§6. Аксиоматическое определение вероятности события.

- Определение. Пусть Ω - пространство элементарных событий, *и*-алгебра событий, А - событие, принадлежащее алгебре событий. Вероятностью Р(А) события А называется числовая функция, определенная для любого А из *и* и удовлетворяющая следующим условиям (аксиомам):

✔ 1) Р(А) всегда неотрицательна ($P(A) \geq 0$)

✔ 2) $P(\Omega) = 1$

✔ 3) $P(\Sigma A_к) = \Sigma P(A_к)$ - для несовместных событий $A_1, A_2, \ldots A_n$ ($A_i A_j = \varnothing$)

Свойства вероятности

1. Вероятность противоположного события: $P(\bar{A})=1-P(A)$

Док-во. $P(\Omega)=\underline{1}$ (*акс.2*) $= P(\bar{A}+A) = \underline{P(\bar{A})+P(A)}$ (*акс.3*) $\rightarrow P(\bar{A})=1-P(A)$

2. Формула сложения вероятностей (вероятность суммы двух <u>совместных</u> событий): $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

Док-во. $P(A+B)= P(A+B\bar{A})= P(A)+ \underline{P(B\bar{A})}$ (*акс.3*)

$$P(B)= P(AB+B\bar{A})= P(AB)+ \underline{P(B\bar{A})} \rightarrow P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

3. Монотонность вероятности: пусть событие $A \subset B$, тогда $P(B) \geq P(A)$

Док-во. $P(B)= P(AB+B\bar{A})= P(A)+ P(B\bar{A}) \geq P(A)$ (*акс.1*) , ч.т.д.

- Определение. Тройка (Ω, u, p) образует вероятностное пространство.

§7. Условные вероятности

- Определение. Условной вероятностью $P(B/A)=P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже произошло.

Пример. В урне 3 белых и 3 черных шара, из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность извлечь черный шар при втором испытании, если при первом испытании был извлечен белый шар.

Решение.

A={при первом испытании извлечен белый шар};

B={при втором испытании извлечен черный шар}

P(B/A) - ?

Способ 1. $P(B/A)=\frac{3}{5}$

Способ 2.

P(AB)=$\frac{N_{AB}}{N} = \frac{N_{AB}}{N_A}\frac{N_A}{N} =$ P(B/A)P(A)

P(B/A)=P(AB)/P(A) – формула для вычисления условной вероятности.

N – количество различных пар в Ω; N=6*5=30

N_A – количество различных пар в Ω, у которых при первом испытании извлечен белый шар; N_A=3*5=15

N_{AB} – количество различных пар в Ω, у которых при первом испытании извлечен белый шар, а при втором – черный; N_{AB} =3*3=9

P(AB)$= \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$;   P(A)$= \frac{1}{2}$;   P(B/A)$= \frac{3}{10} : \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$

§8. Вероятность произведения событий

- Вероятность произведения событий A и B вычисляется по формуле

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B),$$

которую называют формулой умножения вероятностей.

Если число рассматриваемых событий больше двух, то вероятность произведения событий следует вычислять, последовательно применяя формулу умножения вероятностей. Например, для трех событий

$$P\,(ABC)=P(AB)P(C/AB)=P(A)P(B/A)P(C/AB)$$

- Определение. События A и B называются независимыми, если $P(AB)=P(A)P(B)$. Для независимых событий $P(B/A)=P(B)$.

Замечание. Независимые события всегда совместны. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

- Определение. События $A_1, A_2, \dots A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любого $1 \le k \le n$ и любого набора различных между собой индексов $i_1, i_2 \dots i_k$ имеет место равенство:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

Замечание. Если события независимы в совокупности, то они попарно независимы, т.е. любые два события независимы. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: из попарной независимости не вытекает независимость в совокупности.

Пример. Производится бросание двух игральных костей.

A = {на первой кости выпало четное число очков}

B= {на второй кости выпало нечетное число очков}

C = {сумма очков четна}

Являются ли события попарно независимыми и независимыми в совокупности?

Решение.

P(ABC)=0; P (A)=P(B)=P(C)=1/2; P (AC)=P(AB)=P(CB)=1/4

Вывод.

События попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

§8. Формула полной вероятности

- Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

✓ события H_1, H_2,…..H_n – попарно несовместные события, т.е. $H_i\ H_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$;

✓ события обладают конечными вероятностями $P(H_i) > 0$;

✓ событие A наступает только вследствие наступления одного из событий H_i, т.е. $A \in H_1 + H_2 + \ldots + H_n$.

Тогда вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + \ldots + P(A/H_n)P(H_n)$$

(формула полной вероятности)

Замечания.

1. Если события H_1, H_2,…..H_n – попарно несовместные события и $H_1+H_2+\ldots.+H_n = \Omega$, то множество событий H_1, H_2,….., H_n называется полной группой событий.

2. Часто события H_1, H_2,….., H_n называют гипотезами.

3. Формула полной вероятности работает в том случае, если множество гипотез H_i счетно.

Пример.

На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит – 25%, вторая – 35%, третья – 40% всей продукции. Брак в продукции составляет 5%, 4% и 2% соответственно. Какова вероятность того, что случайно выбранный болт оказался дефектным? (0,0345)

Решение.

A={случайно выбранный болт оказался дефектным}; P(A)=?

H_i={случайно выбранный болт изготовлен *i*-ой машиной}; i=1,2,3.

$P(H_1)=0,25$; $P(H_2)=0,35$; $P(H_3)=0,4$;

$P(A/H_1)=0,05$; $P(A/H_2)=0,04$; $P(A/H_3)=0,02$

P(A)= 0,25*0,05+ 0,35*0,04+0,4*0,02=0,0345

§9. Формула Байеса

Если до опыта вероятности гипотез были $P(H_i)$, а в результате опыта появилось событие A, то с учетом этого события "новые", т.е. условные вероятности гипотез вычисляются по формуле Байеса:

$$P(H_k/A) = P(H_k)P(A/H_k)\,/P(A),\text{ где}$$

$P(H_k)$ - априорная вероятность гипотезы H_k;
$P(H_k/A)$ - апостериорная вероятность гипотезы H_k ;
$P(A/H_k)$ - вероятность наступления события A при истинности гипотезы H_k;
$P(A)$ - полная вероятность наступления события A.

Формула Байеса позволяет «переставить причину и следствие»: по известному факту наступления события вычислить вероятность того, что оно было вызвано данной причиной.

Пример (см. пред. параграф).

На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит – 25%, вторая – 35%, третья – 40% всей продукции. Брак в продукции составляет 5%, 4% и 2% соответственно. Случайно выбранный болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он изготовлен первой машиной? (≈0,36)

Решение.

$P(H_1/A)$ - ?

$P(H_1/A) = P(H_1)P(A/H_1)\ /P(A)=0{,}25*0{,}05/0{,}0345 \approx 0{,}36$