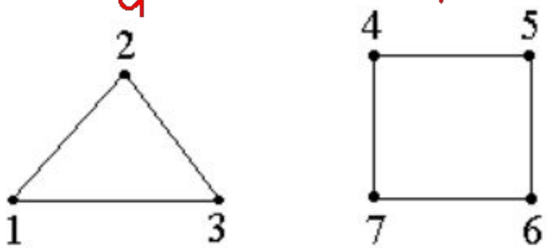
УНИВЕРСИТЕТ ЛОБАЧЕВСКОГО

ЗАНЯТИЕ 2. ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ. МАРШРУТЫ, ЦЕПИ И ЦИКЛЫ В ГРАФАХ. СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

Теория графов и её приложения

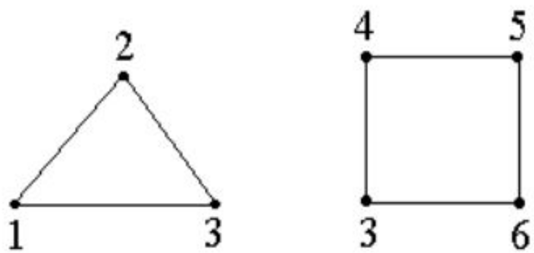
11. Найти объединение, пересечение и разность двух графов.

а) G H $G \cup H$ $G \cap H$ $G \setminus H$ $H \setminus G$

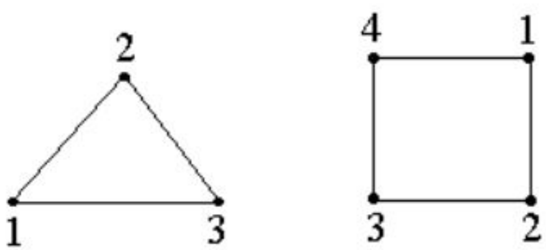


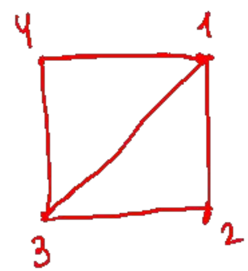
$\varnothing$ $\equiv G$ $\equiv H$

б)



в)





$\varnothing$

$\deg v_4 = 0$

изолир. верш.

12. Составьте матрицы смежности для графов $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1 \setminus G_2$, если

$$
\text{а) } A(G_1) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}
\qquad
A(G_2) = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}
$$

$$G_1 \setminus G_2 = \{\overset{v_1}{1}\}$$

$$
A(G_1 \cup G_2) = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}
$$

логич. сложение

$0 \vee 0 = 0$

$0 \vee 1 = 1$

$1 \vee 0 = 1$

$1 \vee 1 = 1$

$$
A(G_1 \cap G_2) = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}
$$

логич. умнож

$0 \& 0 = 0$

$0 \& 1 = 0$

$1 \& 0 = 0$

$1 \& 1 = 1$

$$
A(G_1 \setminus G_2) = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}
$$

Определение 1.27. Последовательность ребер $\pi = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$ называется ***маршрутом***, соединяющим вершины v_0 и v_n. ***Длиной маршрута*** называется число ребер в такой последовательности.

Определение 1.28. Маршрут называется ***простым***, если все его вершины, кроме, быть может, крайних v_0 и v_n, различны (т.е. ни по одной вершине он не проходит более одного раза).

Определение 1.29. Маршрут называется ***цепью***, если все его ребра различны. Простой маршрут, все ребра которого различны, называется ***простой цепью***.

Замечание. Из определений 1.27-1.29 видно, что всякий простой маршрут, за исключением $\{(v_0, v_1), (v_1, v_0)\}$, является цепью, но не всякая цепь является простым маршрутом.

простой цикл ≡ простая замкн. цепь

13. Дайте классификацию маршрутов в графе, приведенном на рисунке 1.

(1, 2, 3, 5, 2); цепь (не простая)
(2, 3, 5, 4); простая цепь
(2, 3, 4, 5, 3, 2); маршрут (не простой, замкнутый, ~~открытый~~)
(3, 4, 5, 3). простой цикл

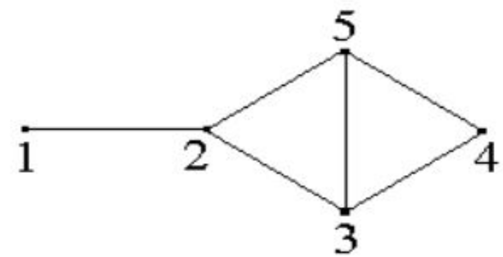


Рис. 1.

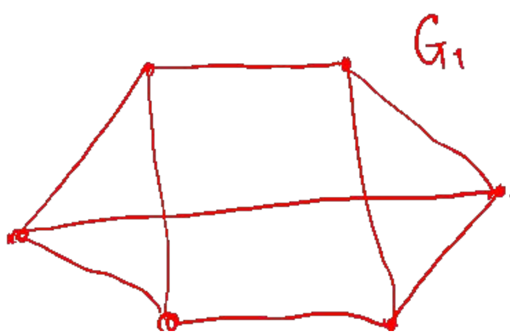
15. Дан регулярный граф с 6 вершинами и 9 ребрами.
а) Докажите, что в нем есть хотя бы 1 цикл.
б) Нарисуйте этот граф.
в) Каковы обхват и периметр данного графа?
г) Сколько в этом графе циклов наименьшей длины?

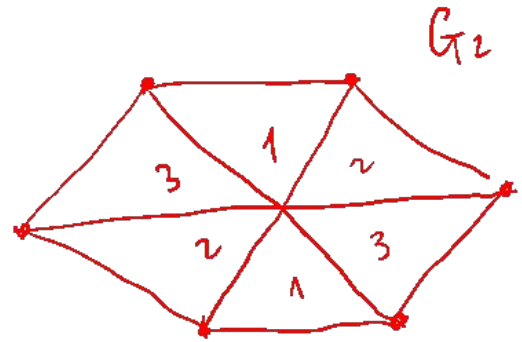
$\deg v_i = r,\ p = 6,\ q = 9$

$$q = \frac{p \cdot r}{2} \Rightarrow r = \frac{2 \cdot q}{p} = \frac{2 \cdot 9}{6} = 3$$

а) $\deg v_i = r = 3 > 2$, то по 3 св-ву циклов в G $\exists$ цикл
$\forall i$

б)

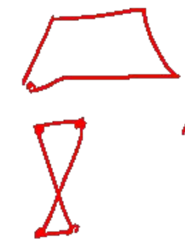




в) Обхват – длина цикла наим. длины

$g(G_1) = 3\ (2)$ $\quad$ $g(G_2) = 4\ (9)$

6x
3x

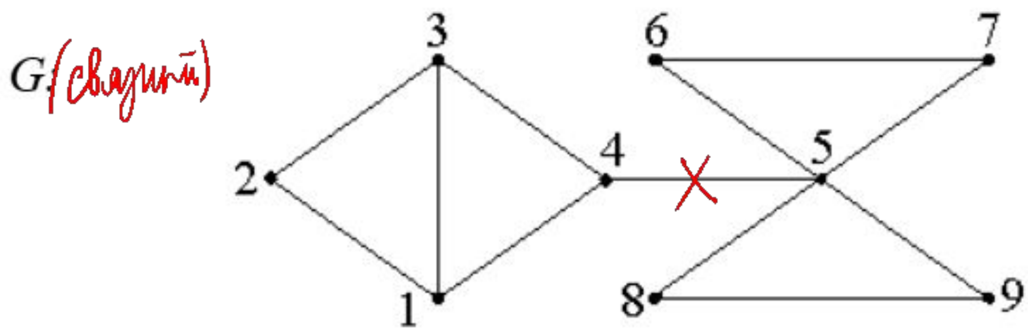


г)

в) Периметр – длина цикла наиб. длины

$P(G_1) = P(G_2) = 6$

23. Найдите все мосты и разделяющие вершины в графе G:



$G_1 = G \cup H$

не связный

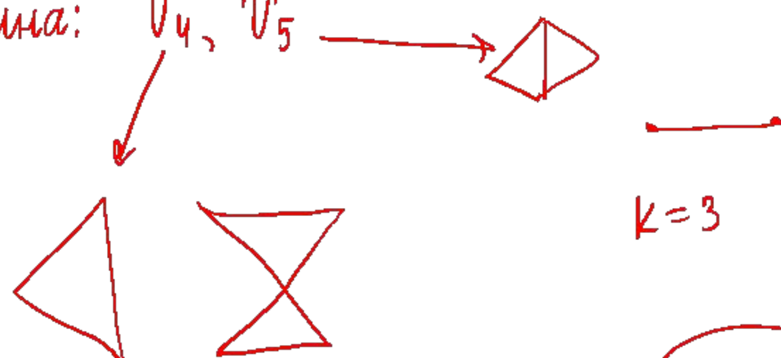
Мост: $(v_4; v_5)$ (k=2)

Разд. вершина: v_4, v_5

Ex_1

k=1

разд. в.

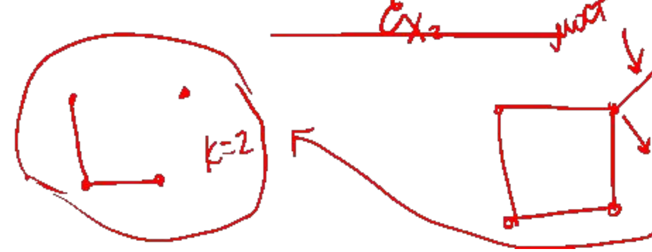


k=3

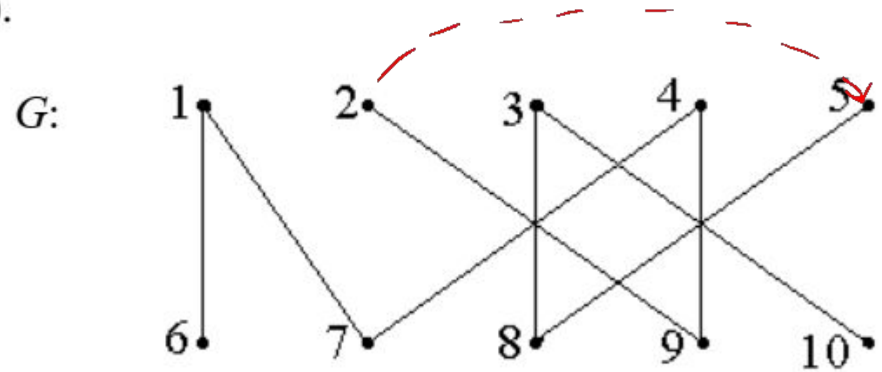
k=2

k=6

Ex_2 мост



22. Сколько компонент связности имеет граф G ? Составьте для него матрицу смежности в блочно-диагональном виде (каждой компоненте связности должен соответствовать определенный блок).



$K = 2$

I: $\{6, 1, 7, 4, 9, 2\}$

II: $\{5, 8, 3, 10\}$

$$\underset{k\times k}{A(G)} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$A_{11} = \begin{array}{c|cccccc} & 6 & 1 & 7 & 4 & 9 & 2 \\ \hline 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$A_{22} = \begin{array}{c|cccc} & 5 & 8 & 3 & 10 \\ \hline 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

21. Пусть граф G имеет p вершин. Доказать, что если минимальная степень его вершин $\delta(G) \geq (p-1)/2$, то граф связен.

Дано: G, $|V| = p$, $\delta(G) \geq \frac{p-1}{2}$

Д-ть: G связен

Д-во: v_1 – вершина с мин. степенью, т.е. $\deg v_1 = \delta(G)$

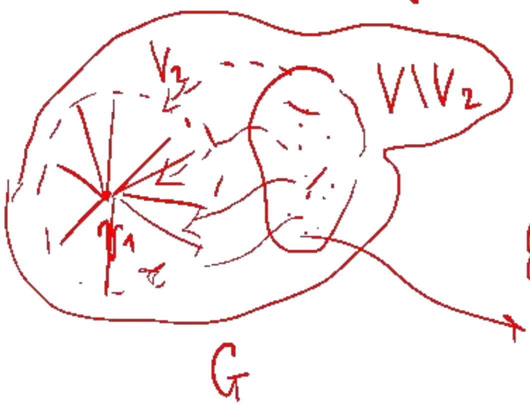
V_1 – мн-во вершин, смежных с v_1, $|V_1| = \delta(G)$

$V_2 = V_1 \cup \{v_1\}$, $|V_2| = |V_1| + 1 = \delta(G) + 1 \geq \frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p-1+2}{2} = \frac{p+1}{2}$

$|V \setminus V_2| = |V| - |V_2| \leq p - \frac{p+1}{2} = \frac{2p-p-1}{2} = \frac{p-1}{2} \leq \delta(G)$

$(V_2 \subset V)$

$|V \setminus V_2| \leq \delta(G)$



Ex. $= \delta(G)$

каждая вершина имеет ст. $(\delta - 1) \rightarrow$

$(\delta - 1) < \delta$ противоречие с опр. мин. ст. вершин графа!