14.4. Признаки сходимости положительных числовых рядов

Интегральный признак Коши. Пусть дан ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

члены которого положительны и не возрастают
Пусть введена функция $f(x)$, определенная для всех $x \geq 1$, непрерывная, невозрастающая и такая, что

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots .$$

Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

Пример: Исследовать на сходимость **ряд Дирихле**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 0.$$

$$a_n = \frac{1}{n^p} \qquad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

$$\int^{\infty} f(x)dx$$

Пример. Исследовать на сходимость **ряд Дирихле**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}, \quad p>0.$$

$$a_n=\frac{1}{n^p} \qquad f(x)=\frac{1}{x^p}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_1^{\infty}x^{-p}dx=\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\Big|_1^{\infty}=$$

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

Пример. Исследовать на сходимость **ряд Дирихле**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\quad p>0. \qquad f(x)=\frac{1}{x^p} \qquad a_n=\frac{1}{n^p}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_1^{\infty}x^{-p}dx=\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\Big|_1^{\infty}=$$

$$=\frac{1}{1-p}\cdot x^{1-p}\Big|_1^{\infty}$$

$$\boxed{\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C}$$

$$\boxed{\int^{\infty} f(x)dx}$$

Пример. Исследовать на сходимость **ряд Дирихле**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}, \quad p>0. \qquad a_n=\frac{1}{n^p} \qquad f(x)=\frac{1}{x^p}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{\infty}=\begin{cases}\infty, & p<1\\ \dfrac{-1}{1-p}, & p>1.\end{cases}$$

Пример. Исследовать на сходимость **ряд Дирихле**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\quad p>0. \qquad a_n=\frac{1}{n^p} \qquad f(x)=\frac{1}{x^p}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{\infty}=\begin{cases}\infty, & p<1\\ \dfrac{-1}{1-p}, & p>1.\end{cases}$$

Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл.

При p<1 он расходится, и ряд расходится.

При p>1 ряд сходится.

Пример. Исследовать на сходимость **ряд Дирихле**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\quad p>0. \qquad a_n=\frac{1}{n^p} \qquad f(x)=\frac{1}{x^p}$$

Исследуем случай, когда p=1 (гармонический ряд):

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_1^{\infty}=\infty \quad (p=1).$$

Интеграл расходится, и гармонический ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость **ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$$

p<1- ряд расходится.

Ряд Дирихле: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 0.$ $\longrightarrow$ $a_n = \frac{1}{n^p}$

$p > 1$ -сходится $p \le 1$ -расходится

Признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$$

$l>1$ -расходится

$l<1$ -сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^2}{5^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{5^n}}$$

Признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

$l > 1$ -расходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}}{\frac{n^2}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 5^n}{5^{n+1} \cdot n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{5n^2} = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

Признак Даламбера

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ $\quad l > 1$ -расходится

Признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$$

$l>1$ -расходится

$l<1$ -сходится

Примеры. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$ Исследовать на сходимость ряд

Признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$$

$l>1$ -расходится

$l<1$ -сходится

Примеры. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}}}{\dfrac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}}$$

Признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$$

$l>1$ -расходится

$l<1$ -сходится

Примеры. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}}}{\dfrac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n+3}\cdot 2^{3n-1}}{2^{3n+2}\cdot 3^{2n+1}}$$

Признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$$

$l>1$ -расходится

$l<1$ -сходится

Примеры. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}}}{\dfrac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n+3}\cdot 2^{3n-1}}{2^{3n+2}\cdot 3^{2n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}>1$$

Самостоятельная работа

Укажите необходимый признак сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

d) $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$

Самостоятельная работа

Продолжите утверждение:
если для положительных числовых рядов

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

выполняется условие $a_n \le b_n \ (n = 1, 2, \ldots, \infty)$, то

a) из сходимости ряда 2), следует сходимость ряда 1);
b) из сходимости ряда 1) следует сходимость ряда 2);
c) сходимость ряда 2) не влияет на сходимость ряда 1);
d) расходимость ряда 1) не влияет на расходимость ряда 2).

Самостоятельная работа

Укажите название достаточного признака сходимости положительного числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

записанный в виде $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

a) признак Даламбера;
b) признак Коши;
c) признак Лейбница;

Самостоятельная работа

Числовой ряд $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{5n^2}$$

а) сходится условно;

б) сходится;

в) расходится.

Самостоятельная работа

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{5n^2}$

а) сходится условно;
б) сходится;
в) расходится.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{5n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{5n^2} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Знакопеременный ряд - ряд, членами которого являются вещественные числа произвольного знака.

Знакопеременный ряд **сходится абсолютно**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов и **сходится условно,** если он сам сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Знакопеременный ряд - ряд, членами которого являются вещественные числа произвольного знака.

Знакопеременный ряд **сходится абсолютно**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов и **сходится условно,** если он сам сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Теорема. Если ряд абсолютно сходится, то он сходится

Признак сходимости знакочередующихся рядов (Лейбница): Ряд $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots,$ сходится, если

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$$

$$\lim a_n = 0$$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} - \ldots$$

Пример. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\ldots$$

Рассмотрим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$$

Сравним его с гармоническим рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Пример. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=1$$

-наш ряд из абсолютных величин абсолютно расходитс

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l>0$ то ряды сходятся или

расходятся одновременно

Пример. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\ldots$$

Рассмотрим теперь сходимость самого ряда:

$$\frac{1}{2}>\frac{2}{5}>\frac{3}{10}>\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=0.$$

Знакопеременный ряд **сходится абсолютно**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов и **сходится условно,** если он сам сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов,

Самостоятельная работа

Закончите определение:

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, все члены которого неотрицательны, называется

а) положительным;
б) знакопеременным;
в) знакочередующимся.

Самостоятельная работа

Укажите признак, который следует применить, чтобы выяснить, сходится или расходится числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{3^n}$$

а) признак Лейбница;
б) необходимый признак сходимости ряда;
в) интегральный признак Коши.

15.1. Основные определения

Функциональный ряд на множестве X:

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

Функциональный ряд на множестве X:

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

Степенной ряд: $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$

Функциональный ряд на множестве X:

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

Степенной ряд: $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$

Область сходимости функционального ряда –

множество значений переменной *x*, для которых сходятс

числовые ряды, полученные из данного ряда

Пример. Исследовать сходимость ряда в точках x=0 и x=1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^{n}$$

Пример. Исследовать сходимость ряда в точках x=0 и x=1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n$$

Точка

$x=0:$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{4}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1},$$

Исследуем сходимость числового ряда.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(2(n+1)-1)}}{\dfrac{2^n}{2n-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{4}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1},$$

Признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$$

$l>1$ -расходится

$l<1$ -сходится

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{\left(2(n+1)-1\right)}}{\dfrac{2^n}{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(2n-1)}{2^n\cdot(2n+1)}$$

Признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$$

$l>1$ -расходится

$l<1$ -сходится

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(2(n+1)-1)}}{\dfrac{2^n}{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(2n-1)}{2^n\cdot(2n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\,\frac{2n-1}{2n+1}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}=2>1$$

В точке x=0 ряд расходится.

Признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$$

$l>1$ -расходится

$l<1$ -сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n$$

Точка

$x = 1:$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{3}{9}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n\left(2n-1\right)},$$

$$x=1: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{3}{9}\right)^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n}\left(2n-1\right)},$$

Исследуем сходимость числового ряда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{3^{n+1}\cdot\left(2(n+1)-1\right)}}{\dfrac{1}{3^{n}\cdot(2n-1)}}$$

$$x=1: \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{3}{9}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n}\left(2n-1\right)},$$

Исследуем сходимость числового ряда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3^{n+1}\cdot\left(2(n+1)-1\right)}}{\dfrac{1}{3^{n}\cdot(2n-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n}\cdot(2n-1)}{3^{n+1}\cdot\left(2(n+1)-1\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3^{n+1}\cdot\left(2(n+1)-1\right)}}{\dfrac{1}{3^n\cdot(2n-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot(2n-1)}{3^{n+1}\cdot\left(2(n+1)-1\right)}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}=\frac{1}{3}<1$$

Признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$$

$l>1$ -расходится

$l<1$ -сходится

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n-1}}{2^n \sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-4)^n 2^n \sqrt{n}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}(x-4)^{n-1}}\right| =$$

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n-1}}{2^n \sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-4)^n\, 2^n \sqrt{n}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}(x-4)^{n-1}}\right| = \left|\frac{x-4}{2}\right| \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \left|\frac{x-}{2}\right.$$

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n-1}}{2^n \sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-4)^n 2^n \sqrt{n}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}(x-4)^{n-1}}\right| = \left|\frac{x-4}{2}\right| \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \left|\frac{x-4}{2}\right.$$

$$\left|\frac{x-4}{2}\right| < 1,$$

Признак Даламбера

$$\lim \frac{a_{n+1}}{} = l \qquad l > 1 \quad \text{-расходится}$$

Пример. Найти область и радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n-1}}{2^n \sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-4)^n 2^n \sqrt{n}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}(x-4)^{n-1}}\right| = \left|\frac{x-4}{2}\right| \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \left|\frac{x-4}{2}\right|$$

Область сходимости ряда: $\left|\frac{x-4}{2}\right| < 1,$

$$|x-4| < 2 \;\Rightarrow\; -2 < x-4 < 2 \;\Rightarrow\; 2 < x < 6$$

радиус сходимости

область (интервал) сходимости

15.2. Ряд Тейлора-функциональный ряд вида:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Ряд Тейлора-функциональный ряд вида:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

При $a = 0$ разложение в ряд Тейлора называется **разложением в ряд Маклорена:**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Пример. Найти разложение в ряд Маклорена

$$f(x) = e^x$$

Находим производные функции:

$$(e^x)' = e^x, \quad (e^x)'' = e^x, \ldots, (e^x)^{(n)} = e^x, \ldots,$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Пример. Найти разложение в ряд Маклорена

$$f(x)=e^{x}$$

Находим производные функции:

$$(e^{x})'=e^{x},\qquad (e^{x})''=e^{x},\ldots,(e^{x})^{(n)}=e^{x},\ldots,$$

Находим значение производных при x=0:

$$f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=\ldots=1.$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+\ldots$$

Пример. Найти разложение в ряд Маклорена $f(x) = e^{x}$

Находим производные функции:

$$(e^x)' = e^x, \quad (e^x)'' = e^x, ..., (e^x)^{(n)} = e^x, ...,$$

Находим значение производных при x=0:

$$f(0) = f'(0) = ... = f^{(n)}(0) = ... = 1.$$

Записываем разложение функции в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{} x + \frac{f''(0)}{} x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{} x^n + ...$$

Пример. Найти разложение в ряд Маклорена $f(x) = \sin x$

$$\sin(o) = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad \cos(0) = 1$$

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x; \qquad -\sin(0) = 0$$

$$(\sin x)^{(3)} = (-\sin x)' = -\cos x; \qquad -\cos(0) = -1$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Пример. Найти разложение в ряд Маклорена $f(x)=\sin x$

$$\sin(o)=0$$

$$(\sin x)'=\cos x; \qquad \cos(0)=1$$

$$(\sin x)''=(\cos x)'=-\sin x; \qquad -\sin(0)=0$$

$$(\sin x)^{(3)}=(-\sin x)'=-\cos x; \qquad -\cos(0)=-1$$

$$\sin x=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^3+\ldots$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Пример. Найти разложение в ряд Маклорена $f(x)=\sin x$

$$\sin x = 0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^{2}-\frac{1}{3!}x^{3}+\frac{0}{4!}x^{4}+\frac{1}{5!}x^{3}+\ldots=$$

$$=x-\frac{1}{3!}x^{3}+\frac{1}{5!}x^{5}-\frac{1}{7!}x^{7}+\frac{1}{9!}x^{9}+\ldots+\frac{(-1)^{\mathrm{n}}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+\ldots$$

Пример. Вычислить приближенное значение функции $\sin\frac{\pi}{4}$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 \approx 0{,}707$$

Пример. Найти разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \cos x$

$$f(0) = \cos 0 = 1, \quad f'(0) = -\sin 0 = 0,$$

$$f''(0) = -\cos 0 = -1, \quad f'''(0) = \sin 0 = 0, \ldots$$

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Самостоятельная работа

26. Укажите правильное утверждение относительно сходимости рядов

$$1).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin\alpha|}{n^3} \qquad 2).\ \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$$

a) 1) расходится, 2) сходится;

b) 1) и 2) сходятся;

c) 1) и 2) расходятся;

d) 1) сходится, 2) расходится.

• Самостоятельная работа

Радиус сходимости степенного ряда вычисляется по формуле

a) $R = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

b) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

c) $R = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$

d) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

Признак сходимости ряда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

Самостоятельная работа

Для ряда $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

вычислить радиус сходимости

a) 2

b) 3

c) 1

d) 4

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

вычислить радиус сходимости

a) 2

b) 3

c) 1

d) 4

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n}{(n+1)\cdot x^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\cdot n}{n+1}\right| = x\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right| = |x| < 1$$

Самостоятельная работа

В виде разложения в ряд Маклорена

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4 \cdot 2!} + \frac{x^3}{8 \cdot 3!} + \ldots + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!} + \ldots$$

представлена функция...

1) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ 2) $f(x) = e^{\frac{x+1}{2}}$

3) $f(x) = e^{2x}$ 4) $f(x) = \cos x$

Самостоятельная работа

В виде разложения в ряд Маклорена

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4 \cdot 2!} + \frac{x^3}{8 \cdot 3!} + \ldots + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!} + \ldots$$

представлена функция...

1) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$

2) $f(x) = e^{\frac{x+1}{2}}$

3) $f(x) = e^{2x}$

4) $f(x) = \cos x$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$