

Осцилляторный потенциал + дельта-функция в электрическом поле (ТВ для близких уровней)

Уравнение Шрёдингера для заряженной частицы в осцилляторном потенциале+дельта-функция при наложении «слабого» однородного электрического поля

$$\left(\hat{H}_0 + V\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

Невозмущённый гамильтониан

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \alpha \cdot \delta(x), \quad \hat{H}_0 \psi_m^{(0)}(x) = E_m^{(0)} \psi_m^{(0)}(x)$$

Слабопроницаемый барьер

$$a_o = (\hbar / m\omega)^{1/2}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad \xi = \frac{m\alpha a_o}{\hbar^2}, \quad \frac{\xi}{ka_o} \ll 1$$

Энергии чётных (+) и нечётных (-) и уровней

$$E_n^{(+)} = \hbar\omega \left((2n+1) + \frac{1}{2} - \frac{2k^{(0)}a_o}{\xi} \right), \quad k_n^{(0)} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \cdot \hbar\omega \left((2n+1) + \frac{1}{2} \right)}, \quad E_n^{(-)} = \hbar\omega \left((2n+1) + \frac{1}{2} \right)$$

«Возмущающий» потенциал

$$V(x) = -qE_{el}x$$

«Близкие» уровни в дублете (один и тот же номер n)

$$\left| E_n^{(+)} - E_n^{(-)} \right| = \hbar \omega \cdot \frac{2k^{(0)}a_o}{\xi} \leq \left\langle \psi_n^{(\pm)} \left| V \right| \psi_n^{(\mp)} \right\rangle$$

$$\left| E_n^{(+)} - E_m^{(-)} \right|_{n \neq m} \approx \hbar \omega |n - m| \approx \left\langle \psi_n^{(\pm)} \left| V \right| \psi_m^{(\mp)} \right\rangle, \left\langle \psi_n^{(\pm)} \left| V \right| \psi_m^{(\pm)} \right\rangle$$

Модифицируем теорию возмущений

Исходные соотношения «невыврожденной» теории возмущений

$$\psi_l = \sum_n c_{nl} \psi_n^{(0)}$$

$$c_{ml} (E_l - E_m^{(0)}) = \sum_n V_{mn} c_{nl}$$

$$c_{ml}^{(1)} = \frac{V_{ml}}{E_l^{(0)} - E_m^{(0)}}, \quad m \neq l$$

Пусть два уровня l_1, l_2 «близки друг к другу».

Как модифицировать теорию возмущений?

Нулевое приближение для волновой функции l_I -ого уровня

$$\psi_{l_1} = c_{l_1 l_1} \psi_{l_1}^{(0)} + c_{l_2 l_1} \psi_{l_2}^{(0)}$$

Для удобства упростим обозначения

$$\psi = c_1 \psi_1^{(0)} + c_2 \psi_2^{(0)}$$

Получить уравнение для коэффициентов c_i ?

Уравнение Шрёдингера в нулевом приближении

$$\begin{cases} c_1 (E_1^{(0)} + V_{11} - E) + V_{21} c_2 = 0 \\ V_{12} c_1 + c_2 (E_2^{(0)} + V_{22} - E) = 0 \end{cases}$$

Для рассматриваемого возмущения

$$V_{11} = V_{22} = 0$$

$$V_{12} = V_{21} = \langle \psi_n^{(\pm)} | V | \psi_n^{(\mp)} \rangle$$

Найти изменение уровней энергии и «правильные» волновые функции?

Указание: при вычислении в.ф. использовать новую переменную

$$\tan \beta = \frac{2V_{12}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}$$

Уровни энергии

$$E = \frac{1}{2} \cdot \left[E_1^{(0)} + E_2^{(0)} \pm \sqrt{\left(E_1^{(0)} - E_2^{(0)} \right)^2 + 4|V_{12}|^2} \right]$$

Если диагональные элементы возмущения не равны нулю, то надо сделать замену

$$E_1^{(0)} \rightarrow E_1^{(0)} + V_{11}, \quad E_2^{(0)} \rightarrow E_2^{(0)} + V_{22}$$

Проверка: найти энергии в пределе

$$\left| E_n^{(+)} - E_n^{(-)} \right| = \hbar \omega \cdot \frac{2k^{(0)}a_o}{\xi} \hbar \left\langle \psi_n^{(\pm)} \left| V \right| \psi_n^{(\mp)} \right\rangle ?$$

Соотношение для коэффициентов в.ф.

$$\frac{c_1^{(+)}}{c_2^{(+)}} = \cot \frac{\beta}{2}, \quad \frac{c_1^{(-)}}{c_2^{(-)}} = -\tan \frac{\beta}{2}$$

«Правильные» волновые функции

$$\psi^{(+)} = \cos \frac{\beta}{2} \cdot \psi_1^{(0)} + \sin \frac{\beta}{2} \cdot \psi_2^{(0)}$$

$$\psi^{(-)} = -\sin \frac{\beta}{2} \cdot \psi_1^{(0)} + \cos \frac{\beta}{2} \cdot \psi_2^{(0)}$$

Найти в.ф. в пределе

$$\left| E_n^{(+)} - E_n^{(-)} \right| = \hbar \omega \cdot \frac{2k^{(0)} a_o}{\xi} \hbar \left\langle \psi_n^{(\pm)} \left| V \right| \psi_n^{(\mp)} \right\rangle ?$$

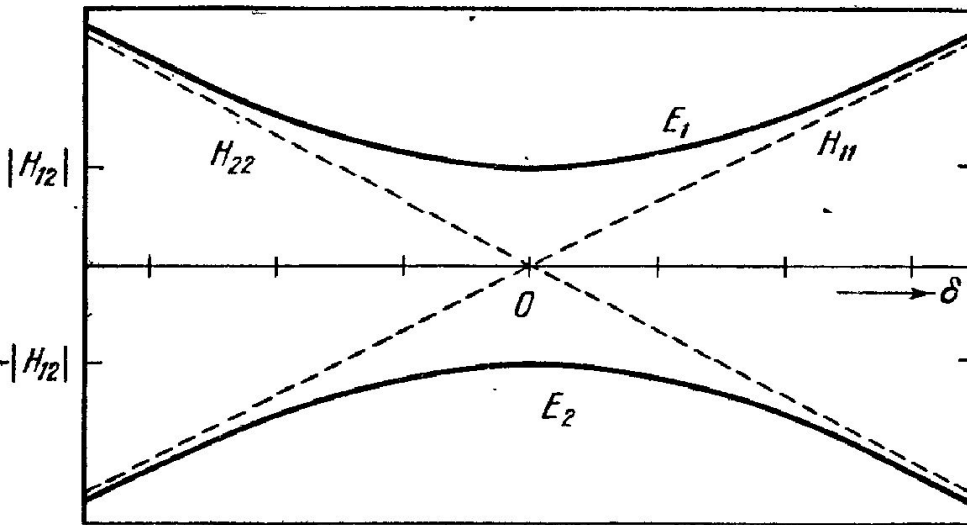
«Отталкивание уровней»

Двукратно вырожденный уровень энергии

$$E_1^{(0)} = E_2^{(0)} = 0, \quad V_{11}, V_{22} \neq 0$$

$$E^{(\pm)} = \frac{(V_{11} + V_{22})}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(V_{11} - V_{22})^2 + 4|V_{12}|}, \quad \Delta E = \sqrt{(V_{11} - V_{22})^2 + 4|V_{12}|}$$

Предположим, что недиагональный элемент «медленно» зависит от величины возмущения



Возмущение нарушает симметрию невозмущённого гамильтониана – вырождение снимается. С увеличением возмущения уровни «расталкиваются».

Уровни энергии E_1 и E_2 в зависимости от разности энергий $\delta = H_{11} - H_{22}$ невозмущенной системы. Значения H_{11} и H_{22} указаны штриховыми линиями.

$$E^{(+)} \equiv E_1, \quad E^{(-)} \equiv E_2, \quad H_{1(2)1(2)} \equiv E_{1(2)}^{(0)} + V_{1(2)1(2)}$$