

# Объём усечённого конуса

---

Работу выполнили Мавринский Данил, Самаркин  
Даниил, Савельев Павел

# Теорема

Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту

**Дано:**

конус

$S$  — площадь его основания

$h$  — высота конуса

$V$  — объём конуса

**Доказать:**  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$

**Доказательство:**

$OX$  — ось конуса через  $OM$

$OX$  и сечение конуса

$M_1$  — центр,  $R_1$  — радиус

$S(x)$  — площадь сечения

$x$  — абсцисса  $M_1$

$\triangle OM_1A_1 \sim \triangle OMA$  ( $OM_1A_1 =$

$OMA$  — прямые,  $MOA$  —

общий) и

$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{R_1}{R}$$

$$OM_1 = x, OM = h$$

$$\frac{x}{h} = \frac{R_1}{R}$$

$$R_1 = \frac{xR}{h}$$

$$S(x) = \pi R_1^2$$

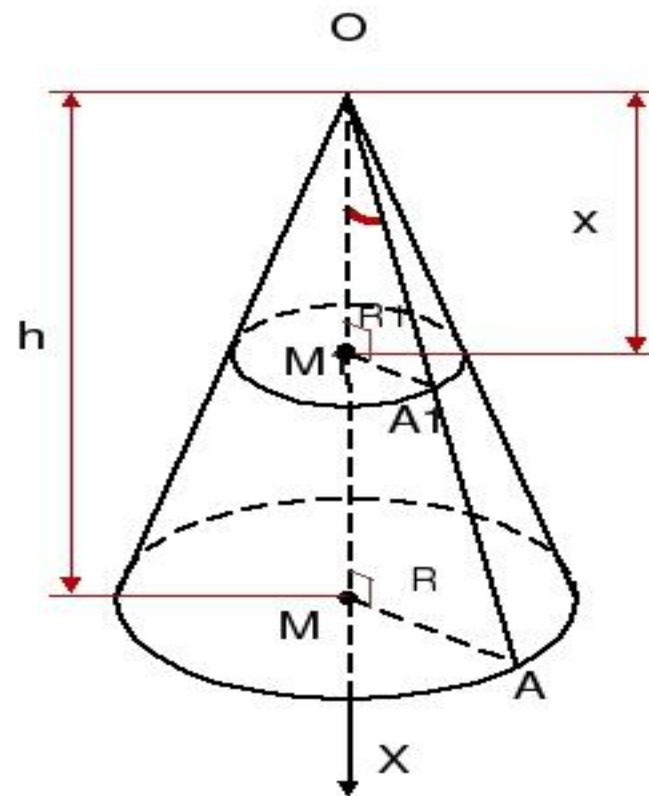
$$S(x) = \frac{\pi R^2 x^2}{h^2}$$

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \frac{\pi R^2 x^2}{h^2} dx =$$

$$= \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$S_{\text{осн.}} = \pi R^2$$

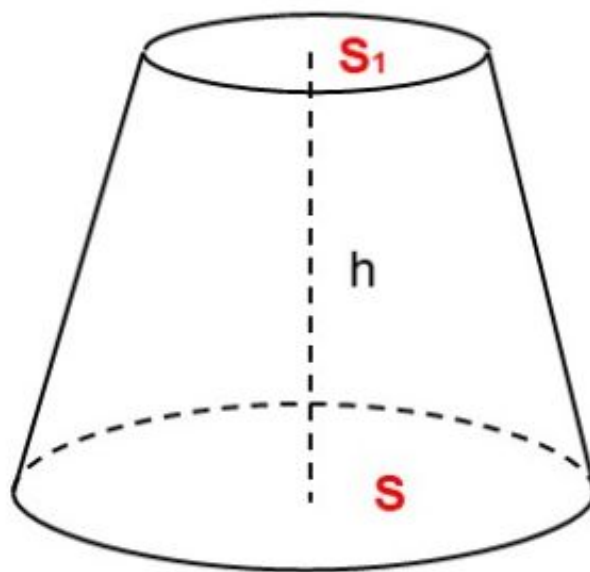
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$$



Теорема доказана

*Следствие:*

Объем  $V$  усеченного конуса, высота которого равна  $h$ , а площади оснований равны  $S$  и  $S_1$ , вычисляется по формуле:



$$V = \frac{1}{3}h (S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$$

Задача №1

Образующая конуса равна 60 см, высота 30 см, Найдите объем конуса

## Решение

$$\Delta AOP: PO = \frac{1}{2} AP, \text{ значит } \angle A = 30^\circ \qquad V. = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} * h = 1/3 \pi R^2 h$$

$$R = AO = 60 * \cos 30^\circ = 60 \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3} \text{ (см)}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (30\sqrt{3})^2 * 30 = \frac{1}{3} \pi * 90 * 30 = 900 \text{ см}^3$$

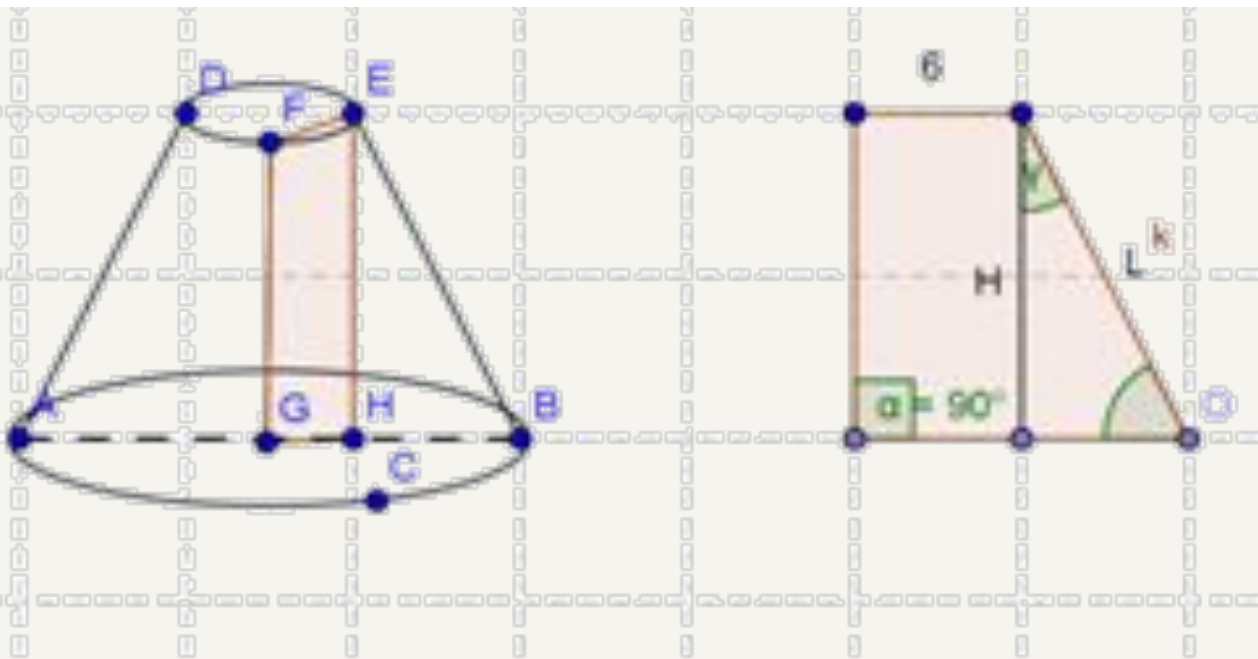
## Задача №2

Радиус основания усеченного конуса 6 см и 10 см. Образующая наклонена к плоскости большего основания под углом  $60^\circ$ . Найдите объем усеченного конуса.

# Решение

$$V = \frac{1}{3}\pi H (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$l = 8\text{см} \quad , H = 8 * \sin 60^\circ = 8 * \frac{1}{2} = 4; \quad V = \frac{1}{3}\pi * 4(10^2 + 6^2 + 10 * 6) = \frac{4}{3}\pi * 196 = \frac{784\pi}{3}$$



# Объём усечённого конуса

Объём усеченного конуса равен разности  
объемов двух полных конусов

$$V = V(R_1) - V(R_2) \quad \frac{x}{x - H} = \frac{R_1}{R_2} \quad x = \frac{HR_1}{R_1 - R_2}$$

$$V = \frac{1}{3} (\pi R_1^2 x - \pi R_2^2 (x - H))$$

$$V = \frac{1}{3} \pi H (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$$

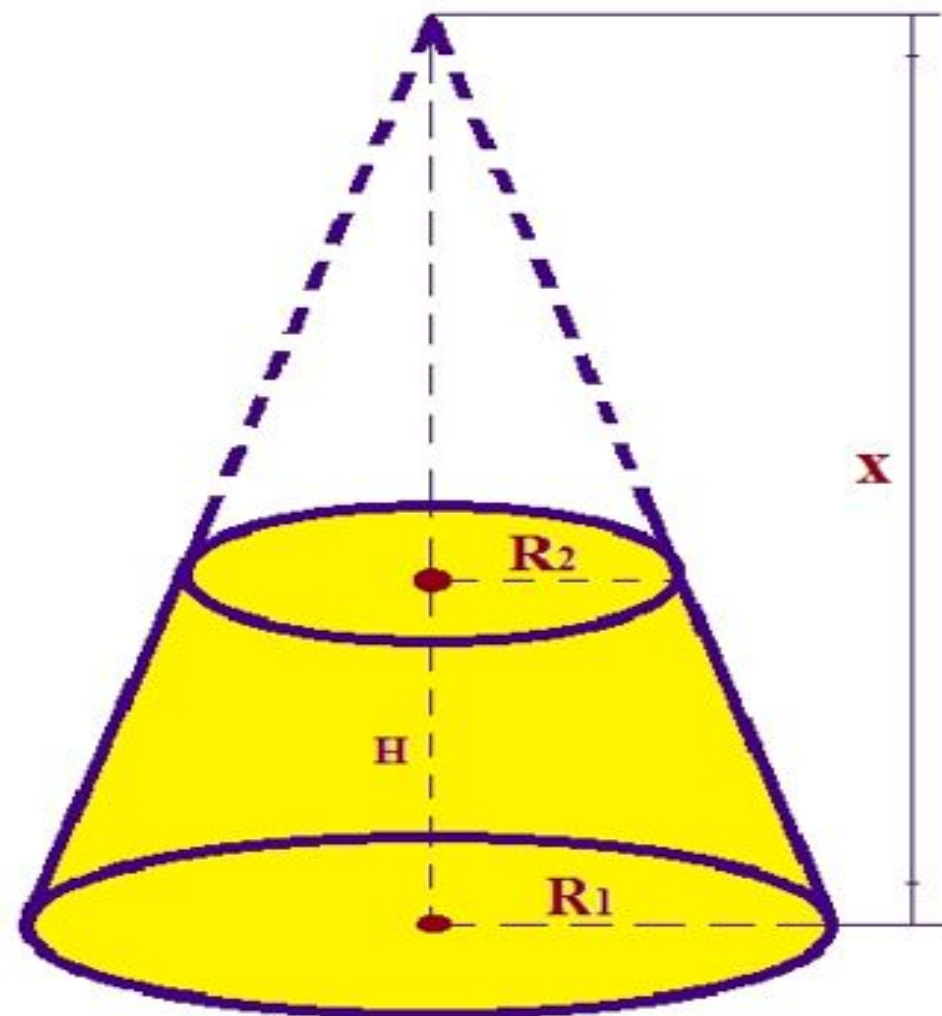
где

$V$  - объём усеченного конуса

$x$  - высота полного конуса

$H$  - высота усеченного конуса

$R_1 R_2$  - радиусы нижнего и верхнего оснований





1. Вычислите длину радиуса основания равностороннего конуса, площадь полной поверхности которого равна  $27\pi$ :
  - а) 3
  - б) 54
  - в) 6
2. Точка, из которой исходят лучи:
  - а) основание конуса
  - б) вершина конуса
  - в) образующей конуса
3. Площадь боковой поверхности конуса равна произведению числа  $\pi$  на радиус окружности основания и на длину ... конуса:
  - а) гипотетического
  - б) вершины
  - в) образующей
4. Плоскость, образованная в результате пересечения плоской поверхности и всех лучей, исходящих из вершины конуса:
  - а) основание конуса
  - б) длина образующей
  - в) боковая поверхность
5. Укажите вид конуса, в котором осевое сечение – равносторонний треугольник:
  - а) наклонный
  - б) усеченный
  - в) равносторонний
6. Любой отрезок, который соединяет вершину конуса с границей основания конуса. Образующая есть отрезок луча, выходящего из вершины конуса:
  - а) боковая поверхность
  - б) образующая конуса
  - в) длина образующей
7. Вычислите длину радиуса основания равностороннего конуса, у которого образующая равна 8:
  - а) 32
  - б) 16
  - в) 4
8. Кривая, которая описывает контур основания конуса:
  - а) направляющая конуса
  - б) высота конуса
  - в) ось конуса
9. Геометрическое тело, которое образовано совокупностью всех лучей, исходящих из точки и пересекающих любую плоскую поверхность:
  - а) круг
  - б) треугольник
  - в) конус
10. Совокупность всех образующих конуса:
  - а) высота конуса
  - б) боковая поверхность конуса
  - в) ось конуса

# ОТВЕТЫ

1)а

2)б

3)в

4)а

5)в

6)б

7)в

8)а

9)в

10)б

