Функции нескольких переменных

- Определение функции двух переменных
- Графическое изображение функции двух переменных
- Частное и полное приращение функции
- Частные производные функции двух переменных
- Полный дифференциал
- Производная сложной функции

Определение функции двух переменных (ФДП)

При изучении многих явлений приходится сталкиваться с функциями двух и более переменных.

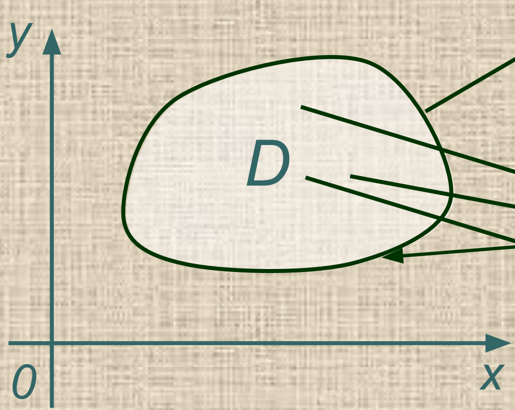
Если каждой паре $(x;\ y)$ значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторой области их изменения D, соответствует определенное значение величины z, то мы говорим, что z есть ***функция двух переменных***, определенная на области D.

$$z = f(x;y)$$

Совокупность пар $(x;\ y)$ значений независимых переменных, при которых определяется функция z называется ***областью определения*** этой функции.

Область определения ФДП наглядно иллюстрируется геометрически в виде некоторой совокупности точек на плоскости XOY

Определение функции двух переменных (ФДП)



Линия, ограничивающая область D, называется **границей области**

Точки области D, не лежащие на ... **внутренними точками области**

Область, состоящая из одних внутренних точек, называется **открытой** или **незамкнутой**

Если к области относятся внутренние точки и точки границы, то область называется **замкнутой**

Такая обл... **неогр...**

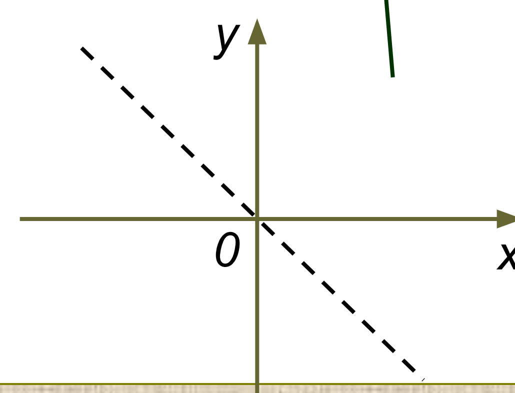
Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$z = \ln(x + y)$$

Так как логарифм определен только для положительных чисел, то должно выполняться неравенство:

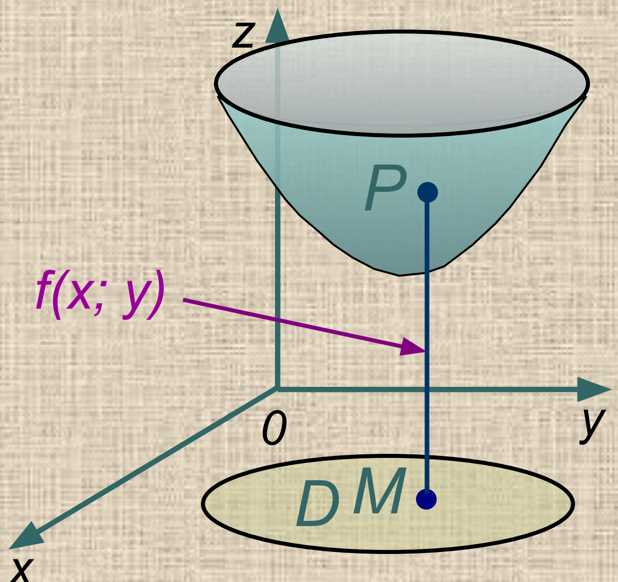
$$x + y > 0 \Rightarrow y > -x$$

Таким образом, областью определения функции z *является половина плоскости, расположенная над прямой* $y = -x$*, не включая самой прямой*



Графическое изображение ФДП

Рассмотрим функцию $z = f(x; y)$, определенную в области D на плоскости XOY.



Возьмем в области D точку $M(x; y)$, Восстановим в точке M перпендикуляр к плоскости XOY и на нем отложим расстояние, равное $f(x; y)$

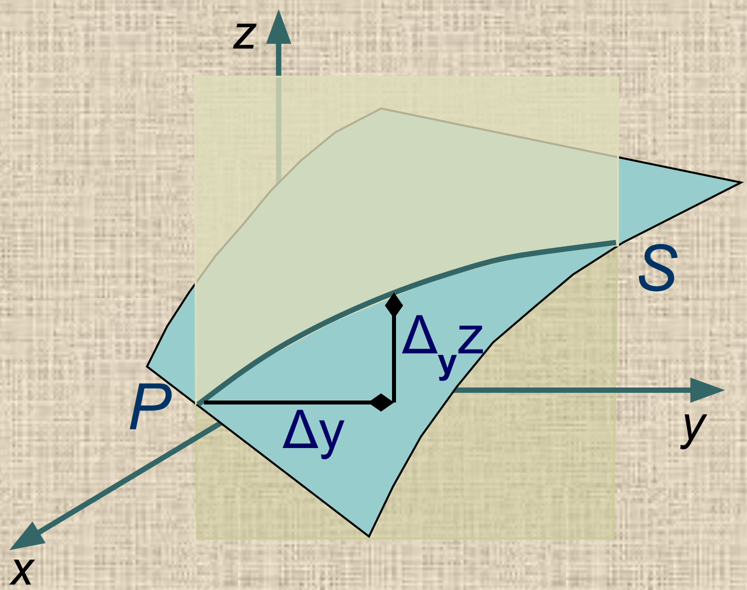
Так мы получим в пространстве точку P с координатами: $x; y; z = f(x;y)$

Геометрическое место точек Р, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x;y)$, называется ***графиком функции двух переменных***.

Таким образом, графиком ФДП является поверхность, проектирующаяся на плоскость XOY в область определения функции.

Частное и полное приращение функции

Рассмотрим поверхность с уравнением *z = f(x; y).*



Рассмотрим линию *PS* пересечения поверхности с плоскостью *x = const*, параллельной плоскости *YOZ*.

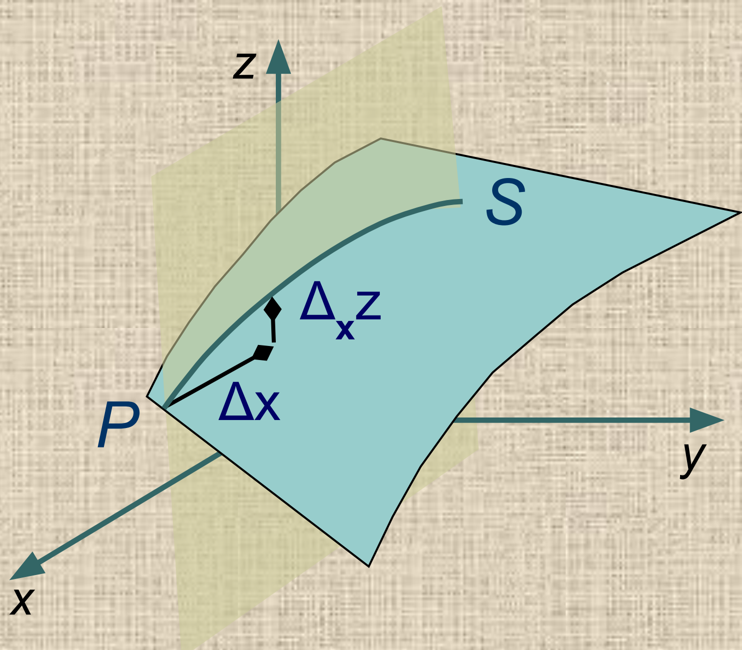
Переменная *z* вдоль линии *PS* будет меняться только в зависимости от изменения переменной *y*.

Дадим переменной *y* приращение *Δy*.

Тогда *z* получит приращение , которое называется ***частным приращением z по y***:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$$

Частное и полное приращение функции



Если пересечь поверхность плоскостью, *y = const*, то вдоль линии пересечения переменная *z* меняется только в зависимости от переменной *x*

Дадим переменной *x* приращение Δx , тогда *z* получит приращение , которое называется ***частным приращением z по x***:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$$

Наконец, сообщив переменной *x* приращение Δx , а переменной *y* приращение Δy, получим для *z* новое приращение , которое называется ***полным приращением функции z*** :

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$$

Частные производные ФДП

Частной производной по x от функции $z = f(x;y)$ называется предел отношения частного приращения по x к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

Частная производная по x обозначается одним из символов: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x;y) - f(x;y)}{\Delta x}$$

Частной производной по y от функции $z = f(x;y)$ называется предел отношения частного приращения по y к приращению Δy при стремлении Δy к нулю.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x;y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}$$

Частные производные ФДП

Заметив, что $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном y, а $\Delta_y z$ при неизменном x, можно определение частных производных сформулировать так:

Частной производной по x от функции z называется производная, вычисленная в предположении, что y – постоянная, частной производной по y от функции z называется производная, вычисленная в предположении, что x – постоянная

Вычислить частные производные от функции: $z = \ln(x^2 + y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln(x^2 + y)\right)'_x = \frac{(x^2 + y)'_x}{x^2 + y} = \frac{2x}{x^2 + y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln(x^2 + y)\right)'_y = \frac{(x^2 + y)'_y}{x^2 + y} = \frac{1}{x^2 + y}$$

Полный дифференциал ФДП

Если функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные в некоторой точке, то она дифференцируема в этой точке и имеет ***полный дифференциал***, определяемый выражением:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

Так как $x; y$ – независимые переменные, то их приращения равны дифференциалам: $\Delta x = dx; \quad \Delta y = dy$

Поэтому формулу полного дифференциала можно записать в виде:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Можно доказать, что полное приращение функции Δz и полный дифференциал dz связаны друг с другом с помощью соотношения:

$$\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$$

Полный дифференциал ФДП

$$\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$$

В этом выражении γ_1 и γ_2 - бесконечно малые функции когда Δx и Δy стремятся к нулю.

Таким образом, полное приращение дифференцируемой функции может быть представлено в виде полного дифференциала и величины бесконечно малой высшего порядка относительно $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Поэтому, имеет место приближенная формула, которая применяется в приближенных вычислениях:

$$\Delta z \approx dz$$

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \approx dz$$

$$\boxed{f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + dz} \qquad (1)$$

Полный дифференциал ФДП

Вычислить приближенно: $\sqrt{3.01^2+4.02^2}$

Введем функцию: $z=\sqrt{x^2+y^2}$

Необходимо вычислить значение этой функции в точке (3,01; 4,02)

$$x=3;\quad \Delta x=0.01;\quad x+\Delta x=3.01;\quad y=4;\quad \Delta y=0.02;\quad y+\Delta y=4.02$$

Тогда, согласно формуле (1): $z(3.01;4.02)\approx z(3;4)+dz\big|_{(3;4)}$

$$z(3;4)=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{(3;4)}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{(3;4)}=\frac{4}{5}$$

$$dz=\frac{3}{5}\cdot 0.01+\frac{4}{5}\cdot 0.02=0.022\quad\Rightarrow\quad z(3.01;4.02)\approx$$

$$\approx 5+0.022=\boxed{5.022}$$

Производная сложной функции

Предположим, что в уравнении:

$$z = F(u;v)$$

u и v являются функциями независимых переменных x и y:

$$u = \varphi(x;y), \quad v = \psi(x;y)$$

В этом случае z есть сложная функция от аргументов x и y.

Предположим, что функции $F(u;v), \varphi(x;y), \psi(x;y)$ имеют непрерывные частные производные по всем аргументам, тогда частные производные функции z по переменным x и y вычисляются по формулам:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}} \qquad (4)$$

Производная сложной функции

$$z = \ln(u^2 + v), \quad u = e^{x+y^2}, \quad v = x^2 + y$$

Вычислить частные производные функции z по переменным x и y.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(\ln(u^2 + v)\right)'_u = \frac{2u}{u^2 + v} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \left(\ln(u^2 + v)\right)'_v = \frac{1}{u^2 + v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{x+y^2}\right)'_x = e^{x+y^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{x+y^2}\right)'_y = e^{x+y^2} \cdot 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(x^2 + y\right)'_x = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \left(x^2 + y\right)'_y = 1$$

Подставим найденные производные в формулы (4):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Производная сложной функции

Если задана функция $z = F(u;v)$

где u и v зависят только от одной переменной x , то в конечном итоге z также является функцией одной переменной и можно ставить вопрос о нахождении производной $\dfrac{dz}{dx}$

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}} \qquad (5)$$

В частном случае $z = F(x;y)$, где y зависит только от x: $y = f(x)$

Тогда, для нахождения производной dz/dx используют формулу:

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}} \qquad (6)$$

Производная сложной функции

$$z = x^2 + \sqrt{y}, \quad y = \sin x$$

Вычислить производную функции z по x.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 + \sqrt{y}\right)'_x = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 + \sqrt{y}\right)'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)' = \cos x$$

Подставим найденные производные в формулу (6):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$