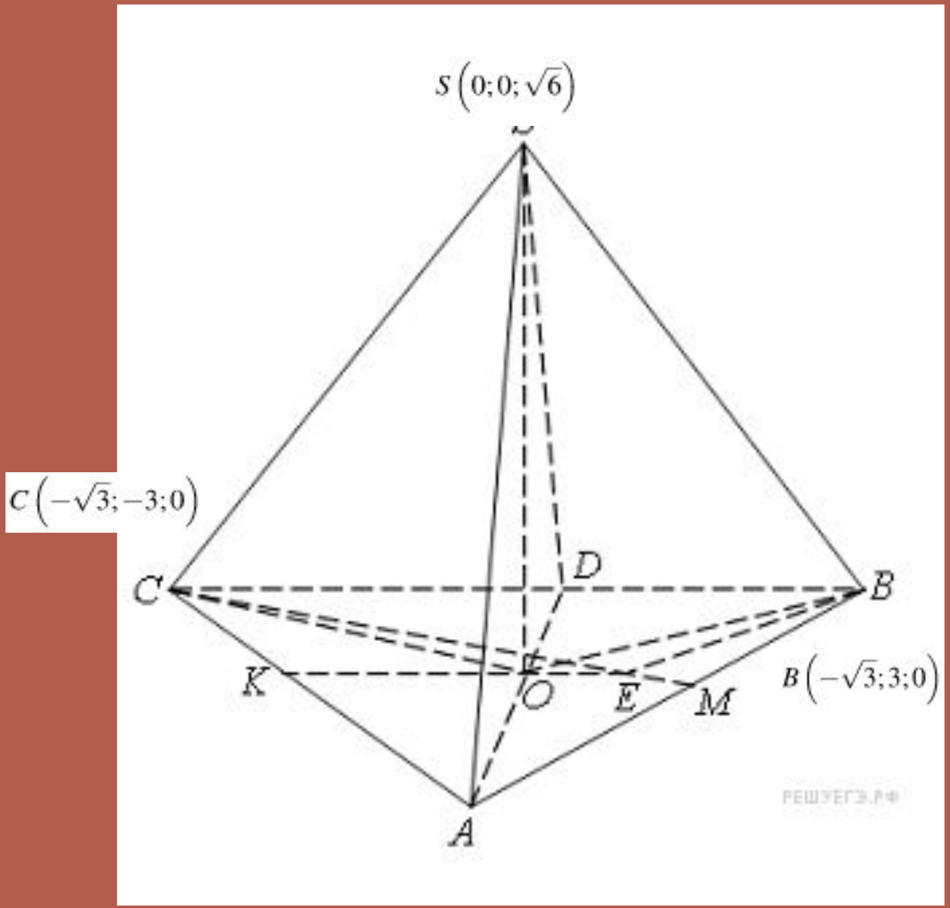
$$\begin{cases} \sqrt{6} + d = 0 \\ -\sqrt{3}a - 3b + d = 0 \\ -\sqrt{3}a + 3b + d = 0 \end{cases}$$

$$C = -\frac{d}{\sqrt{6}} \qquad -2\sqrt{3}a + 2d = 0 \qquad a = \frac{d}{\sqrt{3}} \qquad b = 0$$

$$\frac{d}{\sqrt{3}}x - \frac{d}{\sqrt{6}}z + d = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{2}x - 2 + \sqrt{6} = 0$$

$$\text{ME}= \frac{KM \cdot 7}{16} = \frac{4 \cdot 7}{16} = \frac{7}{4}\frac{KM \cdot 7}{16} \qquad OM = \frac{KM}{2} = 2 \qquad E\left(0; \frac{1}{4}; 0\right)$$

$$p = \frac{\left|\sqrt{2} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot 0 + \sqrt{6}\right|}{\sqrt{2 + 0 + 1}} = \sqrt{2}$$



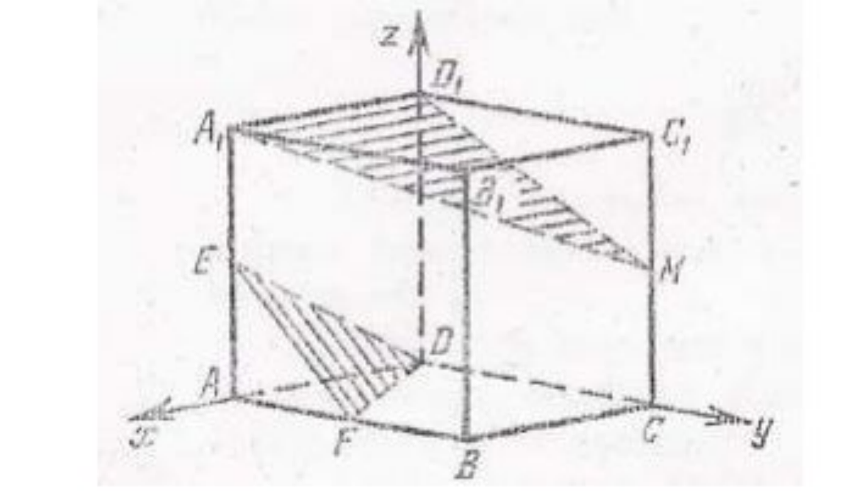
В кубе точки E, F, M – середины ребер AA 1 , AB 1 , CC 1 соответственно. Найти угол между плоскостями EFD и A 1 D 1 M.

Решение:D(0;0;0),E(a;0;a/2),F(a;a/2;0);A1(a;0;a),D1(0;0;a),M(0;a;a/2)

EFD x-2y-2z=0 и A1D1M y+2z-2a=0

n1(1;-2;-2) n2(0;1;2)

$$\cos\varphi = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2|}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{1 \cdot 4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



Используемая литература.

- Атанасян Л.С.и др. Геометрия, 10-11: учеб. для общеобразоват.

учреждений: базовый и профил. уровни.- 17 —е изд.- М. : Просвещение,2008.

- http://www.cleverstudents.ru
- Корьянов А.Г. Математика. ЕГЭ 2010. Задания типа С1-С5.

Вывод:

Существует ряд стереометрических задач, для которых более рациональным методом решения является не поэтапно-вычислительный, а координатный.

Спасибо за внимание.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что AC' перпендикулярна прямой BE.

б) Найдите угол между прямой AC' и плоскостью ACD'.

а) Проекция прямой AC' на плоскость ABC − прямая AC. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AC и BE перпендикулярны. Тогда, по теореме о трех перпендикулярах, $AC' \perp BE$.

б) Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. В этой системе координат:

$$A(0;0;0),\ C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right),\ C'\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right),\ D'\left(1;\sqrt{3};1\right),\text{ откуда } \vec{AC'}=\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right).$$

Плоскость ACD' проходит через начало координат, ее уравнение имеет вид $Ax+By+Cz=0$. Для координат точек C и D' имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{3}{2}A+\frac{\sqrt{3}}{2}B+0C=0,\\ A+\sqrt{3}B+C=0.\end{cases}$$

Не теряя общности, положим $A=1$, тогда $B=-\sqrt{3}, C=2$. Уравнение плоскости ACD': $x-\sqrt{3}y+2z=0$, вектор нормали к ней $\vec{n}=(1;-\sqrt{3};2)$. Тогда искомый угол между прямой AC' и плоскостью ACD' равен

$$\arcsin\frac{|\vec{AC}\cdot\vec{n}|}{|\vec{AC}||\vec{n}|}=\arcsin\frac{\left|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+2\right|}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}+1}}=\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$