Лекция по математике.
Преподаватель: Резникова О.М.

Тема:

«Логарифм числа и его свойства. Основное логарифмическое тождество. Преобразования логарифмических выражений. Десятичные и натуральные логарифмы. Переход к новому основанию.»

Определение логарифма

Логарифмом числа ***b*** по основанию ***a*** называется показатель степени, в которую нужно возвести ***a***, чтобы получить ***b***.

$$\log_a b = c, \quad a^c = b,$$

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$$

Определение логарифма

$b > 0$
$a > 0,\ a \neq 1$
$b = a^c$
$c = \log_a b$

Примеры:

$\log_2 16 = 4$,

$\log_4 2 = 1/2$,

$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$,

Виды логарифмов

Обыкновенные

Натуральные

Десятичные

Обыкновенные:

$$\log_2 8 = 3, \textit{ т.к. } 2^3 = 8$$

$$\log_5 25 = 2, \textit{ т.к. } 5^2 = 25$$

$$\log_2 2 = 1, \textit{ т.к. } 2^1 = 2$$

$$\log_2 \frac{1}{2} = -1, \textit{ т.к. } 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2, \textit{ т.к. } 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

Запишите в виде логарифмического равенства:

$$3^4 = 81 \Rightarrow \log_3 81 = 4$$

(по определению);

$$2^{-5} = \frac{1}{32} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{32} = -5$$

(по определению);

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = 3$$

$$\sqrt[3]{125} = 5 \Rightarrow \log_{125} 5 = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[4]{16^3} = 8 \Rightarrow \log_{16} 8 = \frac{3}{4}$$

Найдите число *x*

$$\log_5 x = 2$$
$$x = 25$$

$$\log_3 x = -1$$
$$x = \frac{1}{3}$$

$$\log_{\frac{1}{6}} x = -2$$
$$x = 36$$

$$\log_{\sqrt{5}} x = 0$$
$$x = 1$$

Найдите число x

$$\log_x 81 = 4$$

$$x = 3$$

$$3^4 = 81$$

$$\log_{\frac{1}{6}} x = -2$$

$$x = 36$$

$$\log_x \frac{1}{16} = 2$$

$$x = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\log_x \frac{1}{4} = -2$$

$$2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Вычислите

$$\log_2 0{,}25 = \log_2 \frac{1}{4} = -2$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3} = \log_{\frac{1}{3}}\left(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} 3^{1+\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$$

Десятичные логарифмы

(по основанию 10)

$$\log_{10} a = \lg a$$

Натуральные логарифмы

(по основанию e)

$$\log_e a = \ln a$$

Пример

$$\lg 100 = 2, \quad 10^2 = 100$$

$$\lg 10 = 1, \quad 10^1 = 10$$

$$\lg 1 = 0, \quad 10^0 = 1$$

$$\lg 0{,}1 = -1, \quad 10^{-1} = 0{,}1$$

$$\lg 0{,}00001 = -5, \quad 10^{-5} = 0{,}00001$$

Свойства десятичных логарифмов:

$$\lg 10^n = n$$

$$\lg b \cdot 10^n = \lg b + n$$

$$\lg (0.1)^n = -n$$

$$\lg \frac{b}{10^n} = \lg b - n$$

Пример

$$\log_e e = 1$$

$$\ln e = 1, \quad e^1 = e$$

$$\ln e^2 = 2, \quad e^2 = e^2$$

$$\ln \frac{1}{e} = -1, \quad e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \quad \ln \sqrt[3]{e} = \frac{1}{3}$$

Вычислите значения логарифмов:

$\log_3 9$

$\log_2 \frac{1}{8}$

$\log_4 16$

$\log_5 \frac{1}{25}$

$\log_7 1$

$\log_{32} 2$

$\log_3 \frac{1}{3}$

$\log_9 3$

$\log_{32} 8$

$\log_{81} 27$

$\log_{125} 25$

$\log_{27} 9$

$\log_5 0{,}04$

$\lg 100$

$\lg 0{,}01$

$\lg 0{,}001$

$\log_{\sqrt{3}} 9$

Найдите число x.

$\log_3 x = -1$

$\log_4 x = -3$

$\log_x 81 = 4$

$\log_{\frac{1}{6}} x = -3$

$\log_{\sqrt{5}} x = 0$

$\log_x \frac{1}{16} = 2$

$\log_5 x = 2$

$\log_{\frac{1}{7}} x = 1$

$\log_x \frac{1}{4} = -2$

$\log_7 x = -2$

$\log_{\frac{1}{2}} x = -3$

$\log_x 27 = 3$

Свойства логарифмов

ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

$$a^{\log_a b} = b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$a > 0$

$a \neq 1$

$b > 0$

$c > 0$

Свойства логарифмов:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$
4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
5. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
6. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$
7. $\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \cdot \log_a b$
8. $\log_{a^n} b^n = \log_a b$

10. $\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a} = \frac{1}{\log_b a}$
11. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$
12. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Свойства логарифмов

$$a^{\log_a b} = b \quad , \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Вычислите:

$$3^{\log_3 6}$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$a^{\log_a b} = b$$ **, т. е.**

$$3^{\log_3 6} = 6$$

Решение

Вычислите:

$$\log_{\frac{1}{3}} 1$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$\log_a 1 = 0$$ ***, т. е.***

$$\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$$

Решение

Вычислите:

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$\log_a a = 1$$

, т. е.

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$$

Решение

Вычислите:

$$2^{3+\log_2 5}$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$a^{\log_a b} = b$$ **, т. е.**

$$2^{3+\log_2 5} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 5} = 8 \cdot 5 = 40$$

Решение

Вычислите:

$а)\ 4^{\log_4 7}$

$б)\ 3^{2+\log_3 11}$

$в)\ 10^{3-\lg 40}$

$г)\ -5\cdot 2^{\log_2 7}$

$д)\ \dfrac{5^{\log_5 6}}{48}$

$а)\ 7$

$б)\ 99$

$в)\ 25$

$г)\ -35$

$д)\ 0{,}125$

Свойства логарифмов

$$\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y\ ,$$

$$a > 0,\ y > 0,\ a \neq 1$$

т.е. логарифмы двух взаимообратных чисел по одному и тому же основанию отличаются друг от друга только знаком.

$$\log_3 \frac{1}{7} = -\log_3 7$$

1. **Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей**

$$\log_x(ab) = \log_x a + \log_x b$$

а) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2 = \log_{10} (5 * 2) = 1$

б) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72 = \log_{12} (2 * 72) = 2$

Свойства логарифмов

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y),$$
$$a \rangle 0, x \rangle 0, y \rangle 0, a \neq 1$$

т. е. логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей (взятых по тому же основанию).

$$\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 (2 \cdot 3) = \log_6 6 = 1$$

Вычислите:

$$\log_6 12 + \log_6 3$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$ **, т. е.**

$$\log_6 12 + \log_6 3 = \log_6 (12 \cdot 6) = \log_6 36 = 2$$

Решение

Вычислите:

1. $\log_{18} 2 + \log_{18} 9$
2. $\log_4 8 + \log_4 32$
3. $\log_{32} 2 + \log_{32} 2$
4. $\lg 40 + \lg 25$

1) 1
2) 4
3) 0,2
4) 3

2. **Логарифм частного равен логарифмов делимого без логарифма делителя**

$$\log_x\left(\frac{a}{b}\right)=\log_x a-\log_x b$$

в) $\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 (75/3) = 2$

Свойства логарифмов

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y},$$

$$a > 0,\ x > 0,\ y > 0,\ a \neq 1$$

$$\log_2 30 - \log_2 15 = \log_2(30:15) = \log_2 2 = 1$$

Вычислите:

$$\log_2 15 - \log_2 30$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$ **, т. е.**

$$\log_2 15 - \log_2 30 = \log_2 \frac{15}{30} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

Решение

Вычислите:

$$\log_{\frac{1}{2}} 28 - \log_{\frac{1}{2}} 7$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

, т. е.

$$\log_{\frac{1}{2}} 28 - \log_{\frac{1}{2}} 7 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{28}{7} = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$$

Решение

Вычислите:

$$\log_2 4 \cdot \log_3 27$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$\log_a a^r = r$$ ***, т. е.***

$$\log_2 4 \cdot \log_3 27 = \log_2 2^2 \cdot \log_3 3^3 = 2 \cdot 3 = 6$$

Решение

выход

3. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания

$$\log_x a^m = m \log_x a$$

г) $\log_3 3^{1/7} = (1/7) \log_3 3 = 1/7$

4. Логарифм, у которого основание в степени

$$\log_{a^{к}} x = \frac{1}{к} \log_a x$$

Формула перехода к новому основанию:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Из этой формулы следует равенство:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Вычислите:

$$\frac{\log_7 25}{\log_7 5}$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

, т. е.

$$\frac{\log_7 25}{\log_7 5} = \log_5 25 = 2$$

Решение

Свойства логарифмов

- $$\log_x a \cdot \log_a x = 1,$$
  $$x > 0,\ x \neq 1,\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$\log_{11} 3 \cdot \log_3 11 = 1$$

$$\log_x a \cdot \log_a x = 1$$

$$а)\log_3 5 \cdot \log_5 9 = \log_3 5 \cdot \log_5 3^2 =$$
$$= 2\log_3 5 \cdot \log_5 3 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\log_a x^n = \text{n} \cdot \log_a x$$

$$б)8^{\log_2 5} = 2^{3\log_2 5} = 2^{\log_2 5^3} = 5^3 = 125$$

$$в)5^{-4\log_5 2} = 5^{\log_5 2^{-4}} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

Примеры

$$a)\ \frac{\ln 216}{\ln \sqrt[4]{6}} = \frac{\ln 6^3}{\ln 6^{\frac{1}{4}}} = \frac{3\ln 6}{\frac{1}{4}\ln 6} = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 3\cdot\frac{4}{1} = 12$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

$$\boxed{\log_a x^n = n\cdot\log_a x}$$

$$б)\ \frac{\log_{0,3} 8}{\log_{0,09} 8} = \frac{\log_{0,3} 8}{\log_{0,3^2} 8} = \frac{\log_{0,3} 8}{\frac{1}{2}\log_{0,3} 8} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1:\frac{1}{2} = 1\cdot\frac{2}{1} = 2$$

$$\boxed{\log_{a^k} x = \frac{1}{k}\log_a x}$$

Справочная информация.

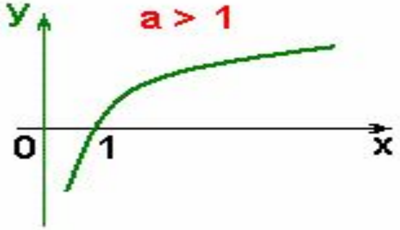
Логарифм

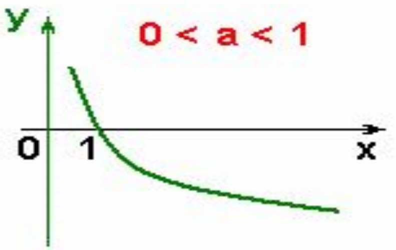
$\log_a x = b$, если $a^b = x$

$\log_a a^b = b$	$a^{\log_a x} = x$

Логарифмическая функция

$y = \log_a x$ $\quad a > 0,\ a \neq 1$





$\lg x = \log_{10} x$	$e^{\ln x} = x$
$\ln x = \log_e x$	$e^{x \ln a} = a^x$
$e = 2{,}71828\ldots$	$\ln e^x = x$

Свойства

1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$

4) $\log_a 1 = 0$ $\quad$ 5) $\log_a a = 1$

6) $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

7) $\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}$

8) $\log_{\left(\frac{1}{a}\right)^n} a^m = -\frac{m}{n}$

9) $\log_{a^n} \left(\frac{1}{a}\right)^m = -\frac{m}{n}$

10) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$