

15.2. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Важным свойством системы тригонометрических функций (2) является их ортогональность на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Ортогональность понимается следующим образом:

Интеграл по этому отрезку от произведения любых двух функций этой системы
-равен нулю, если в подынтегральную функцию входят различные функции системы (2);
-равен положительному числу, если подынтегральная функция состоит из квадрата любой функции системы (2).

Проверим это свойство для всех функций системы.



$$k \neq n,$$
$$k, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nxdx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k+n)x + \cos(k-n)x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+n)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-n)x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+n} \sin(k+n)x + \frac{1}{k-n} \sin(k-n)x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+n} \sin(k+n)\pi + \frac{1}{k-n} \sin(k-n)\pi +$$

$$+ \frac{1}{k+n} \sin(k+n)\pi + \frac{1}{k-n} \sin(k-n)\pi \right) = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k-n)x - \cos(k+n)x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-n)x dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+n)x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-n} \sin(k-n)x - \frac{1}{k+n} \sin(k+n)x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-n} \sin(k-n)\pi - \frac{1}{k+n} \sin(k+n)\pi -$$

$$- \frac{1}{k-n} \sin(k-n)\pi + \frac{1}{k+n} \sin(k+n)\pi \right) = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(k+n)x + \sin(k-n)x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k+n)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k-n)x dx =$$

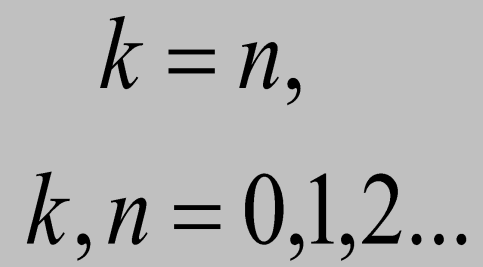
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+n} \cos(k+n)x + \frac{1}{k-n} \cos(k-n)x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+n} \cos(k+n)\pi + \frac{1}{k-n} \cos(k-n)\pi -$$

$$- \frac{1}{k+n} \cos(k+n)\pi - \frac{1}{k-n} \cos(k-n)\pi \right) = 0$$



2


$$k = n,$$
$$k, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2n} \sin 2nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi + \pi + \frac{1}{2n} \sin 2n\pi + \frac{1}{2n} \sin 2n\pi \right) = \pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nxdx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2n} \sin 2nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi + \pi - \frac{1}{2n} \sin 2n\pi - \frac{1}{2n} \sin 2n\pi \right) = \pi\end{aligned}$$