Предел функции в точке

900igr.net

ЗАДАНИЕ

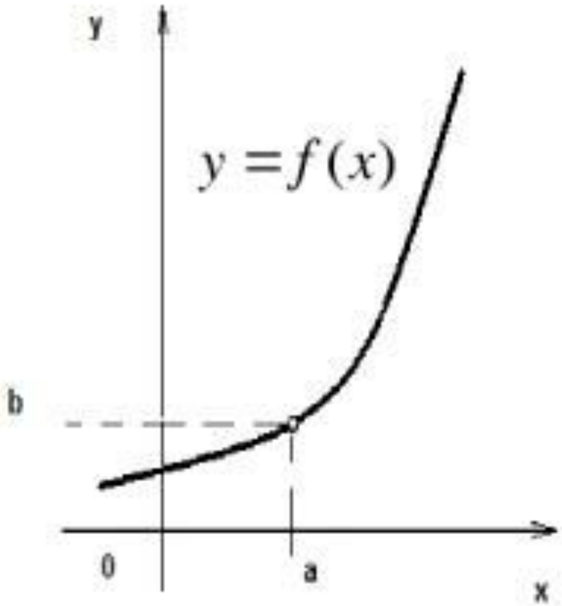
- Прочитать презентацию
- Сделать конспект
- Разобрать решенные примеры
- Выполнить домашнее задание

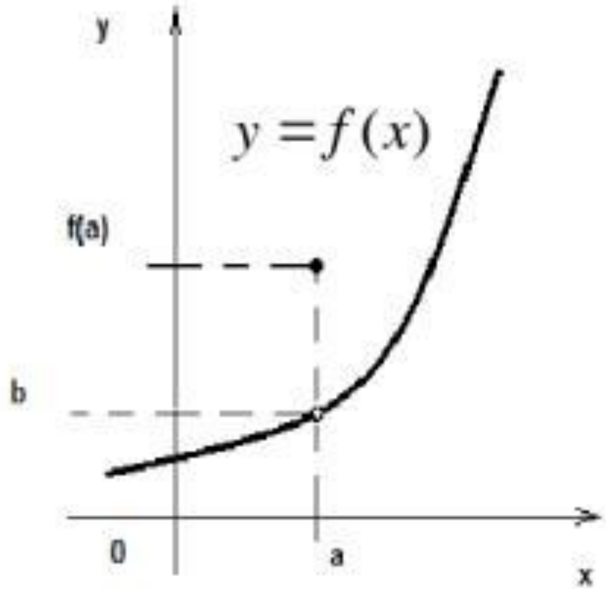
Предел функции

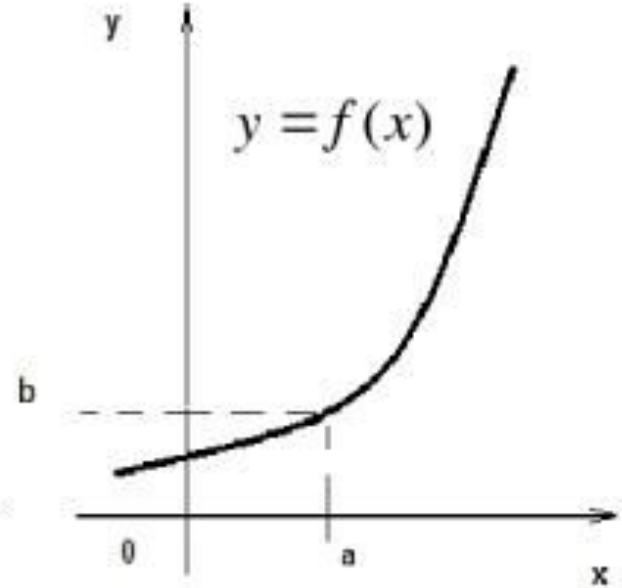
Предел *– одно из основных понятий математического анализа.* Понятие предела использовалось еще Ньютоном во второй половине XVII века и математиками XVIII века, такими как Эйлер и Лагранж, однако они понимали предел интуитивно. Первые строгие определения предела дали Больцано в 1816 году и Коши в 1821 году.

РАЗЛИЧАЮТ – предел функции в точке И предел функции на бесконечности.

Рассмотрим функции, графики которых изображены на следующих рисунках:

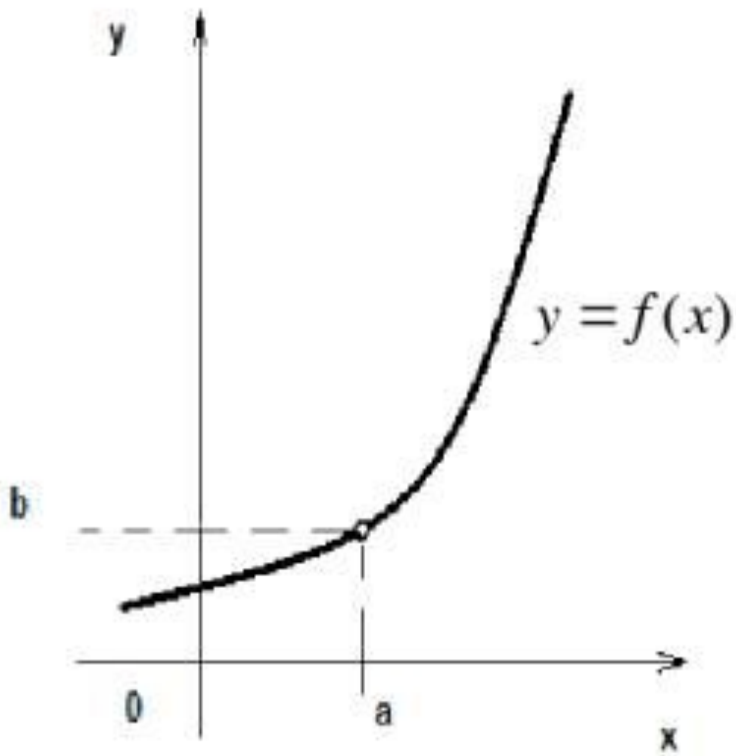




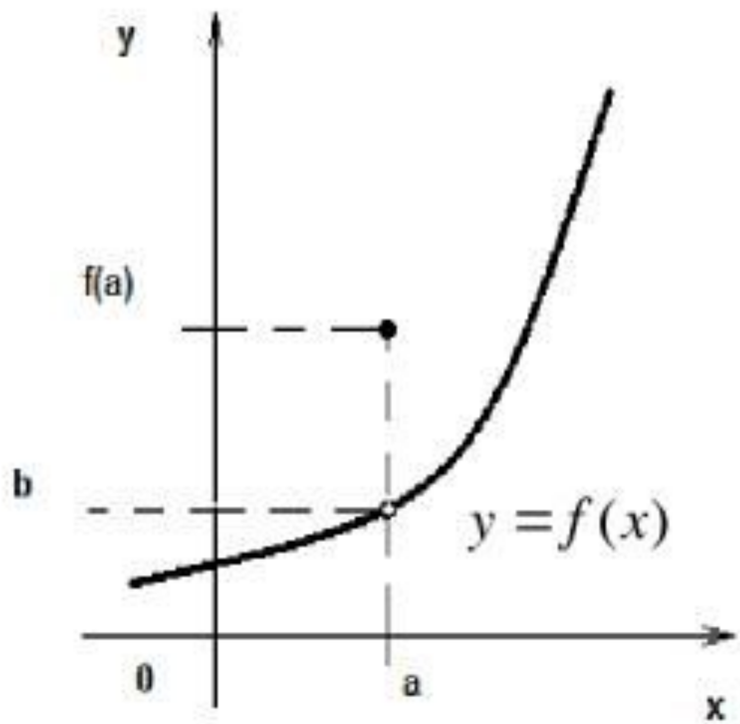


Во всех трех случаях изображена одна и та же кривая, но все же изображают они три разные функции, отличающиеся друг от друга своим поведением в точке $x = a$.

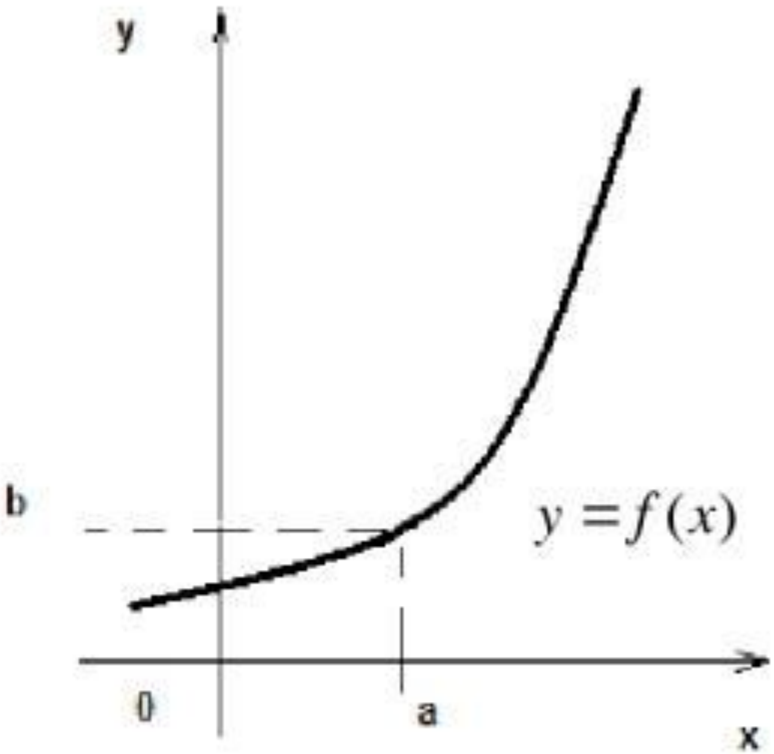
Рассмотрим каждый из этих графиков подробнее:



Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на этом рисунке, значение $f(a)$ не существует, функция в указанной точке не определена.



Для функции $y=f(x)$ график которой изображен на этом рисунке, значение $f(a)$ существует, но оно отличное от, казалось бы, естественного значения b, точка $(a,\ b)$ как бы выколота.



Для функции $y=f(x)$, график которой изображен на этом рисунке, значение $f(a)$ существует и оно вполне естественное.

Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

которую читают: «предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b ».

Содержательный смысл этой фразы следующий: *если значения аргумента выбирать все ближе и ближе к значению* $x = a$, *то значения функции все меньше и меньше отличаются от предельного значения* b.

Или можно сказать так: в достаточно малой окрестности точки a *справедливо приближенное равенство:*

$$f(x) \approx a$$

При этом сама точка $x = a$ исключается из рассмотрения.

Функцию $y = f(x)$ *называют* **непрерывной на промежутке** X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Примерами непрерывных функций на всей числовой прямой являются: $y = C$, $y = kx + b$, $y = ax^2 + by + c$, $y = |x|$, $y = x^n$, $n \in \mathrm{N}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на луче $[0, +\infty)$, а функция $y = x^{-n}$, $n \in \mathrm{N}$ непрерывна на промежутках $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. А функции $y = tgx$, $y = ctgx$ непрерывны на каждом промежутке из области их определения.

Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может самой точки x_0.

Число A называют пределом функции в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех x из δ – окрестности точки x_0 справедливо неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Теорема.

Если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, то этот предел **единственный**.

Прежде чем перейти к разбору решений примеров заметим, что если предел функции $y=f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке $x=a$, то в таком случае функцию называют *непрерывной.*

График такой функции представляет собой сплошную линию, без «проколов» и «скачков».

Математики доказали утверждение, которое мы будем использовать при вычислении пределов функции в точке:

Если выражение $f(x)$ составлено из рациональных, иррациональных, тригонометрических выражений, то функция $y = f(x)$ непрерывна в любой точке, в любой точке, в которой определено выражение $f(x)$.

Вычисление пределов

Вычисление предела:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию *f(x)*.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x-1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения x_0 в функцию *f(x)* получаются выражения вида:

то предел будет равен:

$$\frac{C}{0} = \infty \qquad \frac{C}{\infty} = 0$$

Примеры

Вычислить:

$$а)\ \lim_{x\to 1}(x^2 - 3x + 5);\quad б)\ \lim_{x\to 2}\frac{\cos\frac{2\pi}{x}}{3x - 1};\quad в)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2 - 3x}{x - 3}.$$

Решение.

Выражение $(x^2 - 3x + 5)$ определено в любой точке x, в частности, в точке $x = 1$. Следовательно, функция $y = x^2 - 3x + 5$ непрерывна в точке $x = 1$, а потому предел функции при стремлении x к 1 равен значению функции в точке $x = 1$.

Имеем: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 3x + 5) = 1^2 - 3\cdot 1 + 5 = 3.$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos\frac{2\pi}{x}}{3x-1}.$

Решение.

Выражение $f(x)=\dfrac{\cos\frac{2\pi}{x}}{3x-1}$ определено в любой точке x, за исключением $x=0$ и $x=\dfrac{1}{3}$. В частности, в точке $x=2$ функция определена. Следовательно, функция $f(x)=\dfrac{\cos\frac{2\pi}{x}}{3x-1}$ непрерывна в точке $x=2$, а потому предел функции при стремлении x к 2 равен значению функции в точке $x=2$.

Имеем: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos\frac{2\pi}{x}}{3x-1}=\dfrac{\cos\pi}{3\cdot 2-1}=\dfrac{-1}{5}=-0{,}2.$

Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \infty - \infty$$

Эти выражения называются ***неопределенности,*** а вычисление пределов в этом случае называется ***раскрытие неопределенности***.

Правило № 1

- В большинстве случаев, чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, достаточно числитель и знаменатель дроби разделить на множители, и затем сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

в) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

Решение.

Выражение $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 3}$ не определено в точке $x = 3$, поскольку при подстановке этого значения переменной в заданное выражение, то и в числителе, и в знаменателе получится 0, а на 0 делить нельзя.

Однако, заданную алгебраическую дробь можно сократить

$$\frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \frac{x(x - 3)}{x - 3} = x.$$

Значит, функции $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 3}$ и $y = x$ тождественны при условии $x \neq 3$. Но при вычислении предела функции при $x \to 3$ саму точку $x = 3$ можно исключить из рассмотрения (об этом говорилось выше). Поэтому: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} x = 3$.

Практическое приложение темы «Предел функции в точке».

№1 Вычислить

а) $\lim_{x \to 2}(2x+1) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

б) $\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{1} = 1$

в) $\lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9$

г) $\lim_{x \to 2} 5^x = 5^2 = 25$

д) $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$

№2. Вычислить пределы функций

а) $\lim_{x \to 0} \frac{5-3^x}{3+2^x} = \frac{5-3^0}{3+2^0} = \frac{5-1}{3+1} = \frac{4}{4} = 1$

б) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x+3}{x+1} = \frac{2^2+2+3}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$

№3. Вычислить.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(-1)^2-1}{-1+1}=\left[\frac{0}{0}\right]$ неопределенность, которую нужно решить, т.е. сократить дробь

$=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}(x-1)=-1-1=-2$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{4^2-16}{4-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}(x+4)=4+4=8$

в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-4x+3}=\frac{3-3}{3^2-4\cdot 3+3}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{(x-1)}=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$

* Разложим знаменатель на множители:

$x^2-4x+3=0$

$\begin{cases}x_1+x_2=4\\ x_1\cdot x_2=3\end{cases}\quad\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=1\end{array}\right.$

№4. Вычислить

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)^2-4}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2-2)(x-2+2)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-4)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x-4)=0-4=-4.$

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{-2+3}{-2-1}=-\dfrac{1}{3}$

$*\quad x^2+5x+6=0 \qquad **\quad x^2+x-2=0$

$\begin{cases}x_1+x_2=-5\\ x_1\cdot x_2=6\end{cases}\ \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=-3\end{array}\right. \qquad \begin{cases}x_1+x_2=-1\\ x_1\cdot x_2=-2\end{cases}\ \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=1\end{array}\right.$

Правило № 2

- Чтобы раскрыть неопределенность данного вида, зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность (или иррациональности) из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

№ 5. Вычислить.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

Домножим и числитель и знаменатель на сопряжённое число числителю

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})(x+\sqrt{x})} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{x^2+2x\sqrt{x}+x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x(x+2\sqrt{x}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x+2\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{0+2\sqrt{0}+1} = \dfrac{1}{1} = 1$

б) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5-1}+2} = \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$

Домашние задание.

Вычислить.

а) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+1)$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x}$

в) $\lim\limits_{x\to -9}\dfrac{x^2-81}{x+9}$; г) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{25-x^2}{x+5}$

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2x}$