

1) Для заданного λ -выражения E найти связанные $BV(E)$ и свободные $FV(E)$ переменные

$$E = \lambda z y . y x$$

$$BV(E) =_{\text{по опр.}} BV(\lambda z . (\lambda y . y x)) =_4 BV(\lambda y . y x) \cup \{z\} =_4$$

$$BV(y x) \cup \{y\} \cup \{z\} =_3 BV(y) \cup BV(x) \cup \{y\} \cup \{z\} =_1 \{y, z\}$$

$$FV(E) =_{\text{по опр.}} FV(\lambda z . (\lambda y . y x)) =_4 FV(\lambda y . y x) \setminus \{z\} =_4$$

$$(FV(y x) \setminus \{y\}) \setminus \{z\} =_3 (((FV(y) \cup FV(x)) \setminus \{y\}) \setminus \{z\}) =_1 \{x\}$$

Выполнить подстановку

$$(\lambda x z. x y) [y := z] =_{\text{по опр.}} (\lambda x. (\lambda z . x y)) [y := z] =_6$$

$$\lambda x. ((\lambda z . x y) [y := z]) =_7 \lambda x. (\lambda u . (x y) [z := u] [y := z]) =_4$$

$$\lambda x. (\lambda u. x[z := u] [y := z] y[z := u] [y := z]) =_2$$

$$\lambda x. (\lambda u. x y[y := z]) =_1 \lambda x. (\lambda u . x z) = \lambda x u . x z$$

2) Доказать равенство λ -выражений $E_1 = E_2$

$$E_1 = \lambda y . x y \quad E_2 = (\lambda z . x) y$$

$$E_1 \rightarrow_{\eta} x \Rightarrow_1 E_1 = x$$

$$E_2 \rightarrow_{\beta} x \Rightarrow_1 E_2 = x \Rightarrow_3 x = E_2$$

$$\Rightarrow_4 E_1 = E_2$$

3) Используя различные редукционные стратегии привести к нормальной форме следующее выражение:

$$(\lambda z . y z) (\lambda x . z x)$$

$$\text{Норм. стр.: } (\lambda z . y z) (\lambda x . z x) \rightarrow_{\beta} y (\lambda x . z x) \rightarrow_{\eta} y z$$

$$(\lambda z . y z) (\lambda x . z x) \rightarrow_{\eta} (\lambda z . y z) z \rightarrow_{\eta} y z$$

4) Используя свойства комбинаторов редуцировать выражение

$S (K I) (K S) K$

$S (K I) (K S) K \xrightarrow{\text{по св-ву } S} ((K I) K) ((K S) K) \xrightarrow{\text{по св-ву } K} I S \xrightarrow{\text{по св-ву } I} S$

5) Вычислить следующее λ -выражение:

$\text{fst} (\text{false } 1)$

$\text{fst} (\text{false } 1) =_{\text{по опр. fst}} (\lambda p. p \text{ true}) (\text{false } 1) \rightarrow_{\beta}$

$(\text{false } 1) \text{ true} =_{\text{по опр. false}} (\lambda x y. y) 1 \text{ true} \rightarrow_{\beta} \text{true}$

6) Вычислить следующее λ -выражение:

$(2, 1) \text{ true}$

$(2, 1) \text{ true} =_{\text{по опр. пары}} (\lambda f. f \ 2 \ 1) \text{ true} \rightarrow_{\beta} \text{true} \ 2 \ 1 \rightarrow_{\text{по опр. true}}$

$(\lambda x \ y. x) \ 2 \ 1 \rightarrow_{\beta} 2$

7) Используя свойства комбинатора неподвижной точки вычислить следующее λ -выражение:

$Y\ 0\ 1$

$$Y\ 0\ 1 =_{\text{по св-су } Y} 0\ (Y\ 0)\ 1 =_{\text{по опр. } 0} (\lambda\ f\ x.\ x)\ (Y\ 0)\ 1 \rightarrow_{\beta} 1$$

8) Используя let-нотацию представить в последовательном и параллельном стиле выражение $(\lambda x y . x / y) 1 2$

$$(\lambda x y . x / y) 1 2 = \text{let } x = 1$$

$$\text{in let } y = 2$$

$$\text{in } x / y$$

$$(\lambda x y . x / y) 1 2 = \text{let } x = 1$$

$$y = 2$$

$$\text{in } x / y$$