Шкалирование информации

Лектор: Цехан Ольга Борисовна

Следует повторить

- *Понятие информации*
- *Понятие измерения*
- *Методы экспертных оценок*

Входной контроль

Система предпочтений ЛПР

Система предпочтений ЛПР– это совокупность правил (система его субъективных оценок, личных внутренних психологических установок), определяющих приоритеты при выборе из множества альтернатив.

Система предпочтений ЛПР определяется многими факторами:

· понимание проблемы и перспектив развития;

· текущая информация о состоянии некоторой операции и внешние условия ее протекания;

· директивы от вышестоящих инстанций и различного рода ограничений;

· юридические, экономические, социальные, психологические факторы, традиции и др.

Рис. Структурная схема *системы предпочтений ЛПР*

Самопроверка (напоминание)

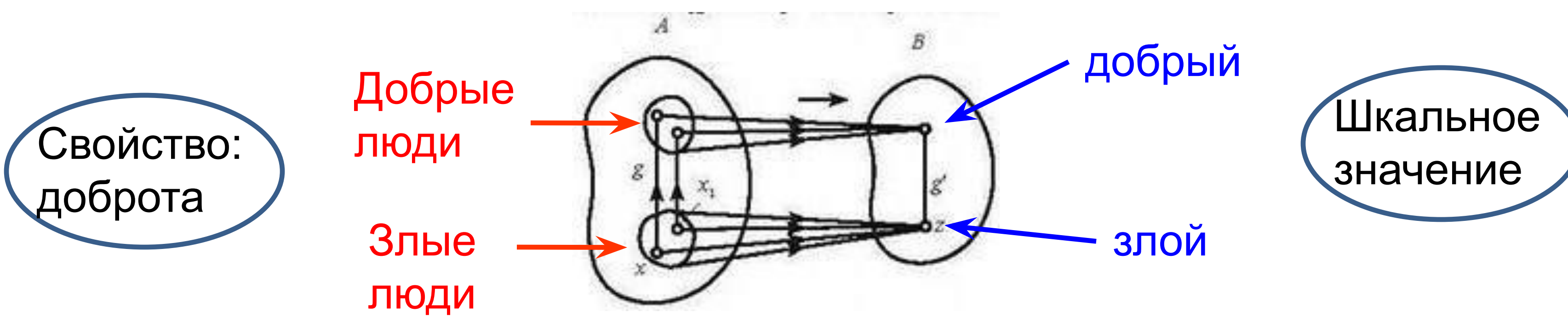
Измерение – процедура отображения **значений (силы)** измеряемого свойства на определенную знаковую (например, числовую) систему с соответствующими отношениями между знаками (числами).

Знаковые системы называются **шкалами**.

Измеряются: Свойства объектов (1возраст, 2доброта)

При измерении исследуемым **свойствам** сопоставляются определенные **значения** на выбранной шкале (10лет, злой).

Важно, чтобы на множестве шкальных значений можно было установить *отношение*, соответствующее измеряемому отношению между реальными объектами (старше, добрее).



План лекции

- Понятие шкалы
- Типы шкал (назначение, сохраняемые отношения, примеры, допустимые статистические и арифметические операции, допустимые преобразования)
  - Номинальная
  - Порядковая
  - Интервальная
  - Отношений
  - Разностей
  - Абсолютная
  - Нечеткая (каждая градация шкалы есть нечеткое множество)

Понятие шкалы

При измерении объектов **значения измеряемого свойства** отображаются на **шкалу** – определенную **знаковую систему с соответствующими отношениями между знаками** (числами).

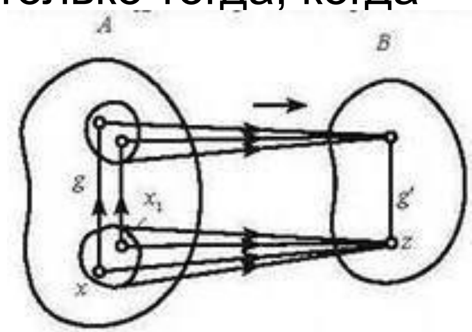
Шкала – это кортеж из трех элементов: $< X, \phi, Y >$

$X = \{x_1, \dots, x_n, R_x\}$ - эмпирическая система, включающая множество x_i на которых задано некоторое отношение R_x {люди, старше}. X – реальный объект

$Y = \{\phi(x_1), \dots, \phi(x_n), R_y\}$ – знаковая система, включающая значения измеряемых свойств φ (x_i) с отношением R_y {R, {>,<,=}}. Y - модель

$\phi \in \Phi$ – гомоморфное отображение X на Y, такое, что:

$\{\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)\} \in R_y$ только тогда, когда $\{x_1, \dots, x_n\} \in R_x$

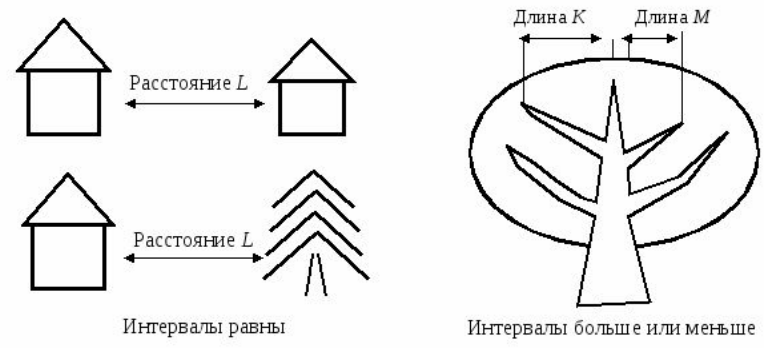


Шкала – это гомоморфизм эмпирической системы с отношениями *X* в знаковую систему с отношениями *Y.*

Образы элементов эмпирической системы называются *шкальным значениями*.

Атрибуты измерительных шкал

Упорядоченность данных. Показывает, что один пункт шкалы, соответствующий выраженности измеряемого свойства, больше, меньше или равен другому пункту



Интервальность пунктов шкалы. Означает, что интервал между любой парой чисел, соответствующих выраженности измеряемого свойства, больше, меньше или равен интервалу между другой парой чисел. Например, расстояния между городами можно измерить и, соответственно, можно найти 2 пары городов, находящихся на одном расстоянии (интервалы равны) или на разных расстояниях (интервалы не равны)

Нулевая точка (или точка отсчета). Соответствует полному отсутствию измеряемого и свойства.
Например, про некоторый сосуд можно сказать, что он пуст, т.е. количество воды в нём – 0, а про времена года нельзя сказать, что наступило их отсутствие.

Допустимые преобразования шкалы измерений – которые не меняют соотношений между объектами измерений

Типы шкал

Шкалы различаются:

- типом отношений и операций, допустимых на шкале
- Допустимыми преобразованиями

Типы шкал (по возрастанию силы и определенности)

1. Номинальная (шкала наименований).
   - операции: $(A = B)$, $(A \neq B)$
2. Порядковая (ранговая),
   - операции : $(A = B)$, $(A \neq B)$, $(A > B)$, $(A < B)$
3. Интервальная
   - операции : $(A = B)$, $(A \neq B)$, $(A > B)$, $(A < B)$, $(A + B)$, $(A - B)$
4. Относительная (шкала отношений).
   - операции :

$$(A = B),\ (A \neq B),\ (A > B),\ (A < B),\ (A + B),\ (A - B),\ (A \times B),\ \left(\frac{A}{B}\right)$$

5. Шкала разностей.
6. Абсолютная шкала.

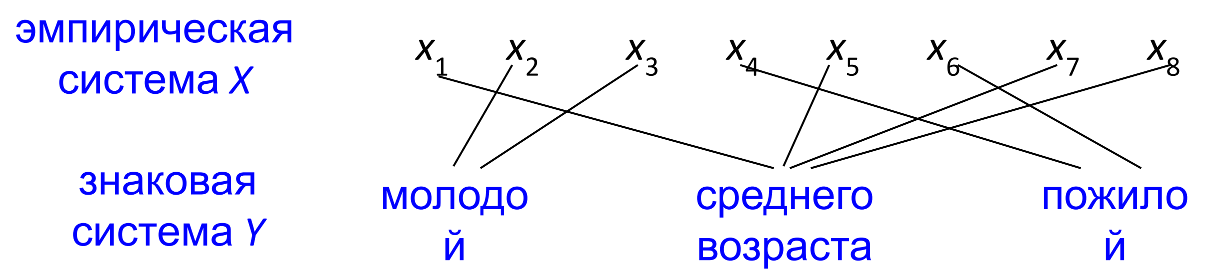
Чем сильнее шкала, в которой производятся измерения, тем больше сведений об изучаемом объекте, явлении, процессе дают измерения

Номинальная (**Шкала наименований, качественная)**

Назначение: каждому объекту (или классу объектов) сопоставляется наименование для их различения.

Сохранение отношений эквивалентности (по измеряемому признаку) элементов эмпирической системы. $(A = B)$, $(A \neq B)$

Примеры: названия городов, **имена** людей, автомобильные **номера**, номера официальных документов, телефонные **коды** городов, **номера** авиарейсов, **названия** болезней и т.п.



Измерение - проверка совпадения или несовпадения (принадлежности объекта тому или иному классу эквивалентности) $\delta_{ij} = \{1 : \varphi(x_i) = \varphi(x_j); 0 : \varphi(x_i) \neq \phi(x_j)\}$

Допустимые статистические операции: число индивидов данного класса, частоты, моды. $p_k = (\sum_{j=1}^{n} \delta_{kj}) / n$ частоты

Для классов «молодой» и «пожилой» $p_1 = p_3 = 2/8$, для класса «среднего возраста» $p_2 = 4/8$

Допустимые преобразования шкал Φ : все взаимно-однозначные.

Примеры номинальных шкал:

- пол и национальность,
- специальность по образованию,
- марка сигарет,
- предпочитаемый цвет.

Для обозначения в номинальной шкале могут быть использованы:

- слова естественного языка (например, географические названия, собственные имена людей и т. д.);
- произвольные символы (гербы и флаги государств, эмблемы родов войск, всевозможные значки и т. д.);
- номера (регистрационные номера автомобилей, официальных документов, номера на майках спортсменов);
- их различные комбинации (например, почтовые адреса, экслибрисы личных библиотек, печати и пр.).

Порядковая шкала (ранговая, качественная)

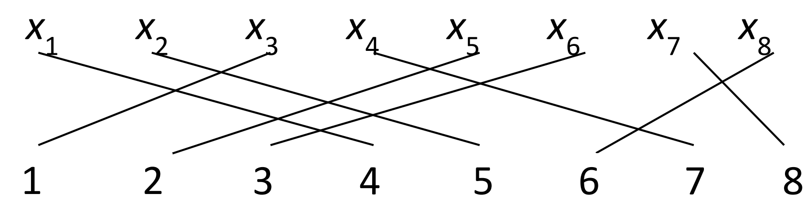
Назначение: для **упорядочения** объектов по измеряемым свойствам. Позволяет расположить объекты в определенной последовательности, **например,** в соответствии с возрастанием или убыванием какого-либо качества.

Отношения в шкале: $(A = B)$, $(A \neq B)$, $(A > B)$, $(A < B)$

Сохранение отношений: эквивалентности и предпочтения (по измеряемому признаку) элементов эмпирической системы: если $x_1 \succ x_2$ то $\phi(x_1) > \phi(x_2)$

эмпирическая система X

знаковая система Y



Упорядочение (ранжировка) :

$3 \succ 5 \succ 6 \succ 1 \succ 2 \succ 8 \succ 4 \succ 7$

Примеры: **призовые места** в конкурсах или соревнованиях, нумерация **очередности, номера классов** средней школы или курсов ВУЗов(1-ый, 2-ой и т.д.), **сила землетрясения** по шкале Рихтера, **сортность** товаров и т.п.

Допустимые преобразования: все строго возрастающие преобразования

Допустимые статистические операции: + медианы, квантили, ранговая корреляция, разбиение всей выборки на части и др.

Ранги *нельзя рассматривать как числа*

Над рангами *нельзя производить арифметические операции*.

По рангам *ничего нельзя сказать о “**расстояниях**”* между сравниваемыми объектами.

Примеры измерений в порядковой шкале

- Нумерация очередности,
- неимение знания,
- призовые места в конкурсе,
- социально-экономический статус («низший класс», «средний…», «высший…»).

1. В 1811 г. немецкий минералог Ф. Моос предложил установить стандартную шкалу твердости, постулируя только десять ее градаций. За эталоны приняты следующие минералы с возрастающей твердостью: 1 — тальк; 2 — гипс; 3 — кальций, 4 — флюорит, 5 — апатит, 6 — ортоклаз, 7 — кварц, 8 — топаз, 9 — корунд, 10 — алмаз. Из двух минералов тверже тот, который оставляет на другом царапины или вмятины при достаточно сильном соприкосновении. Однако номера градаций алмаза и апатита *не дают основания утверждать*, что алмаз *в два раза* тверже апатита.
2. В 1806 г. английский гидрограф и картограф адмирал Ф. Бофорт предложил балльную шкалу силы ветра, определяя ее по характеру волнения моря: 0 — штиль (безветрие), 4 — умеренный ветер, 6 — сильный ветер, 10 шторм (буря), 12 — ураган.
3. В 1935 г. американский сейсмолог Ч. Рихтер предложил 12-балльную шкалу для оценки энергии сейсмических волн в зависимости от последствий прохождения их по данной территории. Затем он развил метод оценки силы землетрясения в эпицентре по его магнитуде (условная величина, характеризующая общую энергию упругих колебаний, вызванных землетрясением или взрывами) на поверхности земли и глубине очага.

Шкала интервалов

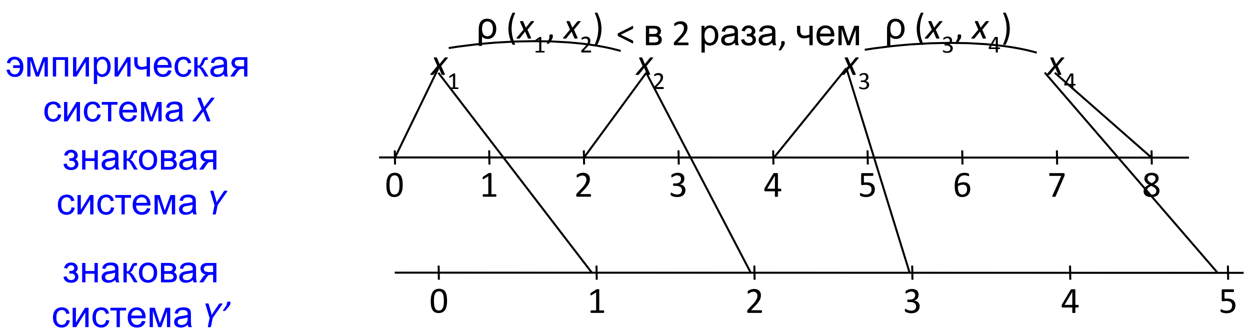
Назначение: используется в случаях, когда упорядочение объектов можно выполнить настолько точно, что **известны расстояния между любыми двумя** из них.
В шкале интервалов измеряются величины, которые по физической природе **не имеют абсолютного нуля**, либо допускают свободу выбора в установлении начала отсчета.
Сохранение отношений: независимо от начала отсчета и единица длины в каждой из шкал **отношения двух интервалов должны быть одинаковыми для всех шкал.**
Отношения и операции: $(A = B)$, $(A \neq B)$, $(A > B)$, $(A < B)$, $(A + B)$, $(A - B)$
Примеры: температура, время, высота местности.
Допустимые статистические операции: + мат.ожидание, станд. отклонение, дисперсия, коэф.асимметрии. Не допускается - коэфф. вариации, т.к. нулевая точка - произвольная.

Допустимые преобразования: положительные линейные преобразования вида

$$\varphi(x) = ax + b,\ x \in Y,\ a > 0,\ \forall b$$

Шкала интервалов

При измерении одного и того же свойства в разных интервальных шкалах (температура по Цельсию и Фаренгейту) отношения двух интервалов должны быть одинаковыми для всех шкал:



$$\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{\varphi(x_3)-\varphi(x_4)}=\frac{\varphi'(x_1)-\varphi'(x_2)}{\varphi'(x_3)-\varphi'(x_4)}$$

$$\varphi'(x)=a\varphi(x)+b$$

Например, для перехода от шкалы Цельсия к шкале Фаренгейта используется линейное преобразование t F=1,8 t C+ 32 .
В шкале интервалов только интервалы имеют смысл настоящих чисел, и только над интервалами следует выполнять арифметические операции.

Например, **нельзя сказать**, что температура воды увеличилась в два раза при ее нагреве от 9 до 18 град. С, т.к. по шкале Фаренгейта температура изменится от 48, 2 до 64,4 .

Но можно сказать **на сколько** один объект теплее другого по выбранной шкале.

Примеры шкалы интервалов:
- календарное время,
- температурные шкалы Цельсия и Фаренгейта.
- высота местности

Свойства:
1. Температура, время, высота местности — величины, которые по физической природе либо *не имеют абсолютного нуля*, либо *допускают свободу выбора в установлении начала отсчета*.

Часто можно услышать фразу: «Высота ... над уровнем моря». Какого моря? Ведь уровень морей и океанов разный, да и меняется со временем. В России высоты точек земной поверхности отсчитывают от среднемноголетнего Уровня Балтийского моря в районе Кронштадта.

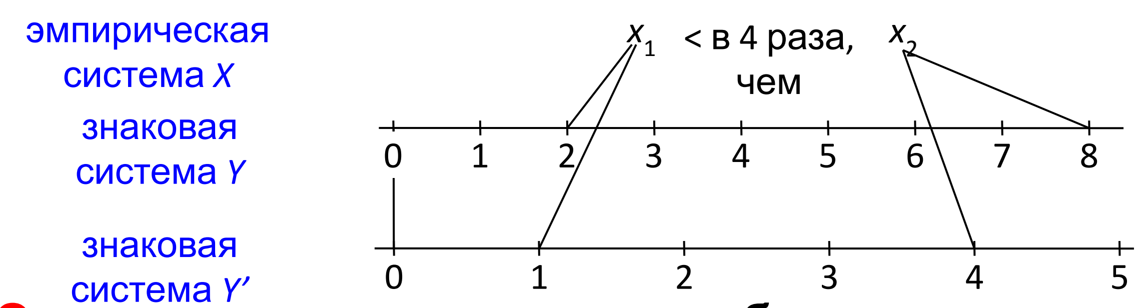
2. *Нельзя сказать, что температура воды увеличилась в два раза* при ее нагреве от 9 до 18° по шкале Цельсия, поскольку для того, кто привык пользоваться шкалой Фаренгейта, это будет звучать весьма странно, так как в этой шкале температура воды в том же опыте изменится от 37 до 42°.

Можно ввести *несколько интервальных шкал для измерения одного и того же свойства* элементов эмпирической системы: шкалы Цельсия и Фаренгейта, системы летоисчисления: у христиан от рождества Христова, у мусульман – от переезда Мухаммеда в Медину.

Пример измерений в интервальной шкале

Шкала отношений

Назначение: оценить, **во сколько раз** свойство одного объекта превосходит то же свойство другого объекта.
Имеется **естественный абсолютный нуль**, остается **свобода** в выборе единиц.
Сохранение отношения двух шкальных значений при переходе от одной шкалы к другой
Примеры: **вес (**килограмм, в фунт, в пуд), **длина** объектов **(**метр, аршин, ярд).
Если в одной системе единиц вес (или длина) объекта ***x*1** в ***К*** раз больше, чем вес (длина) объекта ***x*2**, то и в другой эквивалентной системе измерений то же отношение весов (длин) сохраняется.



$$\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\varphi'(x_2)}$$

$$\varphi'(x) = a\varphi(x)$$

Операции: можно выполнять **любые статистические и арифметические действия.** $(A=B)$, $(A\neq B)$, $(A>B)$, $(A<B)$, $(A+B)$, $(A-B)$, $(A\times B)$, $\left(\frac{A}{B}\right)$

Допустимые преобразования: преобразования подобия

$$\varphi(x) = ax,\ x \in Y,\ a > 0$$

Примеры шкал отношений

К шкалам отношений относится абсолютное большинство измерительных шкал, применяемых в науке, технике и быту:

- Рост
- Вес
- возраст
- расстояние
- сила тока
- время (длительность промежутка между двумя событиями)
- температура по Кельвину (абсолютный нуль).
- длина
- электрическое сопротивление
- цена

Шкала разностей

Назначение: оценить, **на сколько** свойство одного объекта превосходит то же свойство другого объекта.

Примеры: **прирост** продукции по сравнению с прошлым годом, **увеличение** численности выпускников школ, количество приобретенной техники, летоисчисление

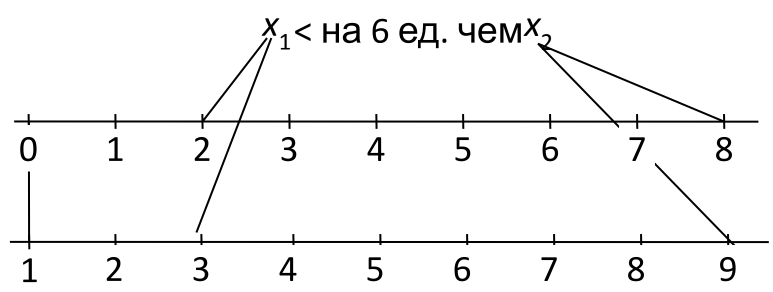
Сохранение отношения равенства разностей численных оценок свойств при переходе от одной шкалы к другой

$$\phi(x_1)-\phi(x_2)=\phi'(x_1)-\phi'(x_2)$$

эмпирическая система *X*

знаковая система *Y*

знаковая система *Y′*



$$\phi'(x)=\phi(x)+\mathrm{b}$$

Операции: можно выполнять **любые арифметические действия**,

$$(A=B),\ (A\neq B),\ (A>B),\ (A<B),\ (A+B),\ (A-B),\ (A\times B),\ \left(\frac{A}{B}\right)$$

Допустимые преобразования: преобразования сдвига (меняется начало отсчета)

$$\varphi(x)=x+b,\ x\in Y,\ \forall b$$

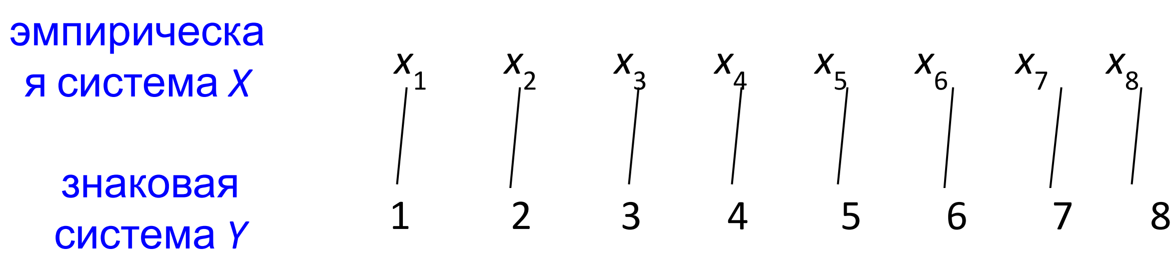
Примеры шкалы разностей

- направление из одной точки (шкала компаса, роза ветров и т. д.)
- время суток (циферблат часов)
- фаза колебания (в градусах или радианах).

Абсолютная шкала

Назначение: для измерения количества объектов, предметов, событий, решений. Используются натуральные (целые объекты) и действительные (части объектов) числа

Сохранение отношений: сохраняют любые соотношения.



Примеры: **числовая ось**. Имеет **абсолютный нуль** и **абсолютную единицу**

Операции в шкале: любые, включая операции, которые недопустимы для показаний других шкал: можно употреблять эти показания в качестве показателя степени и аргумента логарифма.

Допустимые преобразования: нет. Это **уникальная шкала**, т.е. других, эквивалентных ей шкал не существует

Примеры абсолютных шкал

- измерения количества объектов, предметов, событий, решений и т. п.
- шкала температур по Кельвину.

Числовая ось используется как измерительная шкала в явной форме при счете предметов, а как вспомогательное средство присутствует во всех остальных шкалах.

Выбор шкалы

1. Зависит от определяющего отношения
2. должен быть максимально согласован с объективными отношениями, которым подчинена наблюдаемая величина

Замечание:

- Измерение в *более слабой* шкале приведет к потере части полезной информации,
- применять *более сильную* шкалу опасно: полученные данные на самом деле не будут иметь той силы, на которую ориентируется их обработка.

Шкала ***наименований*** используется, если выполняются *аксиомы тождества*:

1. $A = A$ (рефлексивность).

2. *Если $A = B$, то $B = A$* (симметричность).

3. *Если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$*

Ранговая шкала используется, если выполняются *аксиомы упорядоченности*:

4. *Если $A \neq B$ то либо $A > B$ либо $B > A$.* (антисимметричность).

5. *Если $A > B$ и $B > C$, то $A > C$* (транзитивность).

Шкала ***интервалов*** используется, если дополнительно известны расстояния между объектами

Шкала ***отношений*** используется, если выполняются *аксиомы аддитивности*:

6. *Если $A = P$ и $B > 0$, то $A + B > P$*

7. *$A + B = B + A$.*

8. *Если $A = P$ и $B = Q$, то $A + B = P + Q$*

9. *$(A + B) + C = A + (B + C)$*

Для использования ***абсолютной*** шкалы необходимо наличие абсолютного нуля и абсолютной единицы

Резюме лекции

Укажите шкалы, используемые для измерения экспертной информации

- Метод рангов
- Метод непосредственного оценивания
- Метод парных сравнений
- Метод последовательных сравнений

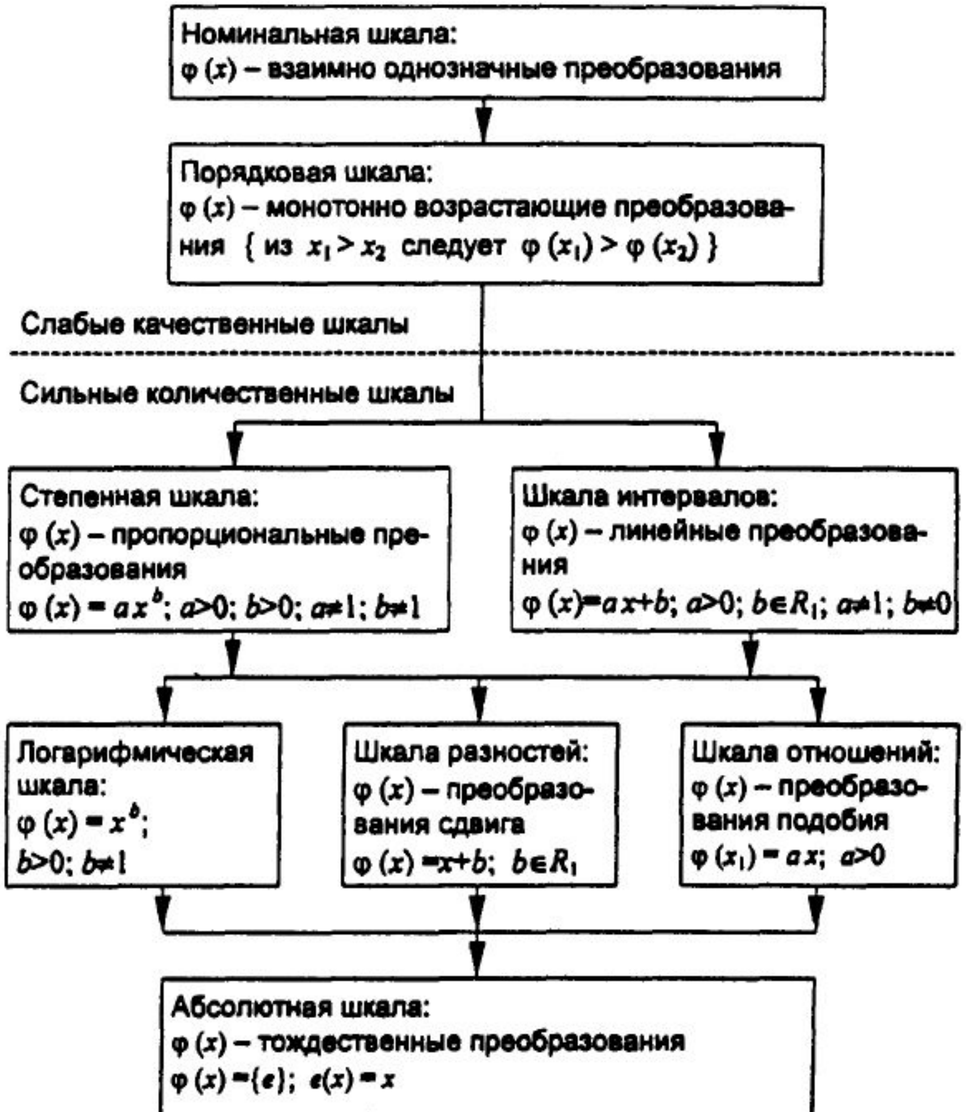


Рис. 2.2. Иерархическая структура основных шкал

В.С. АНФИЛАТОВ, А Л ЕМЕЛЬЯНОВ, А А КУКУШКИН
СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ В УПРАВЛЕНИИ, стр.87

Сводные данные по характеристикам разных шкал

Исходная эмпирическая система		Параметры, сохраняющиеся при переходе от одной шкалы к другой (из числа допустимых)	Допустимые виды осреднения		Рекомендуемые (да-нет), допустимые (+) и недопустимые (–) виды обработки случайных величин				
Отношение порядка	Шкала		Среднее	Другие	Средние		Разброс		Характеристики связи
					Медиана	$M(x)$	$D(x)$	Другие	
Эквивалентность	Номинальная	Распределение по классам эквивалентности	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет
Линейный порядок	Порядка	Порядок	Нет	Нет	Да	Нет	Нет	–	$R(\xi,\eta)$
То же, с мультипликативной метрикой	Интервалов	Отношение разностей $\frac{\varphi(y_1)-\varphi(y_2)}{\varphi(y_3)-\varphi(y_4)}=\frac{y_1-y_2}{y_3-y_4}$	Да	Нет	Да	+	Да	–	corr (ξ,η)
Линейный порядок	Степенная	Отношение разностей логарифмов $\frac{\ln\varphi(y_1)-\ln\varphi(y_2)}{\ln\varphi(y_3)-\ln\varphi(y_4)}=\frac{\ln(y_1)-\ln(y_2)}{\ln(y_3)-\ln(y_4)}$	Нет	Среднегармоническое	–	–	–	–	–
Линейный порядок	Логарифмическая	Отношение логарифмов $\frac{\ln\varphi(y_1)}{\ln\varphi(y_2)}=\frac{\ln y_1}{\ln y_2}$	Нет	То же	–	–	–	–	–
То же	Отношений	Отношение оценок $\frac{\varphi(y_1)}{\varphi(y_2)}=\frac{y_1}{y_2}$	Да	СВА СГм СГр СК	Да	+	– +	–	–
То же, с аддитивной метрикой	Разностей	Разность оценок $\varphi(y_1)-\varphi(y_2)=y_1-y_2$	Да	–	Да	+	– +	–	cov (ξ,η)
То же, на числовой оси целых чисел	Абсолютная	Допустимых преобразований нет	Да	–	Да	+	+	–	–

В.С. АНФИЛАТОВ, А Л ЕМЕЛЬЯНОВ, А А КУКУШКИН
СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ В УПРАВЛЕНИИ, стр.93