Биномиальное распределение. Распределение Пуассона.

Вопросы:

- Классическое определение вероятности.
- Понятие биномиального распределения.
- Понятие распределения Пуассона.
- Основные свойства распределения Пуассона.

1. Классическое определение вероятности

Вероятность — степень (мера, количественная оценка) возможности наступления некоторого события.

Основными понятиями о случайном событии являются следующие:

1. **Испытание** – это опыт, наблюдение явления, эксперимент. *Например: бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости и т.д.*
2. **Событие** – это результат, исход испытания. *Например, выпадение герба или цифры, попадание в цель или промах, выпадение того или иного числа игральной кости и т.д.*
3. **Два события называют совместными** – если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании. *Например, испытание: однократное бросание игральной кости. Событие А – появление четырех очков, событие В – появление четного числа очков. События А и В совместные.*
4. **Два события называются несовместимыми**, если появление одного из них исключает появление другого. *Например, испытание: однократное бросание монеты. Событие А – выпадение герба, событие В – выпадение цифры*.
5. **Два события называют противоположными** – если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит.

Классическое определение вероятности

6. **События называются достоверными** – если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и невозможным, если в данном испытании оно заведомо не может произойти. *Например, испытание: извлечение шара из урны, в которой все шары белые. Событие А – вынут белый шар – достоверное событие; В – вынут черный шар – не достоверное.*

7. **Событие называется случайным** – если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании. *Например, Событие А6 – выпадение шести очков при бросании игральной кости – случайное. Оно может наступить. Может и не наступить.*
Например, Событие А98 – прорастание девяноста восьми зерен пшеницы из ста – случайное.

8. **Элементарные события** – это события А1, А2 …Аn образующие полную группу попарно несовместимых и равновозможных событий. *Например, бросание игральной кости.*
9. **Вероятность Р(А) события А** называется отношение числа элементарных событий, благоприятствующих событию А, к числу все элементарных событий, т.е.:
Р(А)=m/n. *Например, вычисли вероятность выпадения герба при бросании монеты. Событие А – выпадение герба и событие В – выпадение цифры – образуют полную группу несовместимых событий. Значит, здесь n=2. Событию А благоприятствует лишь одно событие – само А, т.е. m=1/ Поэтому Р(А)=1/2.*

Основными операциями над случайными событиями

1. **Событие A+B называют суммой** событий A и B, если происходит хотя бы одно из событий A или B. *Пример. В урне находятся красные, белые и черные шары. Опыт – вынимается один шар из урны. Возможны следующие события: A – вынут красный шар, B – вынут белый шар,С – вынут черный шар. Событие A + B означает, что произошло событие «вынут красный или белый шар» или иначе −«вынут нечерный шар», а событие B + C «вынут не красный шар» или иначе− «вынут белый или черный шар».*

2. **Событие A*B называют произведением** событий Aи B, если проходят оба события A и B. *Пример. Опыт – вытаскивание карт из колоды. Событие A – из колоды карт вынута дама, B – из колоды карт вынута карта пиковой масти. Очевидно, AB есть событие «вынута дама пик». Пример. Опыт – бросается игральный кубик. Рассмотрим следующие события: A – число выпавших очков меньше 5, B – число выпавших очков больше 2, C – число выпавших очков четное. Тогда событие ABC заключается в том, что выпало 4 очка.*

3. **Разностью событий A и B** называется событие C, состоящее в том, что A происходит, а B не происходит и обозначается A \ B, читается «A без B».

4. Событие A, состоящее в том, что событие A не происходит, называют **противоположным к событию A.**

Комбинаторные формулы

1. Число перестановок n различных элементов:

$$Pn = n! = 1*2*3\ldots n$$

2 Число размещение m различных элементов на n на местах *(число способов выбрать m элементов из n различных элементов, если порядок в котором они выбраны, имеет значение)*:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n*(n-1)\ldots*(n-m+1)$$

3. Число сочетаний из n различных элементов по m элементов *(число способов выбрать m элементов из n различных элементов, если порядок, в котором они выбраны, не имеет значения, а важно лишь, какие элементы выбраны)*:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!*(n-m)!} = \frac{n*(n-1)\ldots*(n-m+1)}{m!}$$

Биномиальное распределение

Биномиальное распределение — распределение количества «успехов» в последовательности из n независимых случайных экспериментов, таких, что вероятность «успеха» в каждом из них постоянна и равна p.

Закон биномиального распределения выражается как формулой Бернули так и формулой бинома Ньютона.

Схема Бернулли.

Схемой Бернулли называется последовательность независимых испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода – «успех» и «неудача», при этом успех в каждом испытании происходит с одной и той же вероятностью p, а неудача – с вероятностью q=1-p. Причем событие Успех в n испытаниях появится m раз, событие Неудача будет встречаться n-m раз.

Теорема: для любого m=0.1.2…n вероятность получить в n испытаниях m успехов равна:

$P_n(m) = C_n^m * p^m * q^{n-m}$,

Набор вероятностей называется биномиальным распределением вероятностей.

Доказательство: событие A означает, что в n испытаниях схемы Бернулли произошло ровно m успехов. Рассмотрим один элементарный исход из события A, когда первые m испытаний завершились успехом, остальные неудачей. Поскольку испытания независимы, вероятность такого элементарного исхода равна $p^m * (1-p)^{n-m}$. Другие элементарные исходы из события A отличаются лишь расположением m успехов на n местах. Есть ровно C_n^m способов расположить m успехов на n местах. Поэтому событие A состоит C_n^m элементарных исходов, вероятность каждого из которых равна $p^m * q^{n-m}$.

Решение задачи на применение формулы Бернулли

Задача 1: Из n аккумуляторов за год хранения k выходит из строя. Наудачу выбирают m аккумуляторов. Определить вероятность того, что среди них l исправных.
$n=100, k=7, m=5, l=3$.

Решение: Имеем схему Бернулли с параметрами $p=7/100=0{,}07$ (вероятность того, что аккумулятор выйдет из строя), $n=5$ (число испытаний), $k=5-3=2$ (число «успехов», неисправных аккумуляторов).

Будем использовать формулу Бернулли (вероятность того, что в n испытаниях событие произойдет k раз).
$P_n(k)=C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

Получаем

$$P_5(2)=C_5^2 \cdot 0{,}07^2 \cdot (1-0{,}07)^{5-2}=\frac{5!}{3!2!} \cdot 0{,}07^2 \cdot 0{,}93^3=0{,}0394.$$

Ответ: 0,0394.

Биномиальное распределение с помощью формулы бинома Ньютона

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = (p+q)^n$$

Рассматривая вероятность появления двух равновероятных событий, получаем их следующее распределение:

$$(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = 1$$

При трех независимых испытаниях возможно $2^3=8$ исходов, вероятности которых распределяются следующим образом:

Пример расчета вероятности с применение бинома Ньютона

Допустим, мы стоим на улице и считаем проходящих прохожих, подразделяя их по полу.
Каждые прошедшие два человека объединим в пары. Эти пары могут иметь следующие варианты: МЖ, ММ, ЖЖ, ЖМ. Вероятность появления мужчины обозначим буквой a, а женщины – b.
Вероятность прохождения мужчин и женщин одинакова, т. е. a = b = ½.
Вероятность появления один за одним двух мужчин или двух женщин в соответствии с теорией вероятности равна a*a=a2 или b*b=b2.
В нашем случае она равна 0,52 = 0,25, т.е. это один случай из 4. Сочетание появления друг за другом мужчины и женщины равна ab + ab= 2ab. Таким образом, рассматривая вероятность появления двух равновероятных событий, получаем их следующее распределение.

Распределение Пуассона

Характер биномиальной кривой определяется двумя величинами: числом испытаний n и вероятностью p ожидаемого результата.

При p=q - биномиальная кривая строго симметрична и по мере увеличения числа испытаний приобретает все более плавный ход, приближаясь к своему пределу – нормальной кривой.

Если p не=q - Биномиальная кривая становится асимметричной и тем сильнее чем больше разница между p и q.

Когда вероятность события очень мала и исчисляется сотыми и тысячными долями единицы, распределение частот таких редких событий в n независимых испытаниях становится крайне асимметричным.

Для описания такого рода распределений редких и маловероятных событий служит формула Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{\mathrm{a}^m}{m!} * e^{-a} = \frac{\mathrm{a}^m}{m! * \mathrm{e}^{\mathrm{a}}}$$

a=np – наивероятнейшая частота ожидаемого события
m – частота ожидаемого события в n независимых испытаниях;

Пример расчёта

Формула Пуассона позволяет определить вероятность для любых значений a от 0 до n.

Например, для a=2 вероятность того, что событие A в данных условиях не осуществится. будет равна

$$P_0 = \frac{2^0}{0! * e^2} *= 0,13$$

Для единочного осуществления:

$$P_1 = \frac{2^1}{1! * e^2} *= 0,27$$