

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
пос. Ровеньки “Средняя школа № 2”

***Итоговый индивидуальный проект
на тему:
«Правильные и полуправильные многогранники»***

Выполнила:
ученица класса «11»
Новомлинская Алина Викторовна
Руководитель:
Учитель математики
Фоменко Ольга Анатольевна

пос. Ровеньки,
2022г

Актуальность: Считая данную тему актуальной для меня и моих ровесников, я решила привлечь их внимание, рассказав о том, в каких областях встречаются правильные и полуправильные многогранники в нашей жизни. Также я провела исследование материалов ЕГЭ прошлых лет с целью оценить частоту появления задач на многогранники в экзаменах. Эти данные можно увидеть в приложении №1

Проблема: правильные и полуправильные многогранники упоминаются в программах многих школьных предметов (например, в химии и биологии), Но не все имеют хорошее пространственное воображение и могут представить расположение элементов. Возникает необходимость создания моделей многогранников, а для этого требуется изучение их свойств и свойств развёрток.

Цель проекта: расширить систему собственных знаний о правильных и полуправильных многогранниках и создать их модели вручную для наглядного представления

Задачи проекта:

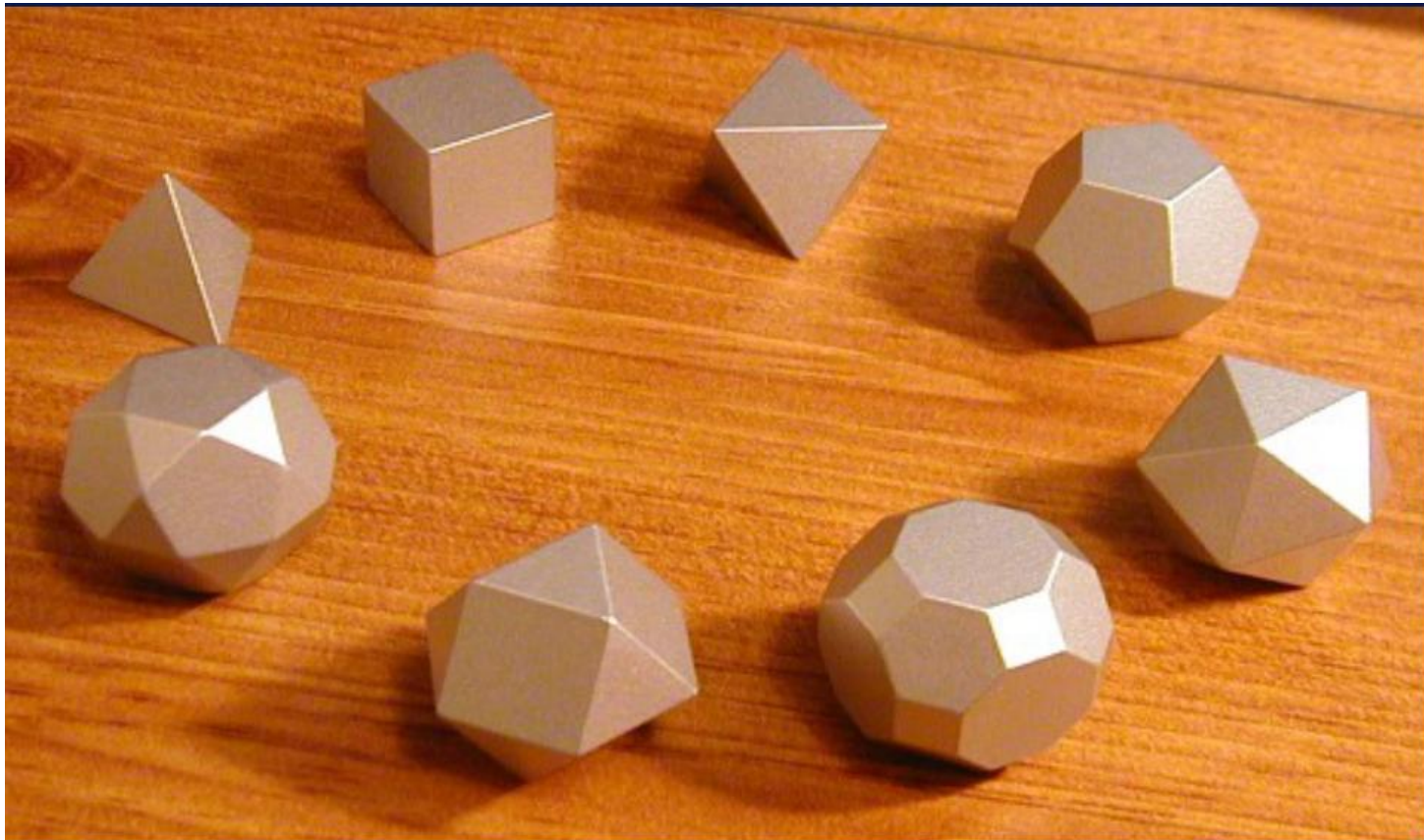
- Изучить историю правильных и полуправильных многогранников;
- Изучить разновидности и свойства правильных и полуправильных многогранников;
- Исследовать, где правильные и полуправильные многогранники встречаются в жизни людей;
- Изучить способы создания моделей правильных и полуправильных многогранников
- Сделать модели правильных многогранников для наглядного представления;

Методы исследования:

- Информационный (сбор информации в различных источниках)
- Аналитический (анализ и систематизация данных)
- Презентационный (создание презентации)

Введение

Тему многогранников мы начали изучать ещё в 10 классе. Уже тогда она меня заинтересовала. Решая задачи на уроках геометрии в 11 классе, мы неоднократно встретили задания, связанные с многогранниками. И я поняла, что не все мои одноклассники хорошо понимают данную тему. Поэтому я решила освежить свои знания и знания одноклассников в области многогранников.



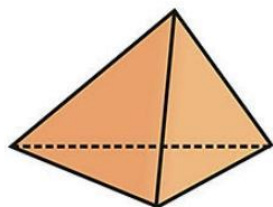
Основные понятия

Многогранник – геометрическое тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников – гранями

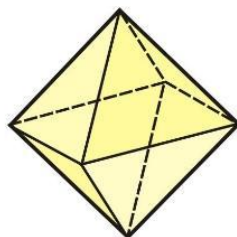
Правильный многогранник

(или платоново тело) - это выпуклый многогранник, состоящий из одинаковых правильных многоугольников и обладающий пространственной симметрией

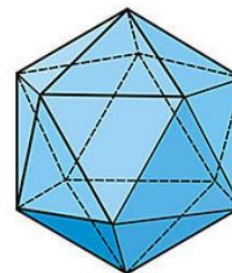
Правильные многогранники



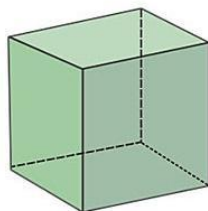
тетраэдр



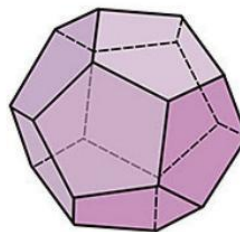
октаэдр



икосаэдр



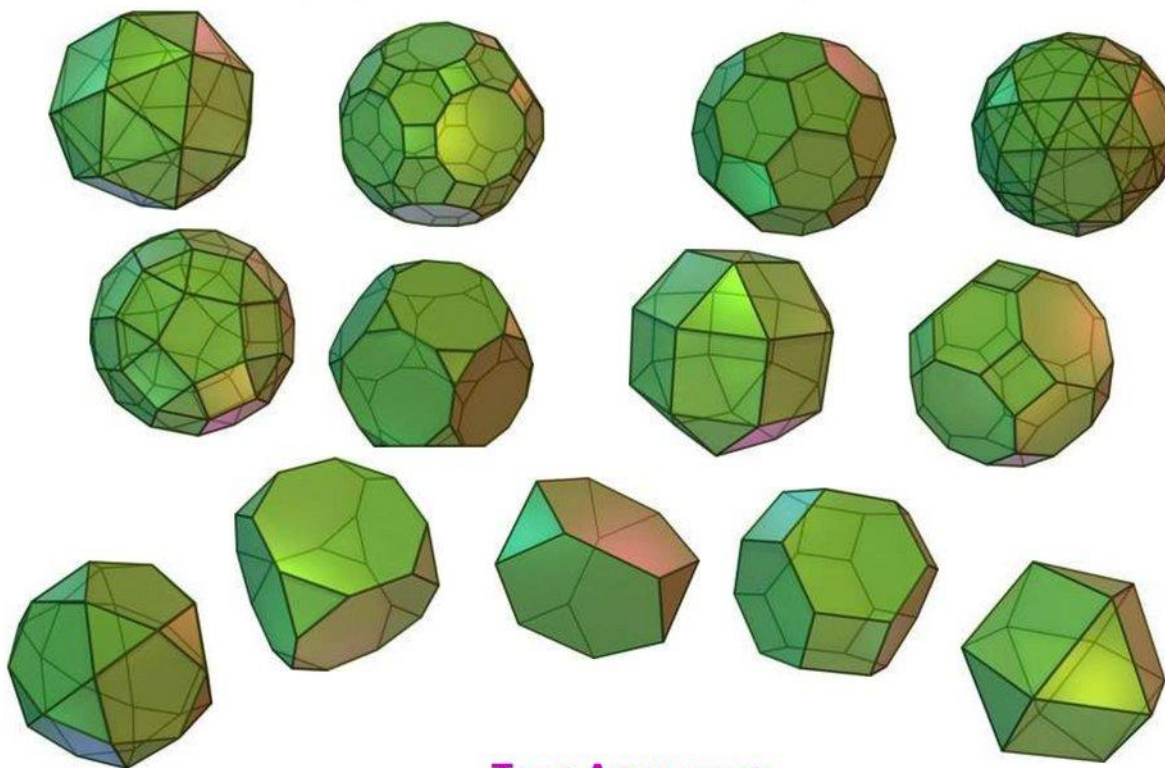
гексаэдр



додекаэдр

Полуправильные многогранники (тела Архимеда) - различные выпуклые многогранники, которые, не являясь правильными, имеют некоторые их признаки, например: все грани равны, или все грани являются правильными многоугольниками, или имеются определённые пространственные симметрии.

Полуправильные многогранники



Тела Архимеда

История правильных многогранников

Первые упоминания правильных многогранников известны еще за три тысячи лет до нашей эры в Египте и Вавилоне. Достаточно вспомнить знаменитые египетские пирамиды

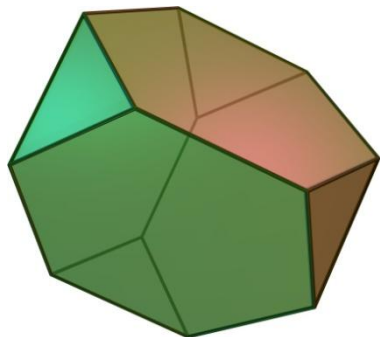
История правильных многогранников уходит в глубокую древность. В начале 7 века до нашей эры в Древней Греции создаются философские школы. Большое значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удалось получать новые геометрические свойства.

Одной из первых и самых известных школ была Пифагорейская, названная в честь своего основателя Пифагора. Позже учение пифагорейцев о правильных многогранниках изложил в своих трудах другой древнегреческий ученый, философ - идеалист Платон. С тех пор правильные многогранники стали называться Платоновыми телами.

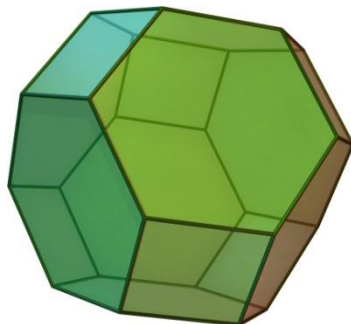
История полуправильных многогранников

Впервые полуправильные многогранники открыл Архимед. Также он подробно описал 13 многогранников, которые позже были названы телами Архимеда. Архимедовы тела частично получаются в результате усечения Платоновых тел. А усечённое тело есть не что иное, как тело с отрезанной верхушкой. Таким образом, могут быть получены первые пять архимедовых тел: усечённые тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, куб и додекаэдр

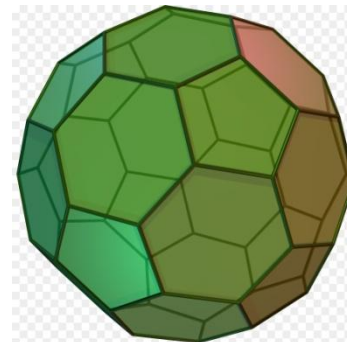
Усечённый тетраэдр



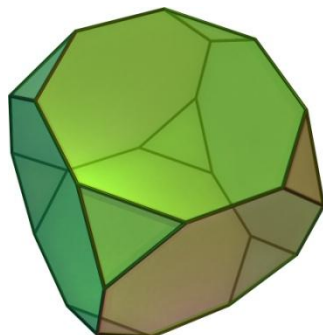
Усечённый октаэдр



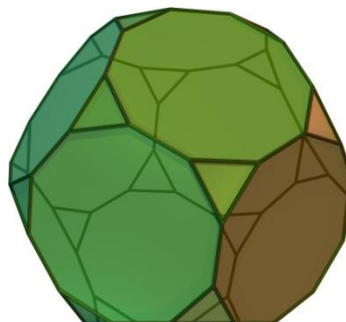
Усечённый икосаэдр



Усечённый куб

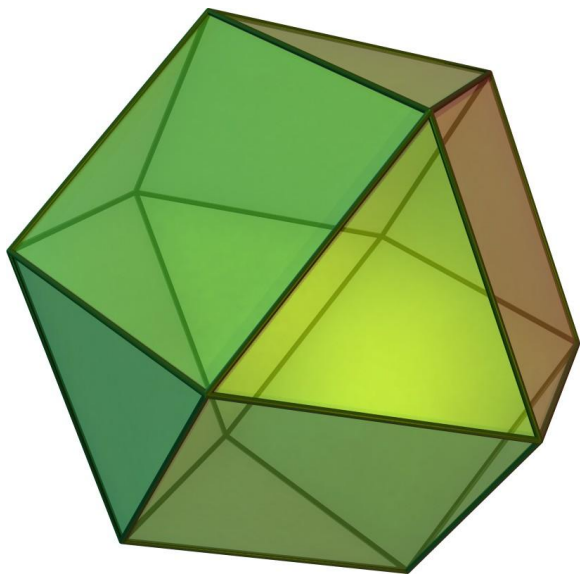


Усечённый додекаэдр

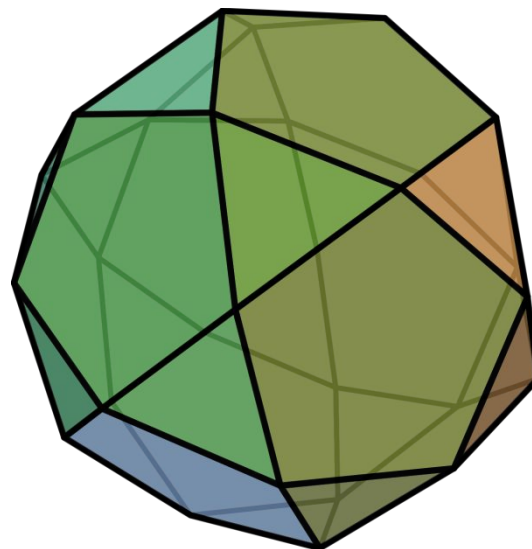


Вторая группа Архимедовых тел представлена двумя многогранниками, полученными в результате пересечения двух Платоновых тел, имеющих подходящие размеры и расположенных так, что их центры совпадают. А именно:

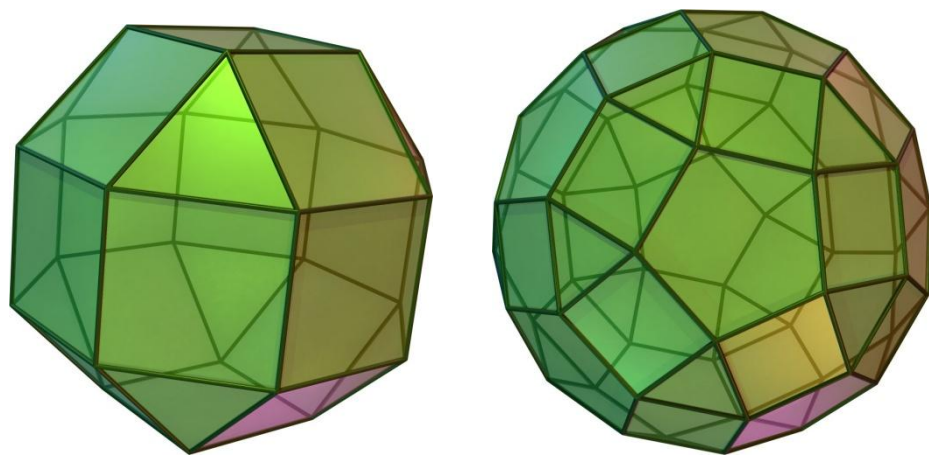
Кубооктаэдр



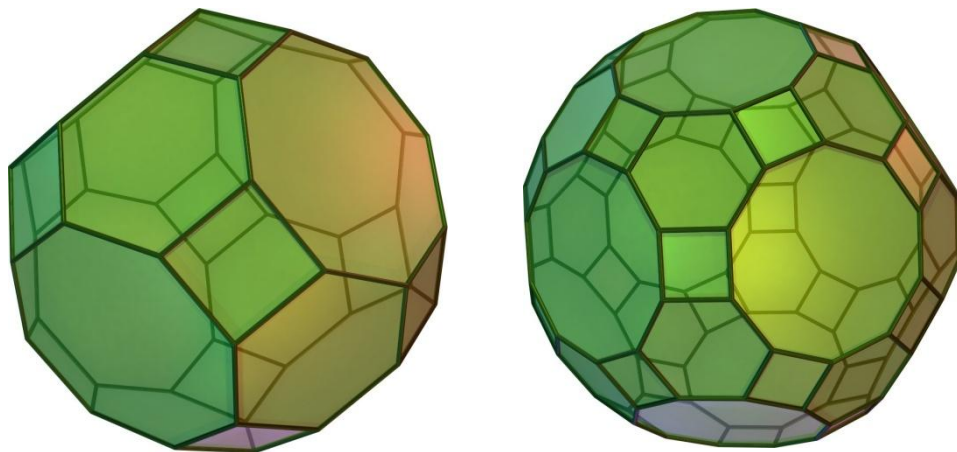
Икосадодекаэдр



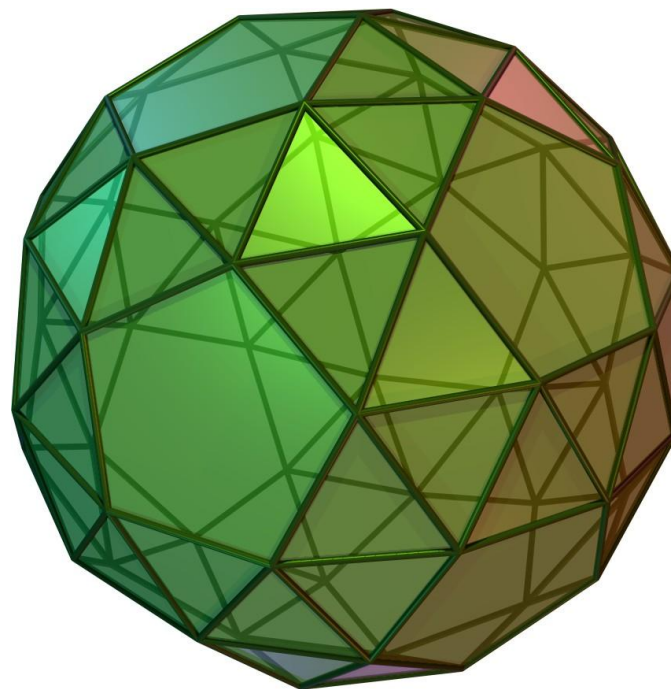
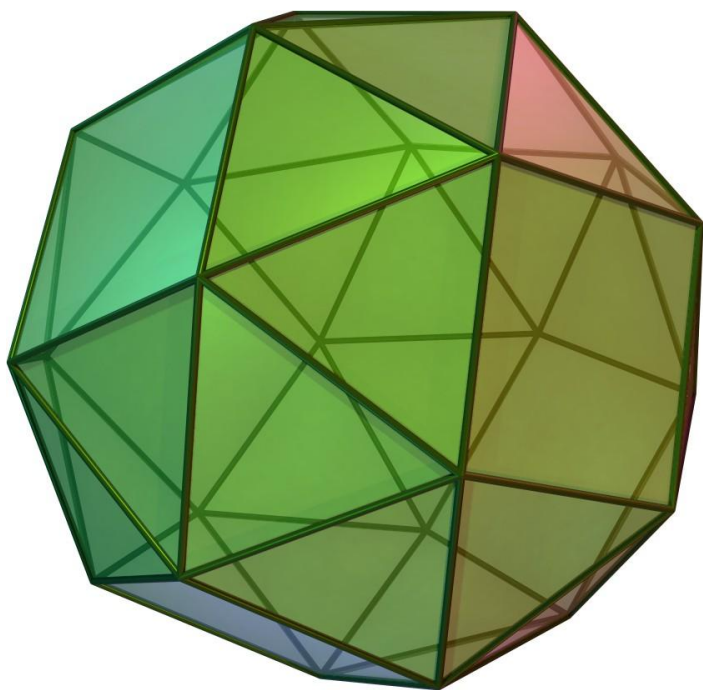
В результате усечения кубооктаэдра и икосадодекаэдра мы и получаем следующие два полуправильных многогранника – ромбокубооктаэдр и ромбоикосадодекаэдр.



Дальнейшие видоизменения могут превратить их в ещё два многогранника – усечённые кубооктаэдр и икосадодекаэдр



Последние два архимедовых тела - курносый куб и курносый додекаэдр. Термин курносый означает, что каждую грань многогранника окружили треугольники, что каждое ребро заменили парой треугольников, а в каждой вершине добавили еще один многоугольник.



Свойства правильных и полуправильных многогранников

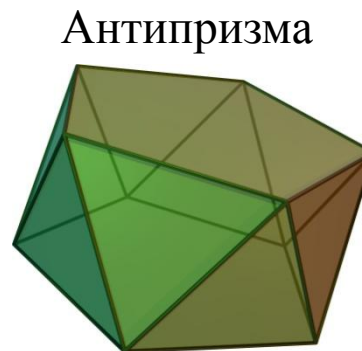
Многогранник называют **правильным**, если:

- он выпуклый;
- все его грани являются равными правильными многоугольниками;
- в каждой его вершине сходится одинаковое число рёбер.

В трёхмерном евклидовом пространстве существует всего пять правильных многогранников. Название каждого многогранника происходит от греческого названия количества его граней и слова «грань».

Если гранями правильного многогранника или Платоновых тел являются однотипные правильные многоугольники (треугольники, квадраты и пентагоны), то гранями полуправильных многогранников, являются правильные многоугольники разных типов.

К полуправильным многогранникам относят n -угольные призмы, все ребра которых равны, а также антипризмы.



Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников имеется ещё 13 полуправильных многогранников, которые впервые открыл и описал Архимед, - это тела Архимеда.

Архимедовы тела — выпуклые многогранники, обладающие двумя свойствами:

- 1) Все грани являются правильными многоугольниками двух или более типов;
- 2) Для любой пары вершин существует симметрия многогранника

Теорема Эйлера для многогранников — теорема, устанавливающая связь между числом вершин, рёбер и граней для многогранников.

Пусть V — число вершин выпуклого многогранника, P — число его рёбер и Γ — число граней. Тогда верно равенство:

$$\Gamma + V - P = 2$$

Теорема Эйлера

Число граней + число вершин - число ребер = 2.

Многогранник	тетраэдр	октаэдр	икосаэдр	додекаэдр	куб
Число граней	4	8	20	12	6
Число вершин	4	6	12	20	8
Число ребер	6	12	30	30	12

Формулы нахождения объёмов многогранников:

Вид многогранника	Объём многогранника
Правильный тетраэдр	$\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$
Правильный октаэдр	$\frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$
Правильный икосаэдр	$\frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5})$
Правильный гексаэдр (куб)	a^3
Правильный додекаэдр	$\frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$

Многогранники в архитектуре

Пирамиды Гизы расположены в пригороде современного Каира. Основание пирамид имеет четырехугольную форму, высота несколько больше, чем длина каждой из ее сторон. Первоначальная высота пирамиды Хуфу (Хеопса) была 146,59 м, Хефрена - 143,5 м, Микерина - 66,5 м. Сегодня пирамида Хуфу возвышается над пустыней лишь на 137 м, Хефрена - на 136,6 м.



Александрийский маяк

В 285 году до н.э. на острове Фарос архитектор Сострат Книдский приступил к строительству маяка. Маяк строился пять лет и получился в виде трехэтажной башни высотой 120 метров. В основании он был квадратом со стороной тридцать метров, первый 60-метровый этаж башни был сложен из каменных плит и поддерживал 40-метровую восьмигранную башню, облицованную белым мрамором. На третьем этаже, в круглой, обнесённой колоннами башне, вечно горел громадный костер, отражавшийся сложной системой зеркал.



Башня Сююмбике

Башня Сююмбике находится в Казани и состоит из семи ярусов, нижние ярусы представляют собой параллелепипеды, а верхние - многогранники.



Многогранники в биологии

Пчелиные соты

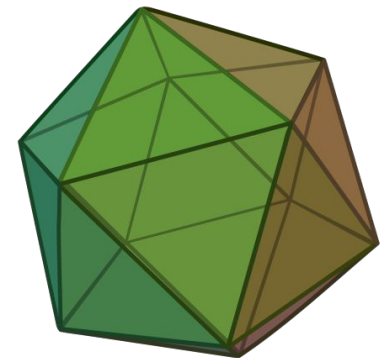
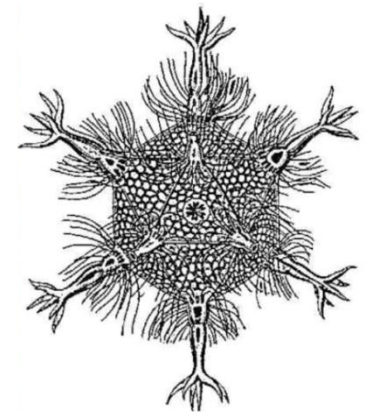
Пчелиные соты представляют собой пространственный паркет и заполняют пространство так, что не остается просветов.



Феодария

Скелет одноклеточного организма феодарии по форме напоминает икосаэдр. Чем же вызвана такая природная геометризация феодарии?

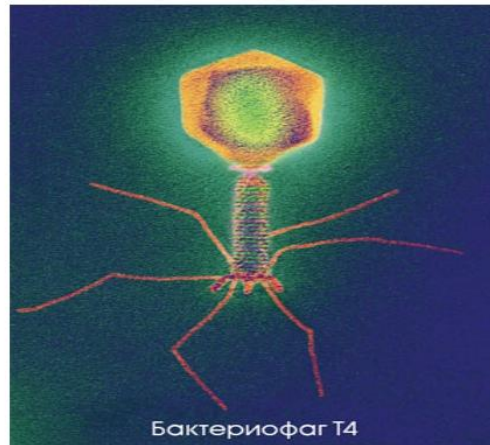
Тем, по видимому, что из всех многогранников с тем же числом граней именно икосаэдр имеет наименьший объем при наибольшей площади поверхности. Это свойство помогает морскому организму преодолевать давление водной толщи



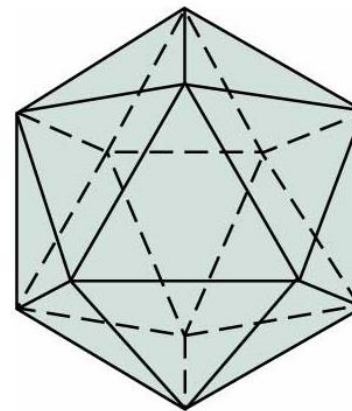
Вирусы

Интересно то, что именно икосаэдр оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно формы вирусов. Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что свойства, о которых говорилось выше, позволяют экономить генетическую информацию. Правильные многогранники – самые выгодные фигуры. И природа этим широко пользуется

бактериофаг



икосаэдр



Естественные многогранники.

Сурьменистый сернокислый натрий

В естественной среде правильные многогранники можно встретить в виде кристаллов (минералов). Форму тетраэдра передает сурьменистый сернокислый натрий.



Алмаз

Даже необработанный алмаз отчетливо передает форму октаэдра. После шлифовки камень точно соответствует геометрической форме октаэдра.



Перовскит

Строение молекулы перовскита, химическая формула - CaTiO_3 , точно соответствует правильному многограннику.



Пирит

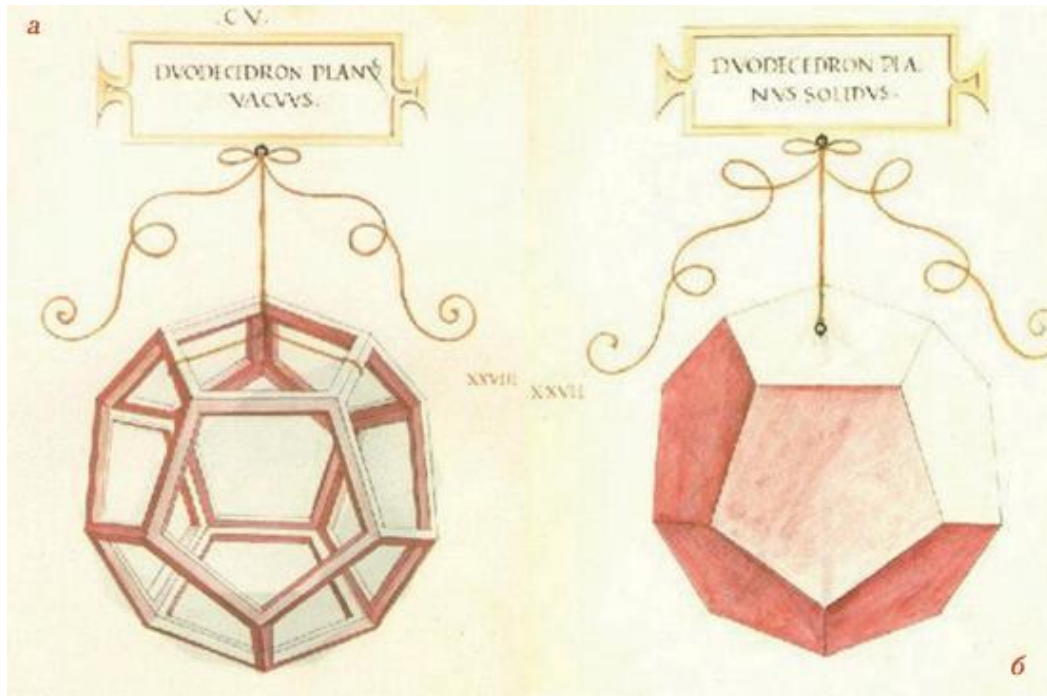
Кристалл пирита имеет форму додекаэдра. Пирит — сернистое железо или серный колчедан, наиболее распространенный минерал из группы сульфидов. Размеры кристаллов пирита достигают нескольких сантиметров.



Искусство

Леонардо да Винчи

Большую роль правильные многогранники играли в творчестве Леонардо да Винчи. Вариации на темы работ Леонардо да Винчи встречаются в живописи и архитектуре различных стран. (Франция, 1560г.)



Лука Пачиоли

Додекаэдр встречается в работах художника эпохи Ренессанса Луки Пачиоли (1445 – 1514).



Сальвадор Дали

В картине Сальвадора Дали «Тайная вечеря» подчеркивается роль додекаэдра в объяснении системы мира по Платону.



Многогранники в заданиях ЕГЭ

Чтобы выяснить, как часто в задачах ЕГЭ встречаются многогранники, я провела анализ материалов ЕГЭ из открытого банка заданий и других доступных источников.

В ходе анализа я получила такие данные и представила их в виде диаграммы:

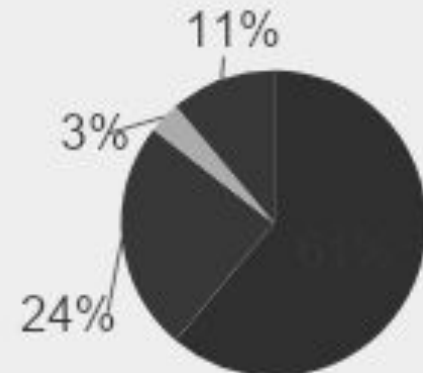
Частота появления различных тел в задаче №6

- Призма
- Пирамида
- Тело вращения
- Комбинации многогранников и тел вращения



Частота проявления различных тел в задаче В13

- призма
- пирамида
- тела вращения
- комбинации многогранников и тел вращения



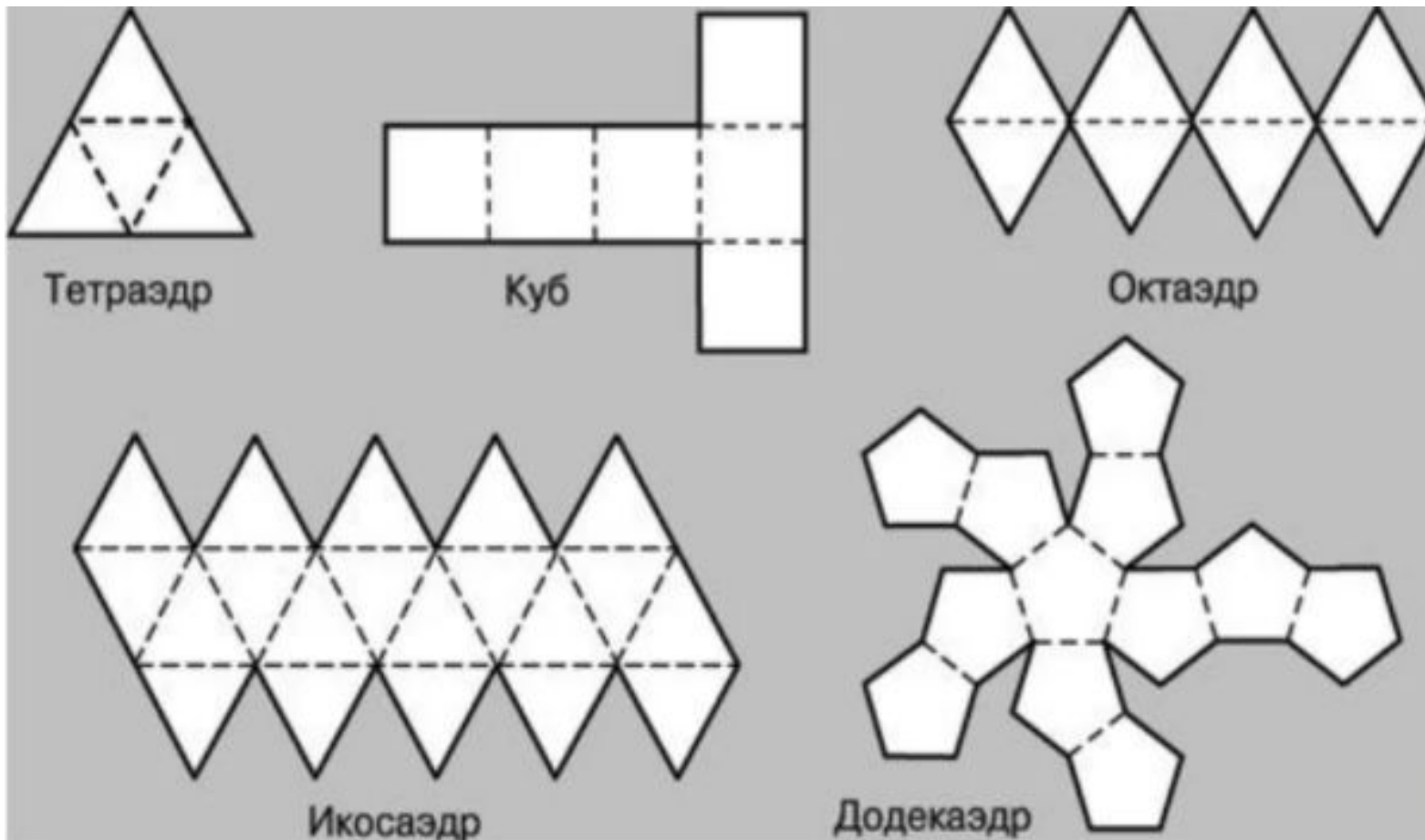
Вывод: задачи на многогранники встречаются в 62,67% тестов. Из правильных многогранников в задачах встречаются только куб и тетраэдр. Остальные правильные многогранники в задачах не представлены, видимо расчеты и рассуждения слишком сложны.

Заключение

В результате данной исследовательской работы я лишней раз убедилась в том, что математика не «сухая» наука, и ее «выход» в повседневную жизнь может быть чрезвычайно интересен, красив и даже загадочен.

Я изучила КИМы материалов ЕГЭ разных лет и сделала вывод, что задания связанные с многогранниками встречаются достаточно часто. Также я научилась делать модели правильных многогранников. Изучила историю правильных и полуправильных многогранников, их разновидности и свойства. Проведя поиск многогранников в нашей жизни, я столкнулась с тем, что они встречаются в науке и искусстве. Собрав необходимые сведения (из различных источников информации) по теме «Многогранники» я провела классный час для моих одноклассников: информация, которую я предоставила на классном часе, оказалась интересна и полезна моим сверстникам, что очень меня порадовало. Считаю, что все цели и задачи, поставленные мной в начале, успешно выполнены и достигнуты.

Развертки, которые я использовала для создания моделей правильных многогранников:



Спасибо за внимание))