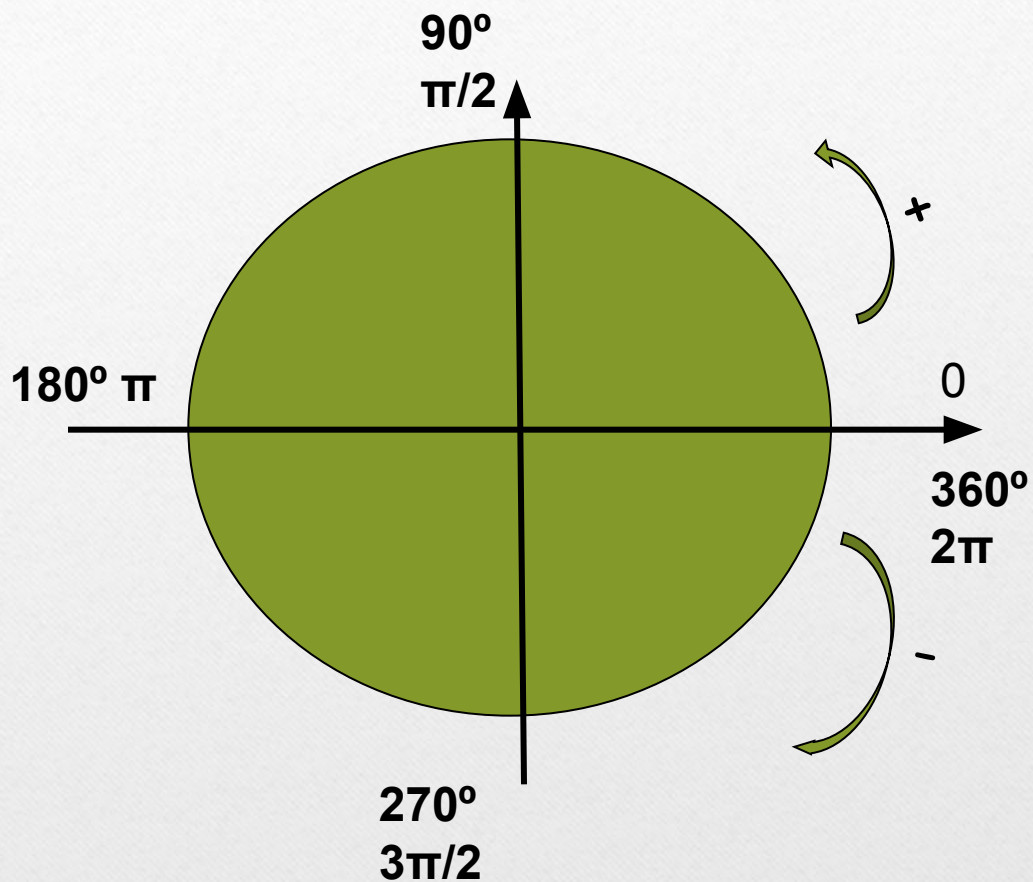


***ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ  
ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ***

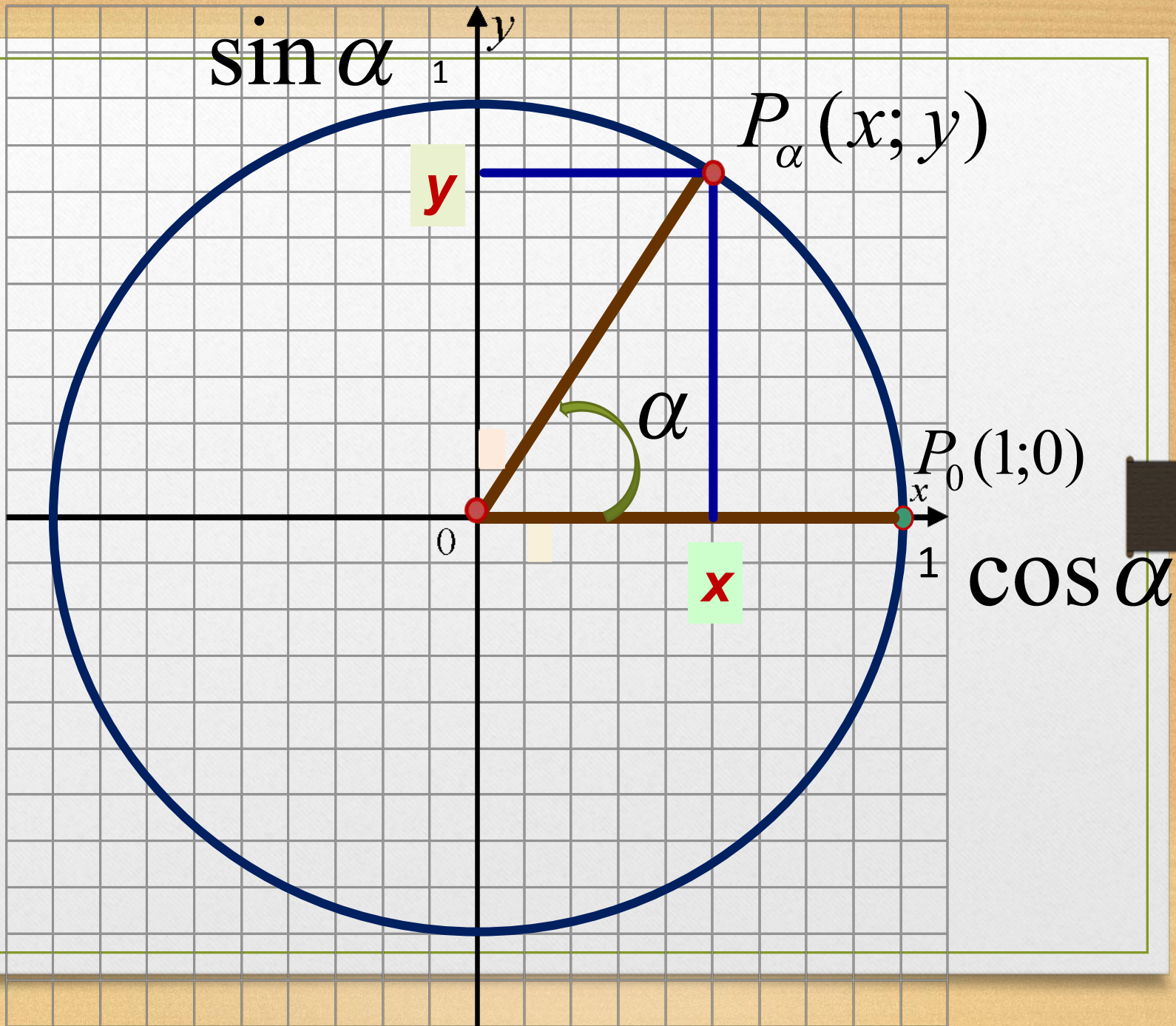
1

# Тригонометрический круг



$$\pi = 180^\circ$$

2



# Знаки по четвертям

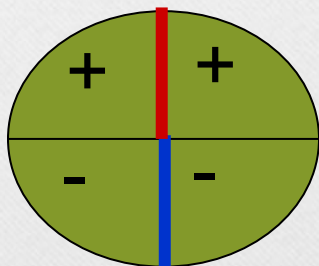
**Синус:** знаки соответствуют знакам по оси  $Y$ ,

**Косинус:** знаки соответствуют знакам по оси  $X$

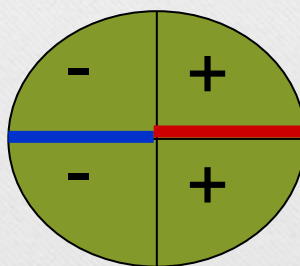
**Тангенс и котангенс:**

в 1 четверти знак плюс, далее знаки чередуются

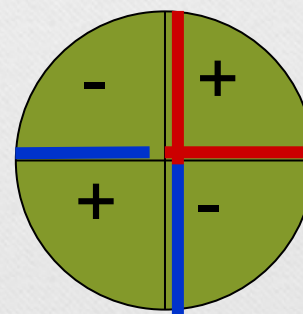
Sin



Cos



tg, ctg



## Градусная мера угла в радианах

$$n^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \cdot n$$

рад

$\pi$

- Радианная мера угла в градусах?

$$\alpha \text{ рад} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \cdot \alpha$$

$\alpha^{\circ}$

$\pi$

## Таблица

| Функция      | Значения |                      |                      |                      |                 |
|--------------|----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
|              | 0        | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
|              | 0°       | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90°             |
| <b>sin x</b> | 0        | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| <b>cos x</b> | 1        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| <b>tg x</b>  | 0        | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | -               |
| <b>ctg x</b> | -        | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               |

## Четность, нечетность тригонометрических функций

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Нечетные  
функции

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

Четная  
функция

## Обратные тригонометрических функций

$$\arcsin(-b) = -\arcsin b$$

$$\arctg(-b) = -\arctgb$$

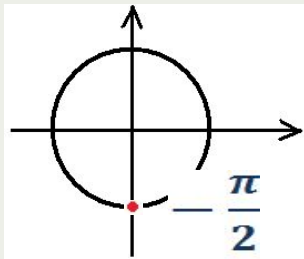
$$\arccos(-b) = \Pi - \arccos b$$

$$\text{arcctg}(-b) = \Pi - \text{arcctgb}$$



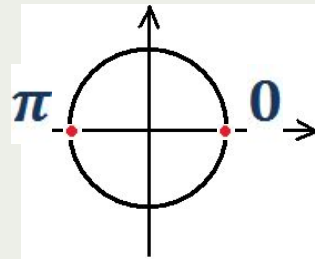
$$\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



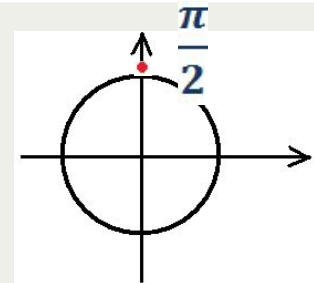
$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



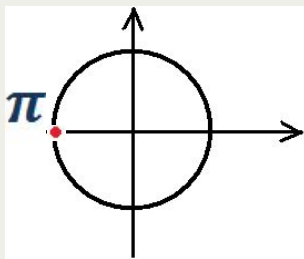
$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



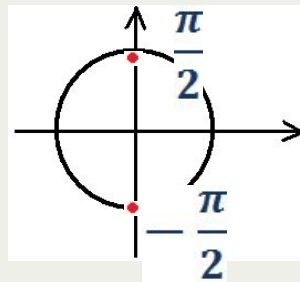
$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



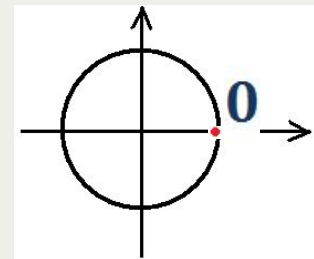
$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



# РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

9

$$\cos x = a$$

Если  $|a| > 1$  уравнение не имеет решения.

Если  $|a| \leq 1$   $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = a$$

Если  $|a| > 1$  уравнение не имеет решения.

Если  $|a| \leq 1$   $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{tg} x = a$$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$a \in (-\infty, +\infty)$$

$$\operatorname{ctg} x = a$$

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

## Решения

## Примеры

$$\sin x = a$$

$$|a| > 1$$

Корней нет

$$|a| \leq 1$$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbf{Z}$$

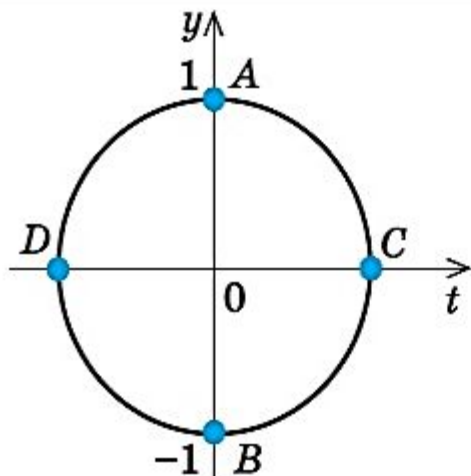
1.  $\blacktriangleright \sin x = \frac{1}{2},$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}. \triangleleft$$

2.  $\blacktriangleright \sin x = \sqrt{3}.$

Корней нет, так как  $\sqrt{3} > 1. \triangleleft$

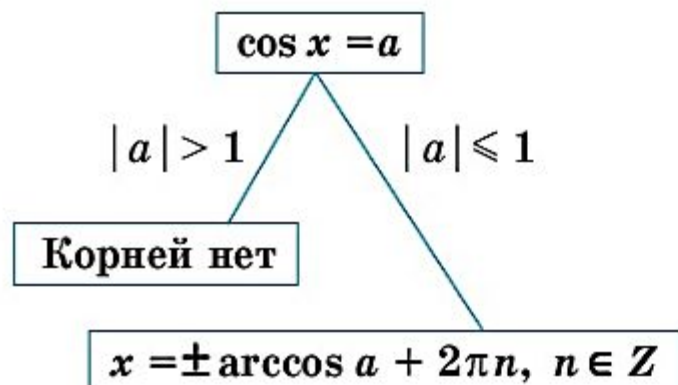
2. Частные случаи решения уравнения  $\sin x = a$ 

$$\sin x = 0 \quad x = \pi k, k \in \mathbf{Z}$$

$$\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$$

$$\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$$

## Решения



## Примеры

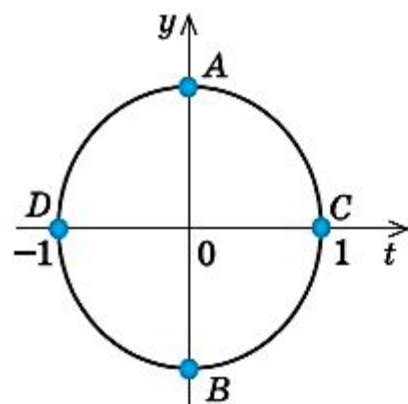
1.  $\blacktriangleright \cos x = \frac{1}{2},$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \triangleleft$$

2.  $\blacktriangleright \cos x = \sqrt{3}.$

Корней нет, поскольку  $\sqrt{3} > 1. \triangleleft$

2. Частные случаи решения уравнения  $\cos x = a$ 

$$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1 \quad x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

| Формула   | Пример   |
|---|--|
| <div data-bbox="198 258 807 382" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <math display="block">\operatorname{tg} x = a</math> <math display="block">x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbf{Z}</math> </div> <p data-bbox="336 396 672 445">Частный случай</p> <div data-bbox="314 454 691 575" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math display="block">\operatorname{tg} x = 0</math> <math display="block">x = \pi n, n \in \mathbf{Z}</math> </div> | <p data-bbox="1273 262 1445 311"><math>\operatorname{tg} x = 1</math></p> <p data-bbox="1064 354 1657 402">▶ <math>x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, n \in \mathbf{Z}.</math></p> <p data-bbox="1149 468 1580 554"><math>x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}. \triangleleft</math></p> |

| Формула  | Пример  |
|--|---|
| <div data-bbox="175 843 803 968" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <math display="block">\operatorname{ctg} x = a</math> <math display="block">x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbf{Z}</math> </div> <p data-bbox="316 986 662 1035">Частный случай</p> <div data-bbox="249 1058 730 1253" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math display="block">\operatorname{ctg} x = 0</math> <math display="block">x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}</math> </div> | <p data-bbox="1306 958 1503 1006"><math>\operatorname{ctg} x = 7</math></p> <p data-bbox="1060 1068 1750 1116">▶ <math>x = \operatorname{arctg} 7 + \pi n, n \in \mathbf{Z}. \triangleleft</math></p> |

13

## Тригонометрические уравнения, решаемые вынесением за скобки....

$$\cos^2 x - 2\cos x = 0.$$

$$\cos x(\cos x - 2) = 0.$$

$$\cos x = 0$$

или

$$\cos x - 2 = 0.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 2$$

решений нет

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 2$$

решений нет

## Тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным

$$\cos^2 x + 4\cos x - 5 = 0$$

Сделаем замену переменной  $t = \cos x$   $|t| \leq 1$

$$t^2 + 4t - 5 = 0$$

Получаем:  $t = -5$ ,  $t = 1$

Делаем обратную замену

$$\cos x = 1$$

$\cos x = -5$  решений нет

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

## Тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным

$$6\cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0.$$

$$6(1 - \sin^2 x) + 5 \sin x - 7 = 0.$$

$$6\sin^2 x - 5 \sin x + 1 = 0.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 2$$

решений нет

Далее применяем формулу  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$   $\cos x = 2$

решений нет



## Пример

$$\sqrt{2}\sin^2 x + \cos x = 0$$

Применим основное тригонометрическое тождество

$$\sqrt{2} - \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x = 0$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Сделаем замену переменной

$$t = \cos x \quad \sqrt{2} - \sqrt{2}t^2 + t = 0$$

Получаем:  $t = \sqrt{2}$  ,  $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$|t| \leq 1$$

## Однородные тригонометрические уравнения 1 степени

$$\sin x - 2 \cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 2$$

решений нет

Однородные тригонометрические уравнения  
2 степени

18

$$\sin^2 x - 6 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 0.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 2$$

решений нет

**Пример**

$$\cos 2x + \cos x = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0$$

Сделаем замену переменной  $t = \cos x$ 

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

Получаем:  $t = -1$      $t = \frac{1}{2}$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

**Ответ:**  $\pi + 2\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$

$$|t| \leq 1$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

## Пример

$$\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 4$$

$$\operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 4$$

Сделаем замену переменной

$$t = \operatorname{tg} x$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

Получаем:  $t = 3$ ,  $t = 1$

$$\operatorname{tg} x = 3$$

$$x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = 1/\operatorname{ctg} x$$

Ответ:  $\frac{\pi}{4} + \pi n, \operatorname{arctg} 3 + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$

*Задания для самостоятельной работы*

| Вариант № 1                                 | Вариант № 2                                 |
|---|---|
| 1) $2\sin^2 x - 7 \cos x - 5 = 0$           | 1) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$            |
| 2) $\cos 2x + 3\sin x = 2$                  | 2) $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x = 1\frac{9}{16}$ |
| 3) $2\cos^2 3x + \sin 3x - 1 = 0$           | 2) $2\tg x - 2\ctg x = 3$                   |
| 4) $\ctg x - \sqrt{3} \tg x + 1 = \sqrt{3}$ | 4) $\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0,25$     |
| 5) $1 + \cos x = \ctg \frac{x}{2}$          | 5) $2\cos 2x - 4 \cos x = 1$                |

## Ответы самостоятельной работы

| Вариант № 1   | Вариант № 2  |
|---|--|
| 1) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  | 1) $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$  |
| 2) $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n, k \in \mathbb{Z}$            | 2) $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, k, n \in \mathbb{Z}$   |
| 3) $x = \frac{\pi}{6}(4k+1); (-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}n, n, k \in \mathbb{Z}$ | 3) $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$<br>или $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ |
| 4) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi n, n, k \in \mathbb{Z}$                   | 4) $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$  |
| 5) $x = \pi + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}$                            | 5) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$   |

## 2. Основные тригонометрические тождества

## 3. Формулы двойного аргумента



|   |   |    |  |
|---|---|----|--|
| 1 | $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$                         | 7  | $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  |
| 2 | $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$     | 8  | $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$  |
| 3 | $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$    | 9  | $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$  |
| 4 | $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$    | 10 | $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$  |
| 5 | $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  | 11 | $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$    |
| 6 | $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ | 12 | $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$ |



## 4. Формулы сложения



$$1 \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$2 \quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$3 \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$4 \quad \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$5 \quad \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tgy}}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tgy}}$$

$$6 \quad \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tgy}}{1 + \operatorname{tg}x \operatorname{tgy}}$$

$$7 \quad \operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg}x \operatorname{ctgy} - 1}{\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctgy}}$$

$$8 \quad \operatorname{ctg}(x - y) = \frac{\operatorname{ctg}x \operatorname{ctgy} + 1}{\operatorname{ctg}x - \operatorname{ctgy}}$$



## 5. Формулы преобразования суммы в произведение

$$1 \quad \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$2 \quad \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$3 \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$4 \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

## 6. Формулы преобразования произведения в сумму

$$1 \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$2 \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$3 \quad \sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

## Формулы приведения

| $\alpha$ | $-\alpha$                    | $\frac{\pi}{2} - \alpha$    | $\frac{\pi}{2} + \alpha$     | $\pi - \alpha$               | $\pi + \alpha$              | $\frac{3\pi}{2} - \alpha$   | $\frac{3\pi}{2} + \alpha$    | $2\pi - \alpha$              | $2\pi + \alpha$             |
|----------|------------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| sin      | $-\sin \alpha$               | $\cos \alpha$               | $\cos \alpha$                | $\sin \alpha$                | $-\sin \alpha$              | $-\cos \alpha$              | $-\cos \alpha$               | $-\sin \alpha$               | $\sin \alpha$               |
| cos      | $\cos \alpha$                | $\sin \alpha$               | $-\sin \alpha$               | $-\cos \alpha$               | $-\cos \alpha$              | $-\sin \alpha$              | $\sin \alpha$                | $\cos \alpha$                | $\cos \alpha$               |
| tg       | $-\operatorname{tg} \alpha$  | $\operatorname{ctg} \alpha$ | $-\operatorname{ctg} \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$  | $\operatorname{tg} \alpha$  | $\operatorname{ctg} \alpha$ | $-\operatorname{ctg} \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$  | $\operatorname{tg} \alpha$  |
| ctg      | $-\operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$  | $-\operatorname{tg} \alpha$  | $-\operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$  | $-\operatorname{tg} \alpha$  | $-\operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$ |