

Название дисциплины:

Теория вероятностей и математическая статистика

*Очень краткое содержание курса лекций для
факультета менеджмента*

Автор Дружининская И.М.

§ 1. Случайный эксперимент.

Элементарные исходы случайного эксперимента. Случайное событие.

Реализация случайного события возможна в ходе случайного эксперимента (иначе: случайного опыта). Например, нас интересует событие «Выпадение герба при бросании монеты». Но для возможности возникновения этого события следует произвести опыт, состоящий в бросании монеты.

Совокупность всех условий, при которых возможна реализация случайного события, носит название **случайного эксперимента или случайного опыта**.

События обозначаем заглавными латинскими буквами: А, В, С, D,...

Некоторые из случайных событий можно разбить на более простые события.

Те события, которые нельзя разбить на другие более простые события, называются **элементарными событиями** или **элементарными исходами случайного эксперимента**.

Совокупность всех элементарных исходов эксперимента носит название «**множество (или пространство) всех элементарных исходов случайного эксперимента**».

Обозначение: $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \}$

Мы будем рассматривать задачи с элементарными исходами, которые являются равновозможными.

Не всегда число элементарных исходов конечно, т. е. Ω может состоять из бесконечного числа исходов.

Те элементарные исходы, при которых реализуется событие A , называются **элементарными исходами, благоприятствующими наступлению событию A или просто благоприятными исходами**.

§ 2. Классификация случайных событий

Достоверное событие – это событие, которое обязательно произойдёт в данном случайном эксперименте.

Обозначается символом Ω (поскольку включает все возможные элементарные исходы такого случайного эксперимента).

Невозможное событие – такое событие, которое никогда не произойдёт в данном случайном эксперименте.

Противоположное событие - это событие, состоящее в ненаступлении события А.

События удобно изображать, используя множество точек на плоскости. Для этого используются **диаграммы Эйлера - Венна** (иногда – диаграммы Венна).

События А и В называются **несовместными**, если они не могут произойти одновременно в одном и том же случайном эксперименте.

События А и В называются **совместными**, если они могут произойти одновременно в одном и том же случайном эксперименте.

§3. Действия над событиями (исчисление событий)

Объединением двух событий $A \cup B$ или суммой двух событий $(A+B)$ называется новое событие, которое заключается в наступлении хотя бы одного из событий A или B (наступает либо событие A , либо событие B , либо то и другое одновременно).

Обобщение: Объединением нескольких событий называется событие, состоящее в одновременном наступлении хотя бы одного из данных событий.

Пересечением двух событий $A \cap B$ (или AB) называется новое событие, состоящее в одновременном наступлении этих двух событий.

Обобщение: Пересечением нескольких событий называется новое событие, состоящее в одновременном наступлении всех этих событий.

Рассмотрены свойства **операций объединения и пересечения событий**, которые частично совпадают со свойствами операций сложения и умножения чисел, но не всегда. На основе этих свойств в дальнейшем из простых случайных событий формируются более сложные случайные события.

§ 4. Вероятность случайного события.

Ведем численную меру возможности реализации случайного события.

Примем $P(\Omega)=1$; $P(\emptyset)=0$.

Все прочие возможные значения вероятности лежат между этими крайними значениями: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Два подхода к определению вероятности случайного события:

А) Классический

$P(A) = N_A / N$, где N_A - количество благоприятных исходов, т.е. тех исходов, в результате которого наступает событие A , N - общее количество элементарных исходов случайного эксперимента.

Б) Статистический:

Применим тогда, когда эксперимент можно повторять многократно в неизменных условиях.

Пусть выполнено большое число экспериментов n и пусть в n_A из них событие A реализуется, тогда n_A / n – относительная частота возникновения события A . Можно приближенно принять, что

$$P(A) \approx n_A / n.$$

§ 5. Геометрическая вероятность.

Геометрическая вероятность позволяет рассматривать случайные события с бесконечным числом равновозможных элементарных исходов.

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события A , к мере всей области:

§ 6. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел дискретной математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов конечного множества в соответствии с заданными правилами.

Пусть имеется набор из n элементов.

Отличающиеся друг от друга порядком наборы, составленные из всех элементов данного множества, называются **перестановками** этого множества.

Обозначение:

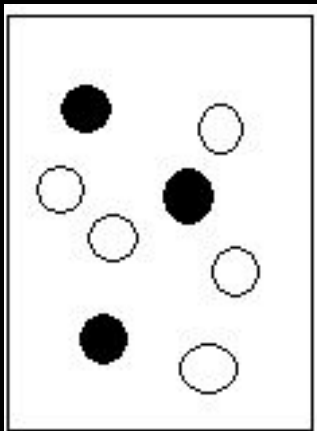
Размещениями называются комбинации, состоящие из n различных элементов, содержащие k элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо их порядком ($k \leq n$).

Число размещений вычисляется по формуле:

Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов, содержащие k элементов, которые отличаются только составом элементов ($k \leq n$).

Урновая модель (гипергеометрическое распределение):

В урне имеется N шаров, из них M - белых шаров, тогда $(N-M)$ – черных шаров. Случайным образом вынули n шаров ($n \leq N$). Какова вероятность, что среди вынутых оказалось m белых шаров ($m \leq M$)?



Рассмотрено также обобщение урновой модели.

§7. Условная вероятность. Независимые и зависимые случайные события.

Пусть события A и B происходят на одном и том же пространстве элементарных исходов. Кроме того, пусть эти события являются совместными, т.е. могут произойти в одном и том же случайном эксперименте.

Условная вероятность — это вероятность события A при условии, что произошло событие B .

Обозначение: $P(A/B)$.

Событие A не зависит от события B , если $P(A)=P(A/B)$.

Событие A зависит от события B , если $P(A) \neq P(A/B)$.

Если A зависит от B , то и B зависит от A (события A и B — зависимые) .

Если A не зависит от B , то и B не зависит от A (события A и B — независимые) .

§8. Основные теоремы теории вероятностей.

Теорема сложения вероятностей:

Для совместных событий вероятность объединения событий определяется формулой:

Для несовместных событий вероятность объединения событий определяется формулой:

Для трех совместных событий справедлива следующая формула:

Обобщение формулы на произвольное число совместных событий:

Теорема умножения вероятностей:

Для зависимых событий вероятность пересечения событий определяется формулой :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Следствие:

если события A и B – независимые, то $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Обобщение теоремы умножения вероятностей на случай многих событий:

а) Для зависимых событий :

б) Для независимых событий :

Формула полной вероятности

Совокупность событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ назовём полной группой событий, если они попарно несовместны и их объединение даёт достоверное событие.

События H_i называются гипотезами.

Теорема:

Имеем полную группу событий $H_1, H_2, \dots, H_n$.

Пусть событие A может происходить одновременно только с одним из этих событий, тогда:

Формула Байеса

Теорема (получение формулы Байеса):

Эта формула позволяет пересчитывать исходные (априорные) вероятности гипотез после получения сведений о том, что событие A произошло. В результате получаем уточненные (апостериорные) вероятности гипотез, т.е. мы корректируем вероятности выдвинутых до испытания гипотез при получении новой информации о реализации события A .

§9. Повторные независимые испытания (схема Бернулли)

Пусть в одних тех же условиях проводится n повторных независимых испытаний, в каждом из которых с одной и той же вероятностью p может произойти определенное событие или же не произойти это событие с вероятностью $q = 1 - p$.

Ограничения модели:

- Каждое испытание имеет два исхода (наступление или же ненаступление события).
- Результат каждого данного испытания не зависит от результатов предыдущих испытаний.
- Вероятность наступления интересующего нас события не меняется от испытания к испытанию.

Теорема (вывод формулы Бернулли):

Если вероятность наступления события A в каждом испытании равна p ,
то вероятность того, что событие A в n испытаниях наступит k раз,
вычисляется по формуле:

Число успехов K_0 (реализаций события A), вероятность наступления которого наибольшая по сравнению с вероятностью наступления успехов любое другое количество раз, назовем **наивероятнейшим числом успехов**. Поэтому на практике чаще всего реализуется именно такое число успехов (реализаций события A).

Теорема:

Наивероятнейшее число наступлений события A в n испытаниях заключено между числами :

Заметит, что разность между $(n \cdot p - q)$ и $(n \cdot p + p)$ равна 1.

Число $K_0 \approx n \cdot p$.

Иногда бывает, что $K_0^{(1)} = (n \cdot p - q)$ – целое число, тогда и $K_0^{(2)} = (n \cdot p + p)$ – целое число. В этом случае имеются два наивероятнейших числа, для которых вероятности принимают самые большие и одинаковые значения: $P(K_0^{(1)}) = P(K_0^{(2)})$.

§10. Случайная величина (СВ) и закон ее распределения (з.р.).

Случайная величина обозначается заглавной буквой X (если случайных величин несколько, то вводят Y , Z и т.д.);

значение, которое принимает случайная величина, обозначается малой буквой x .

Пишут $X = x$. Это запись означает, что случайная величина приняла некоторое конкретное значение.

Случайной величиной называется числовая функция, заданная на пространстве элементарных исходов случайного эксперимента (т.е. для каждого значения задается определенное значение X).

Следует отметить, что и вероятность является числовой функцией, заданной на пространстве элементарных исходов случайного эксперимента, т.е.

Существует два типа случайных величин – **дискретные** и **непрерывные**.

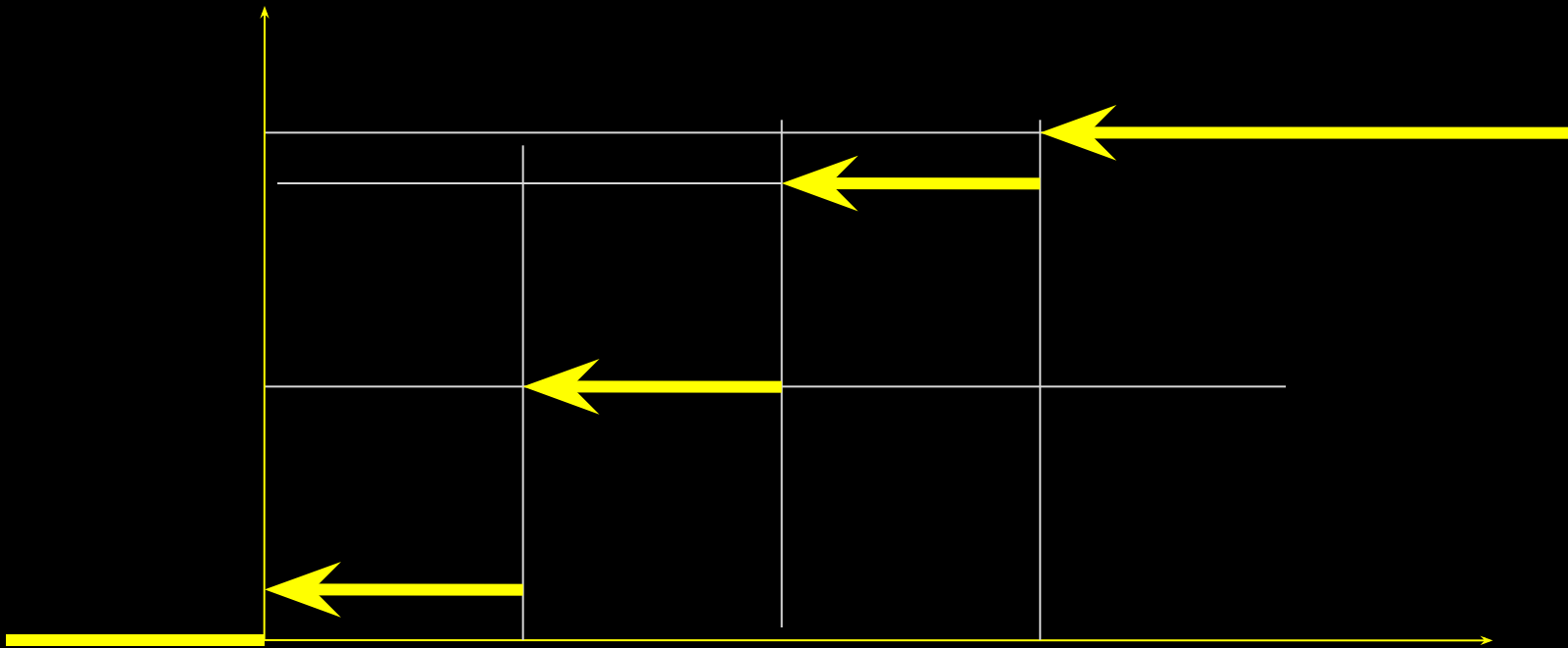
Закон распределения случайной величины – это правило, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Введем универсальный з.р., который подходит как для описания поведения дискретной СВ, так и для описания поведения непрерывной СВ.

Функцией распределения случайной величины называют

Доказаны свойства функции распределения.

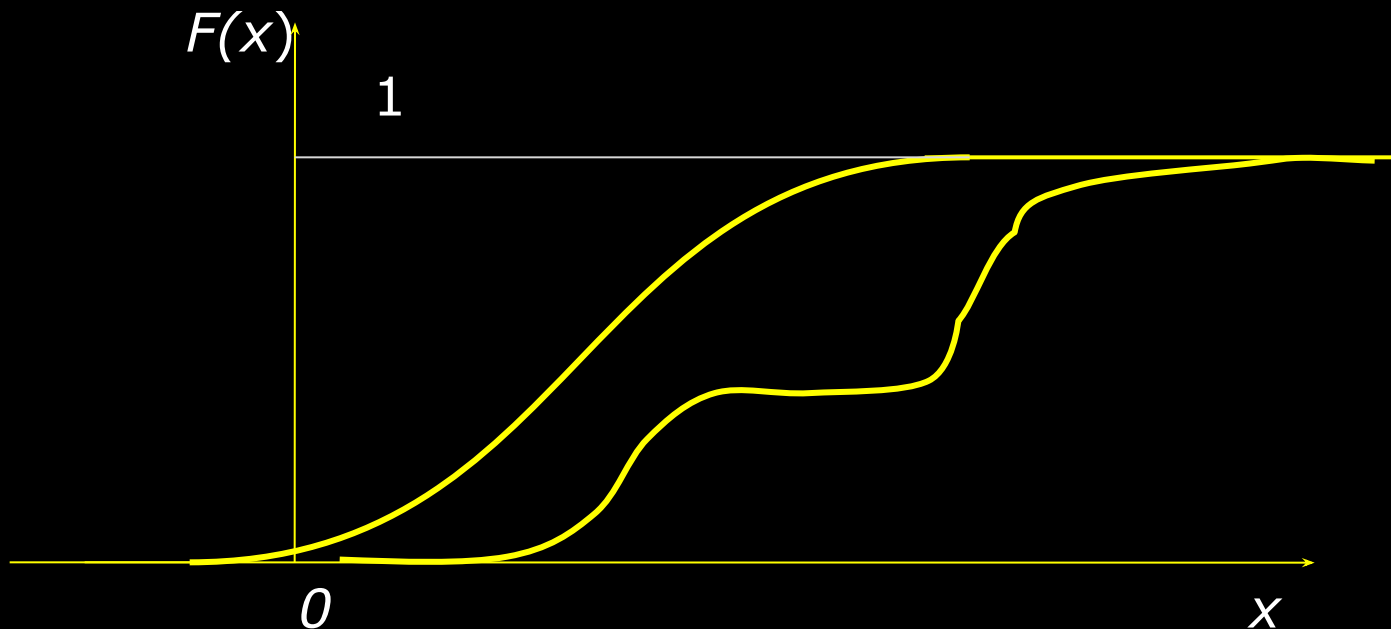
Пример графика функции распределения для дискретной случайной величины X – числа выпадений герба при трехкратном бросании правильной монеты.



Если случайная величина такова, что ее функция распределения может быть представлена в виде:

(здесь t – переменная интегрирования), то мы назовем ее непрерывной случайной величиной.

График функции распределения для непрерывной СВ может выглядеть, например, следующим образом:



Функцию $f(x)$ используют для описания поведения непрерывных случайных величин, ибо она полностью содержит всю информацию, которая нужна для анализа поведения непрерывных случайных величин.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный числовой промежуток определяется формулой:

Доказаны свойства плотности вероятности.