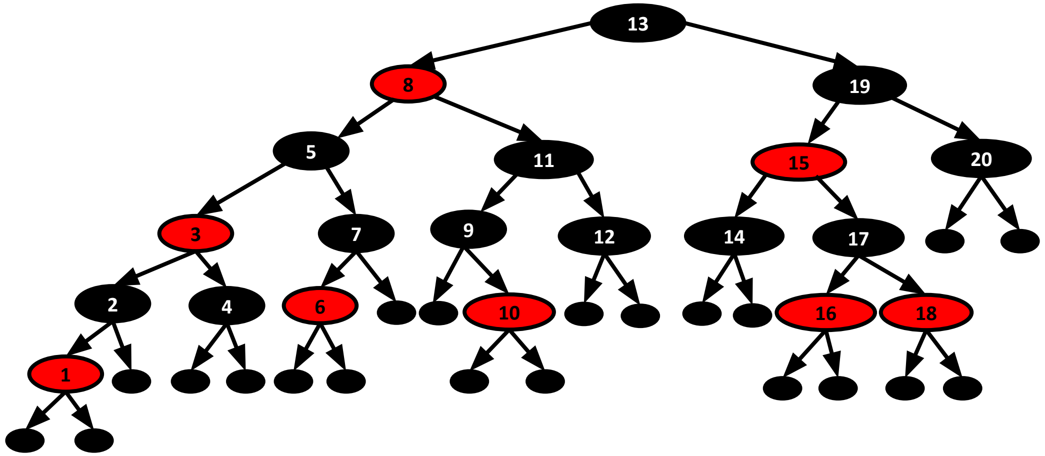
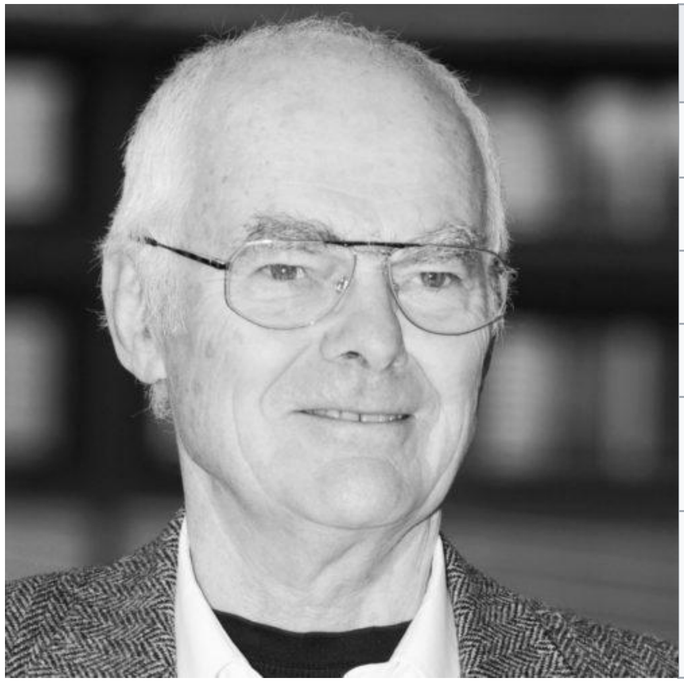
ПОИСКА

СБАЛАНСИРОВАННЫЕ ПОИСКОВЫЕ ДЕРЕВЬЯ

Красно-чёрное дерево (англ. red-black tree)



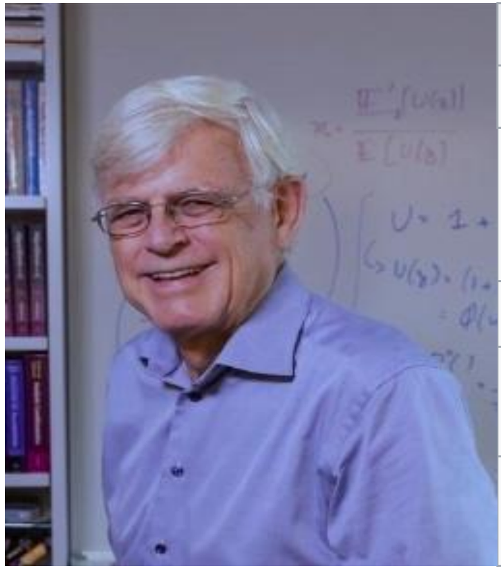
Изобретателем красно-чёрного дерева считают немецкого учёного:



Рудольф Байер	
Rudolf Bayer	
Дата рождения	7 мая 1939
Страна	Германия
Научная сфера	информатика
Место работы	Мюнхенский технический университет
Известен как	изобретатель красно-чёрного дерева, UB-дерева, B-дерева

В **1978** году в статье **Л. Гибаса** и **Р. Седжвика** структура данных получила название «**красно-чёрное** дерево»:

Леонидас Джон (Иоаннис) Гибас греч . Λεωνίδας Γκίμπας	
Национальность	Греческий - Американский
Научная карьера	
профессор компьютерных наук и электротехники Пола Пиготта в Стэнфордском университете , где он возглавляет группу геометрических вычислений и является сотрудником лабораторий компьютерной графики и искусственного интеллекта	
Ученик (докторант) Дональда Кнута	



Роберт Седжвик	
Robert Sedgewick	
Дата рождения	20 декабря 1946 (74 года)
Страна	США
Научная сфера	Информатика
Место работы	Принстонский университет

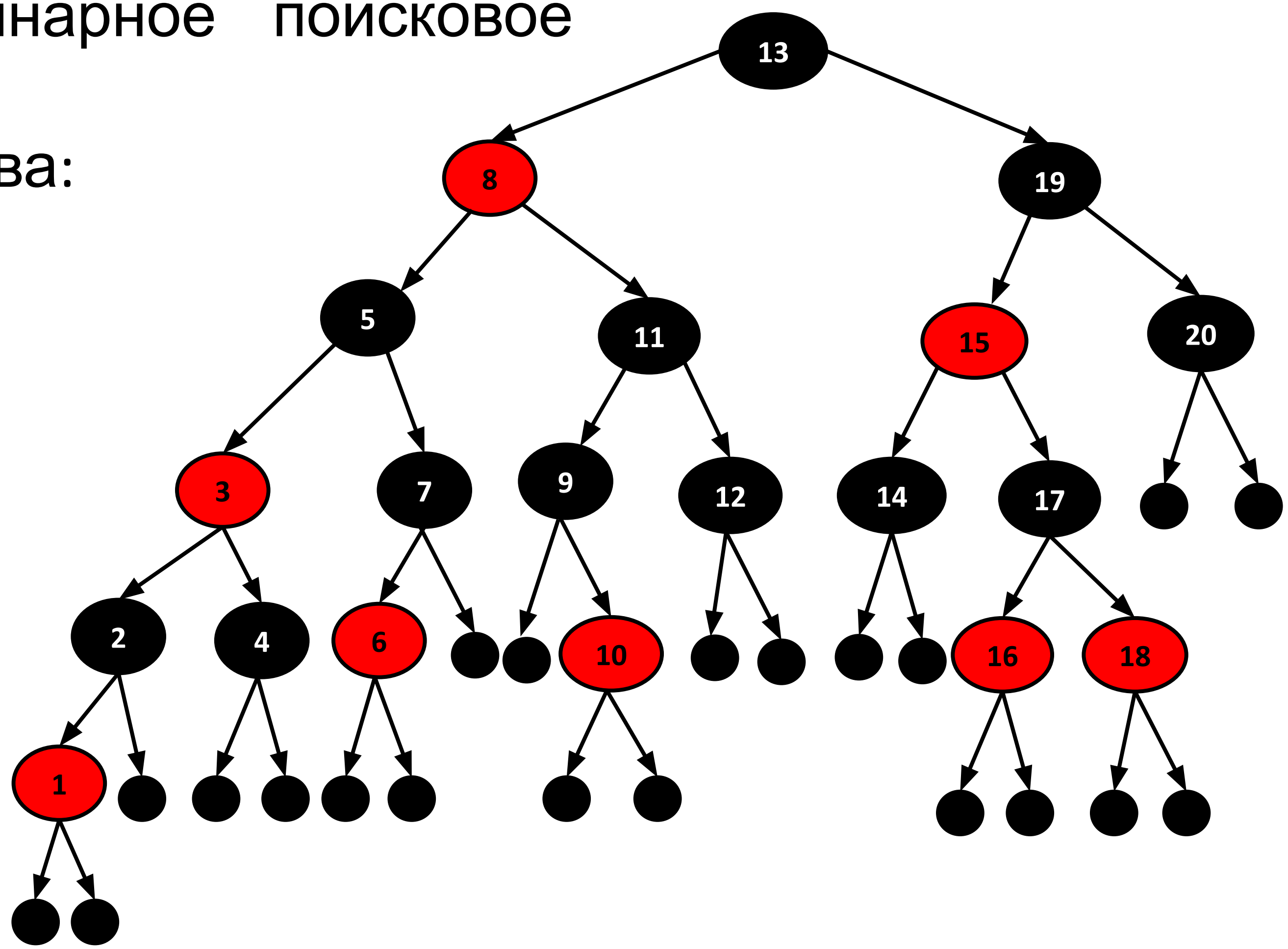
- ✔ по словам Л. Гибаса, они использовали ручки двух цветов;
- ✔ по словам Р. Седжвика, красный и черный цвет лучше всех смотрелись на лазерном принтере Xerox.

Красно-чёрное дерево

- является примером сбалансированного поискового дерева
- специальные операции балансировки гарантируют, что высота красно-чёрного дерева не превзойдёт O(log n)
- при этом процедуры балансировки (перекрашивания вершин, повороты) также ограничены этой величиной

Красно-чёрное дерево – это бинарное поисковое дерево,
для которого выполняются **RB**-свойства:

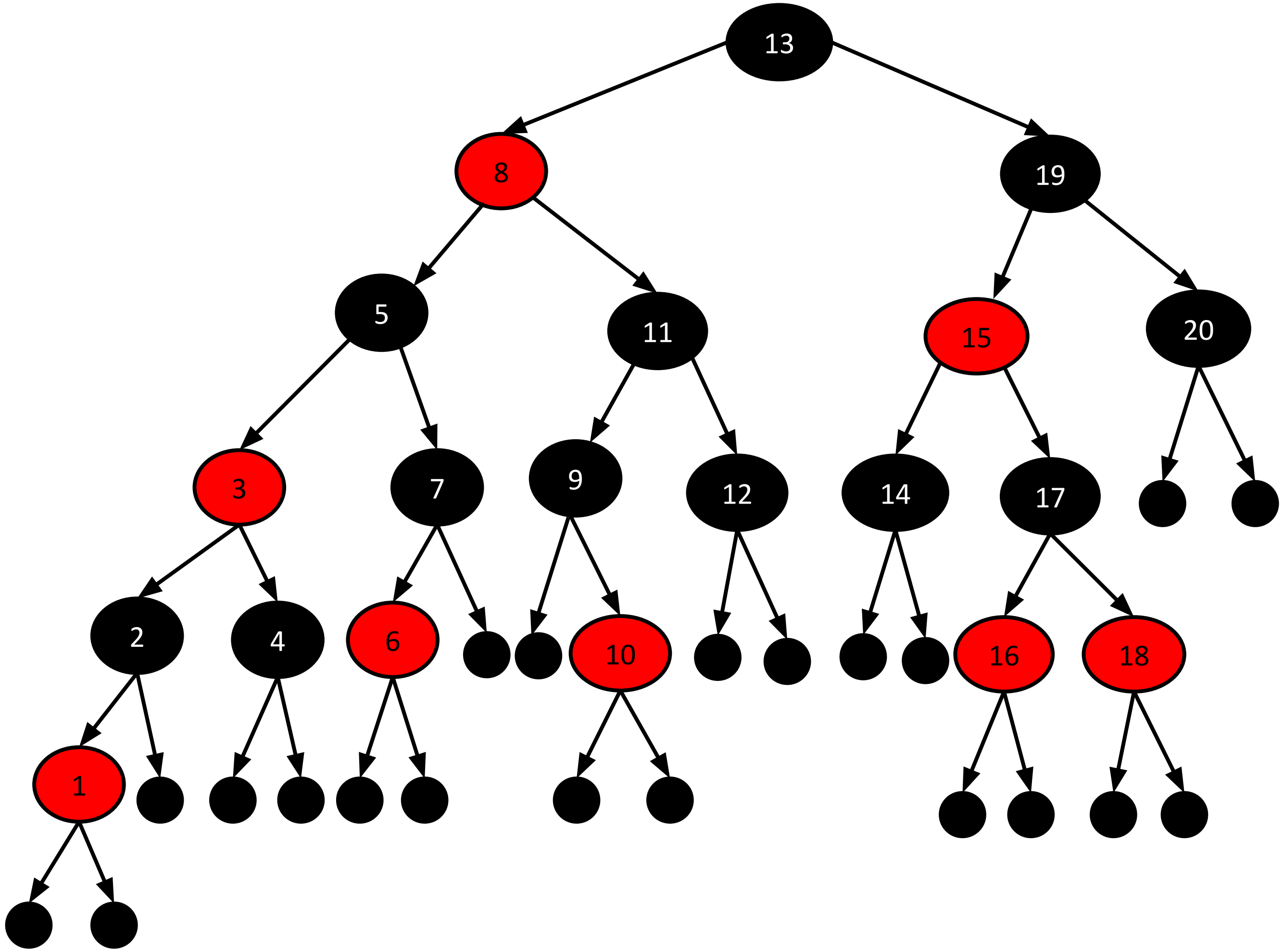
1) каждая вершина является либо **красной**, либо **чёрной**;
2) каждый **лист – чёрный**;
3) у **красной** вершины **оба сына – чёрные** (нет двух подряд идущих красных вершин);
4) любой путь из корня в листья содержит одинаковое количество **чёрных** вершин;
5) **корень – чёрный**.
(это требование не обязательно, так как корень всегда можно перекрасить в чёрный цвет и это не нарушит ни одно из RB-свойств).



Если к каждой вершине, которая не имеет сыновей, добавить фиктивный чёрный лист, то мы получим, что каждая внутренняя вершина дерева содержит ключевое значения, а все листья – фиктивные.

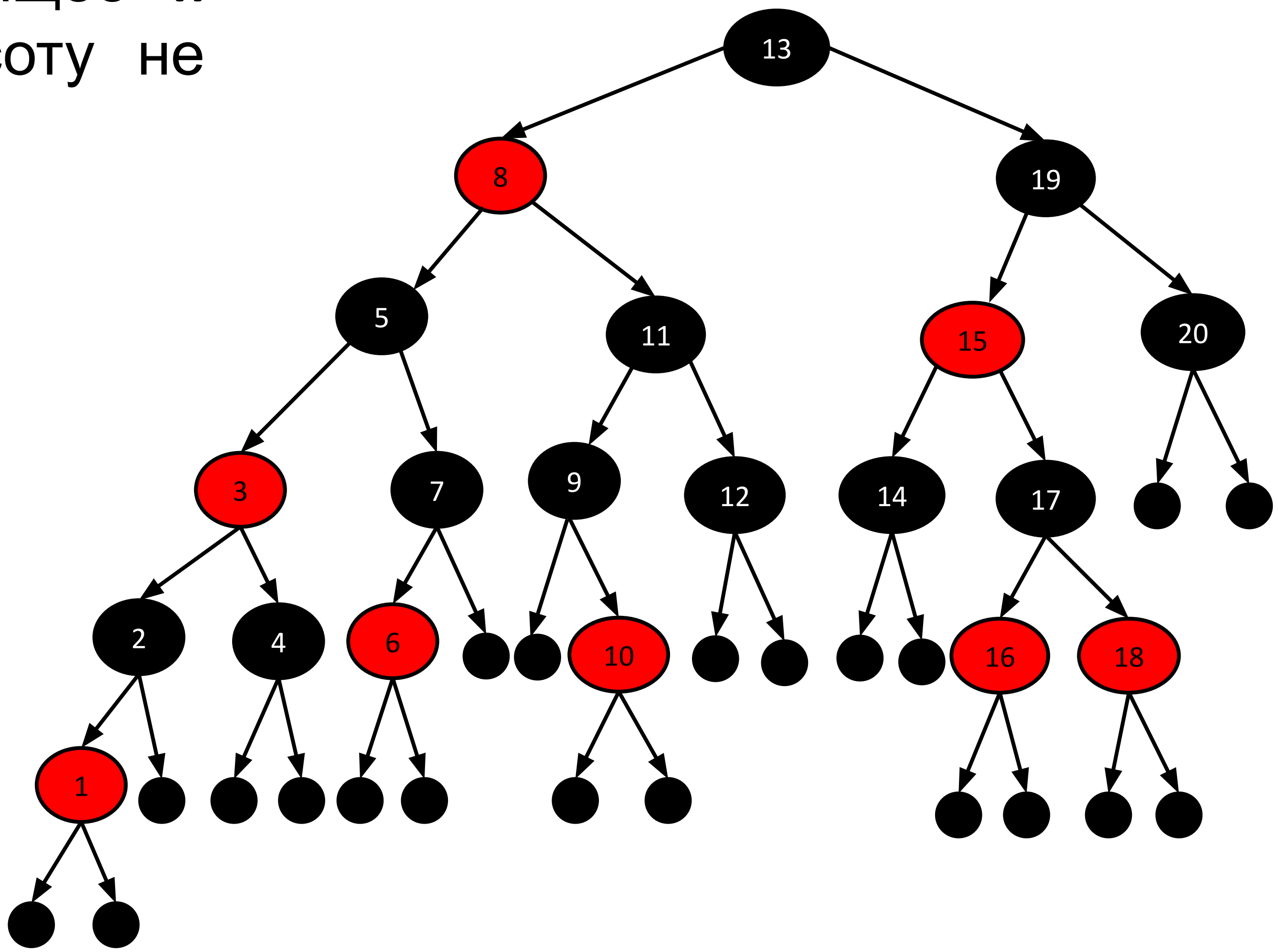
Для каждой вершины **v** дерева определим её **«чёрную высоту» bh(v)** - количество чёрных вершин на пути из этой вершины в один из листьев.

в силу свойств красно-чёрных деревьев любой из этих путей содержит одинаковое число чёрных вершин



Теорема

Красно-чёрное дерево, содержащее **n** внутренних вершин, имеет высоту не более чем **2·log(n+1)**.



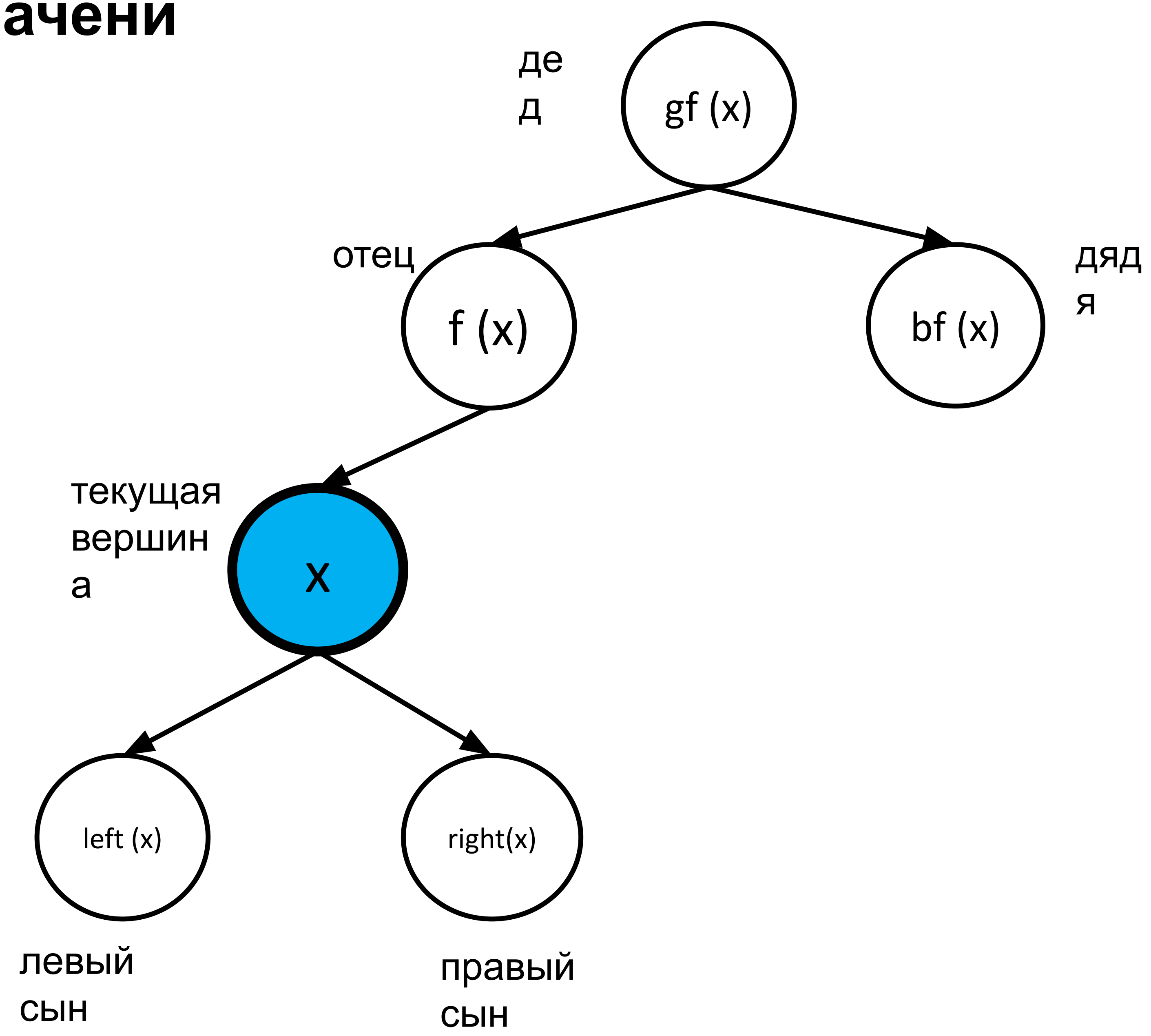
Доказательство

1) Используя метод математической индукции (от корня к листьям) можно доказать, что поддерево с корнем в вершине v содержит по меньшей мере $2^{bh(v)}-1$ внутреннюю вершину.
2) Теперь рассмотрим произвольный путь из корня дерева в лист. Так как у каждой красной вершины могут быть только чёрные сыновья, то количество чёрных вершин на этом пути не менее h/2. Следовательно, чёрная высота дерева не меньше, чем h/2 и по доказанному в пункте 1) свойству, справедливо неравенство: $n \geq 2^{h/2} - 1$

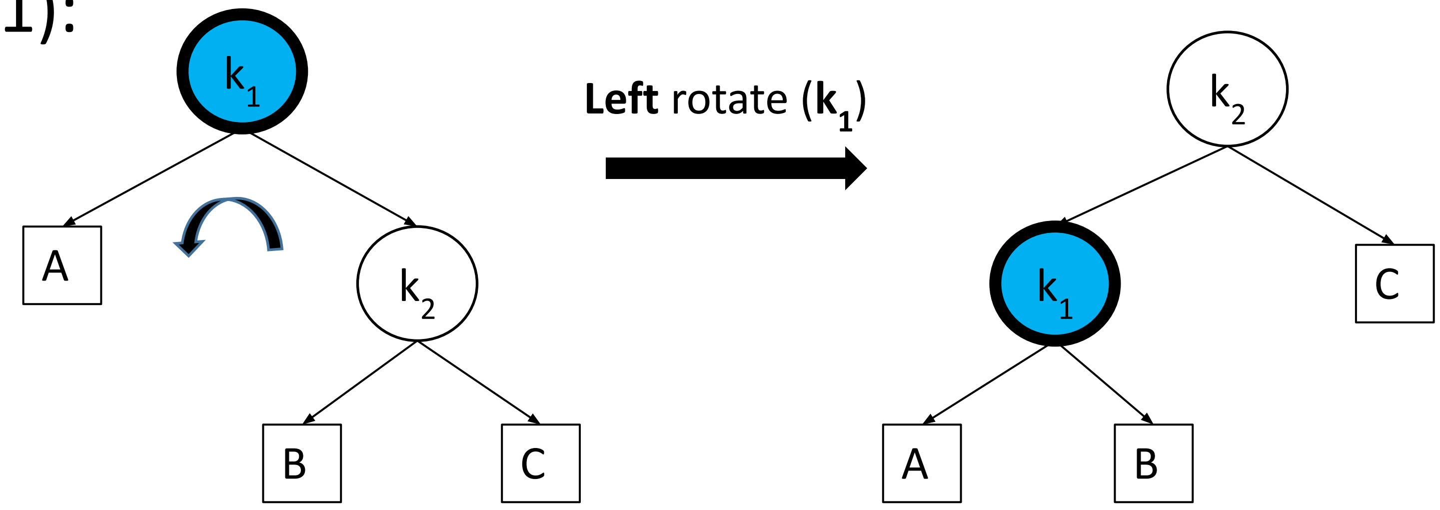
$$h \leq 2 \cdot \log(n+1).$$

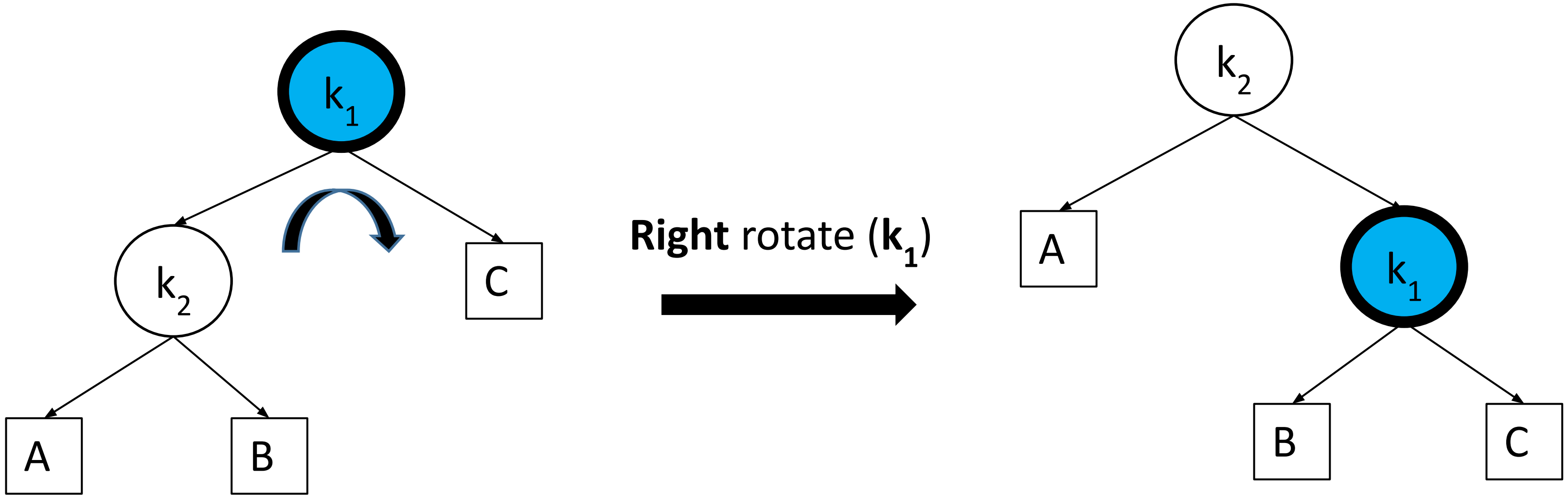
3) Логарифимируя неравенство, получаем

Обозначения



Для поддержки свойств красно-чёрных деревьев выполняются вращения, каждое из которых выполняется за O(1):



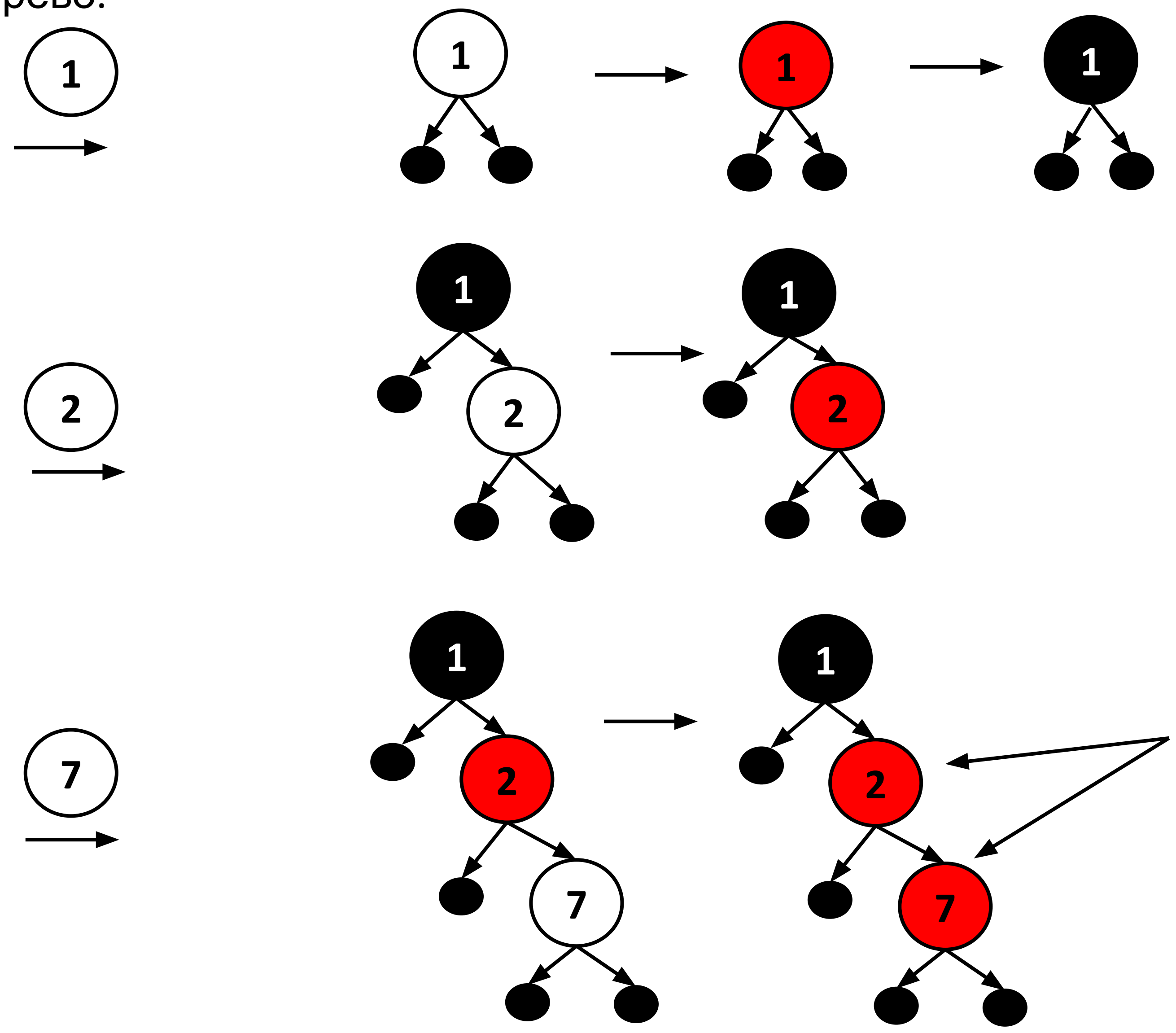


Добавление вершины в дерево

1. Осуществляем поиск места для добавляемой вершины **x** по аналогии с тем, как это делали в бинарном поисковом дереве.
2. Добавляем вершину **x** на место чёрного фиктивного листа и добавляем ей в качестве сыновей две фиктивные чёрные вершины.
3. Красим вершину **x** в красный цвет.
4. Если после добавления произошло нарушение RB-свойства (может нарушиться только одно: появились две подряд идущие красные вершины), то выполняем процедуру, восстанавливающую RB-свойства: перекраска вершин и, возможно, не более двух поворотов.

Пример.

Для последовательности чисел: 1, 2, 7, 3, 8, 14, 9 построить RB-дерево.



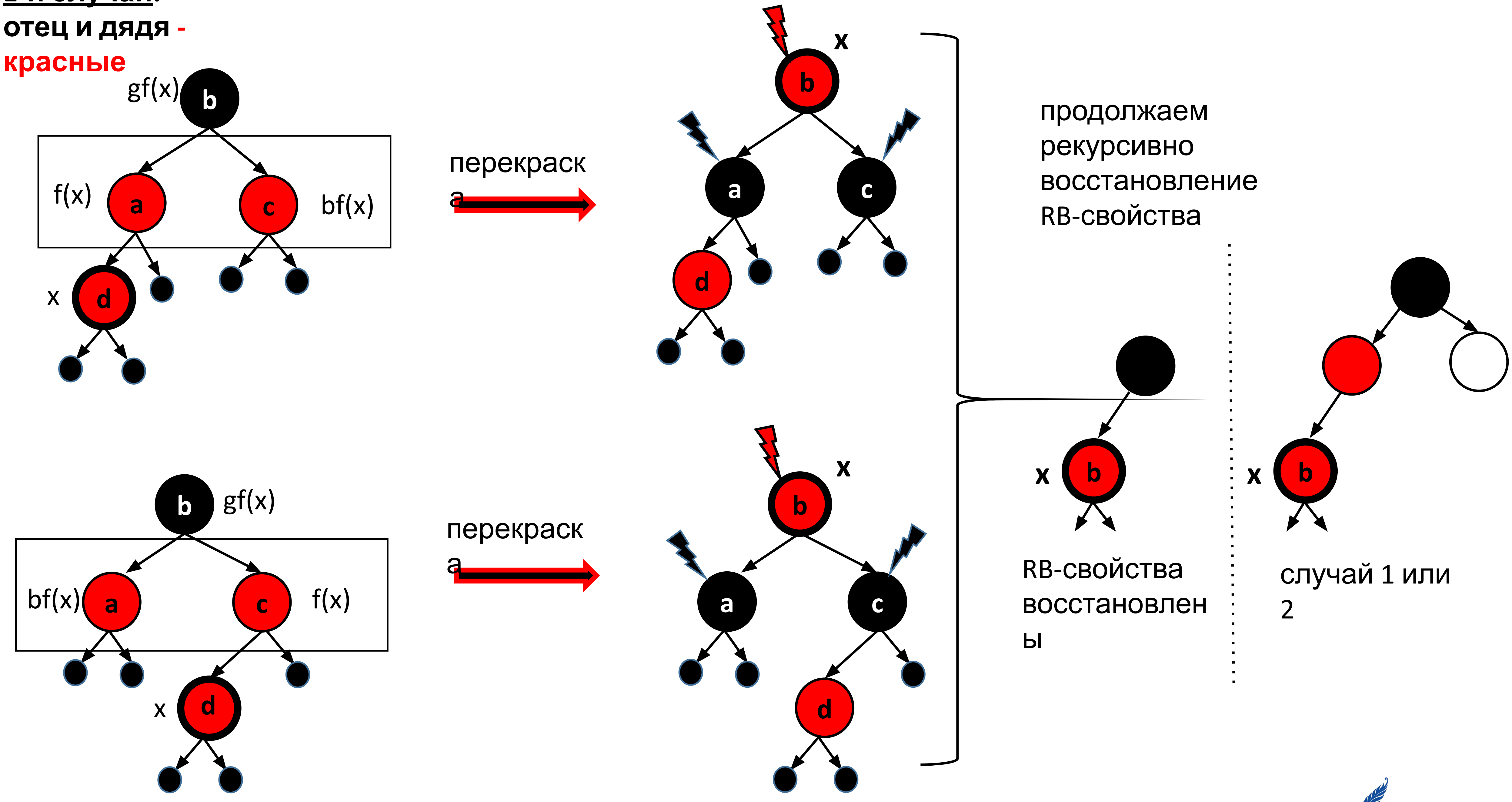
появились две подряд идущие красные вершины – нарушение RB- свойства

Процедуры, восстанавливающие RB-свойства:

(1) перекраски

(2) вращения

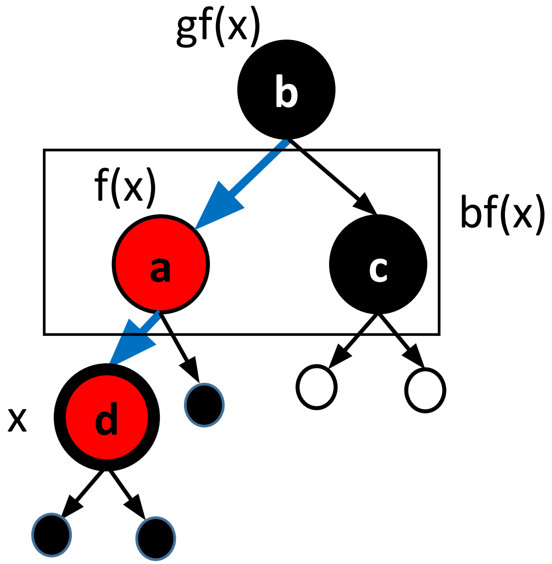
<u>1-й случай</u>:
отец и дядя -
красные



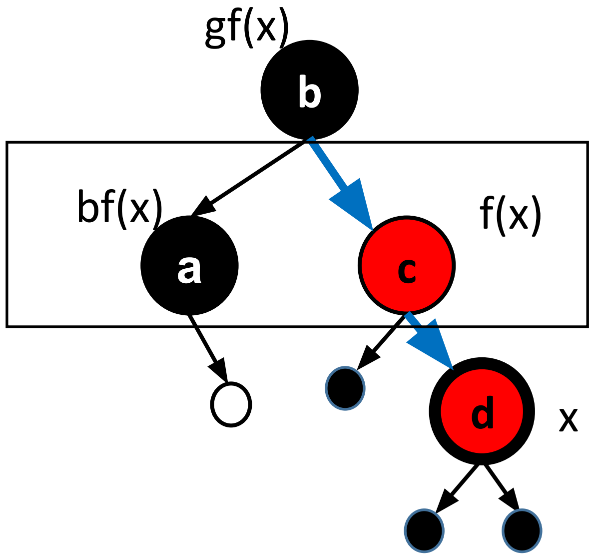
<u>2-й случай</u>:

отец – красный , дядя – чёрный

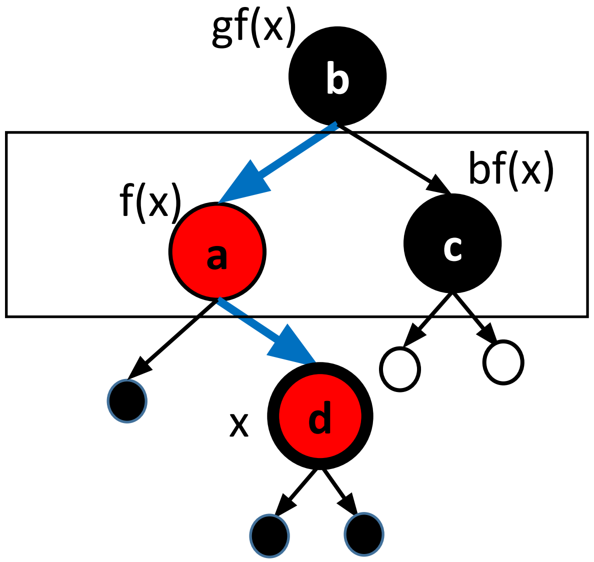
а)



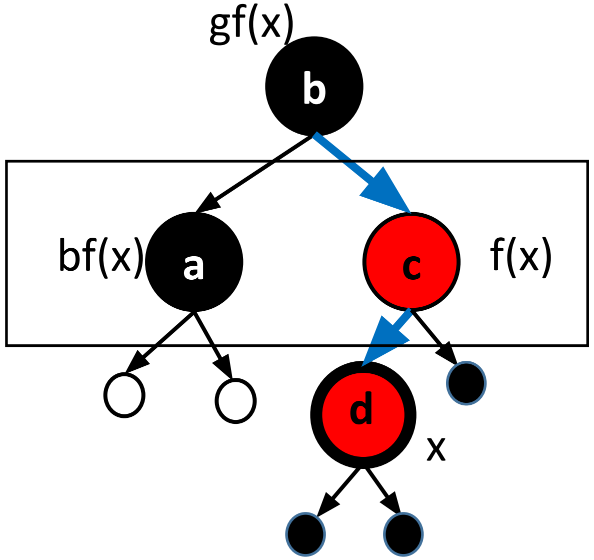
б)



в)



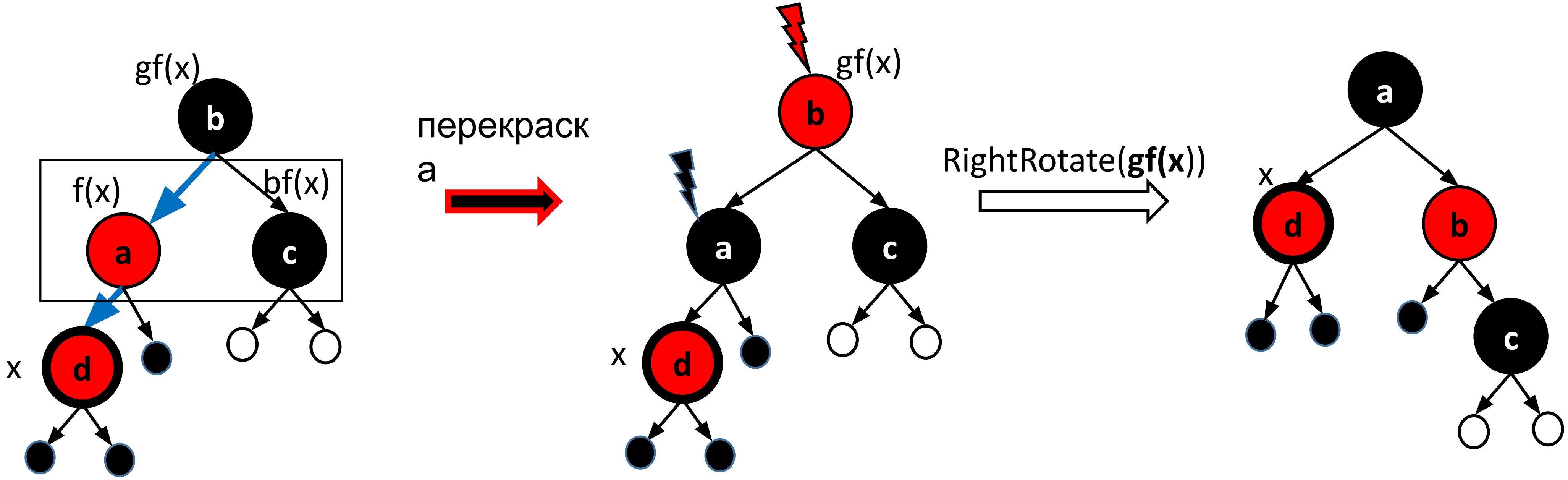
г)



<u>2-й случай</u>:

отец – красный , дядя – чёрный

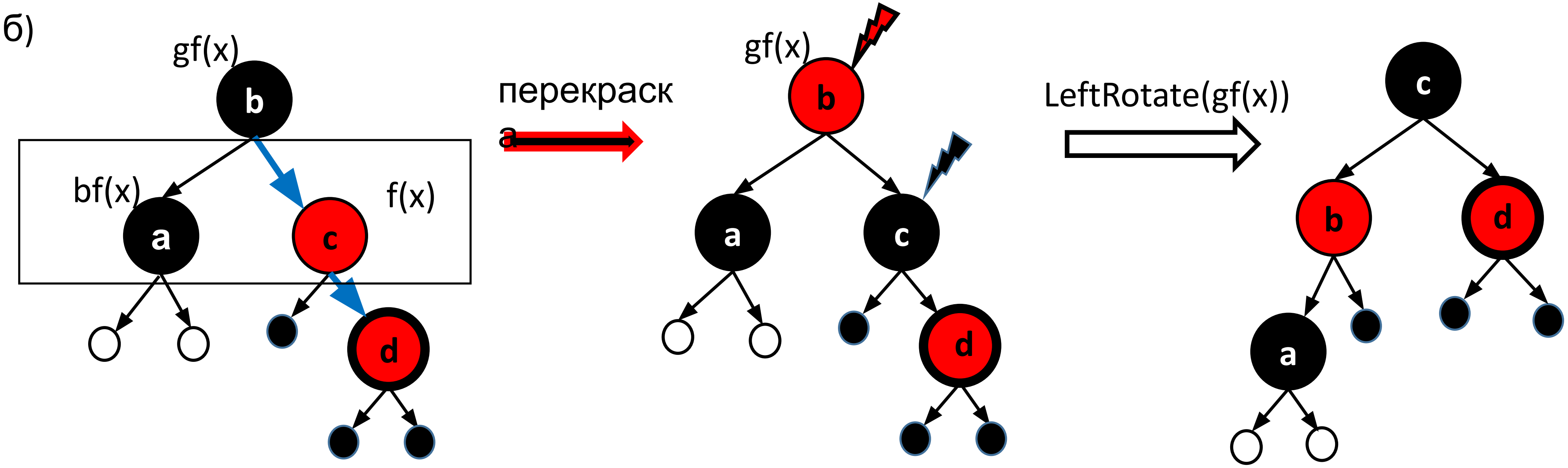
а)



RB-свойство восстановлено

<u>2-й случай</u>:
отец – красный , дядя – чёрный

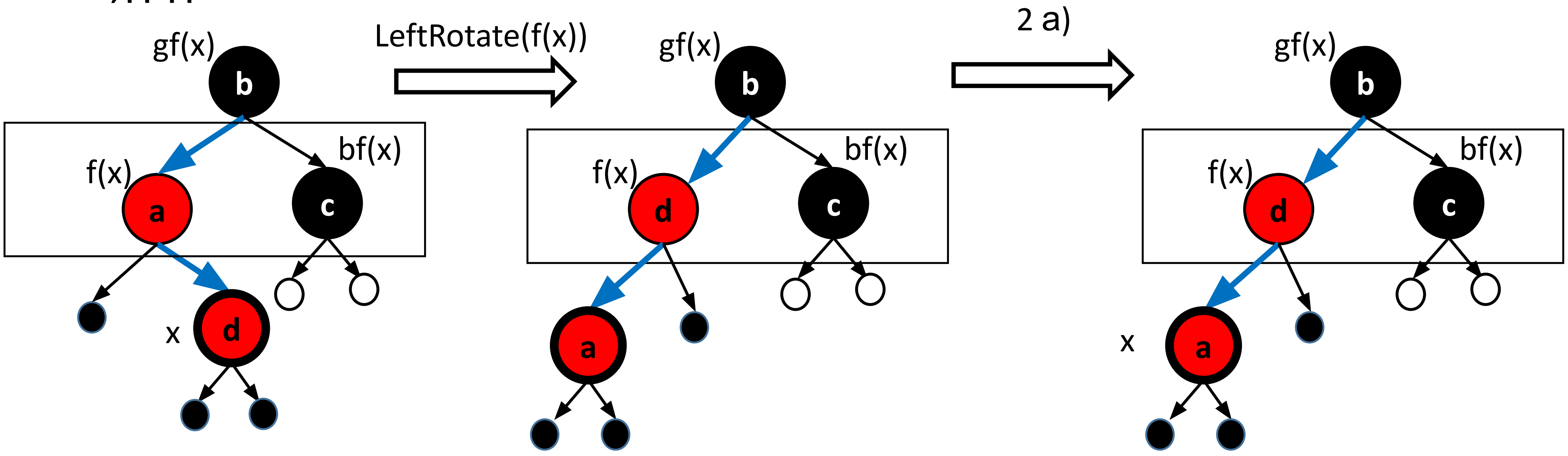
б)



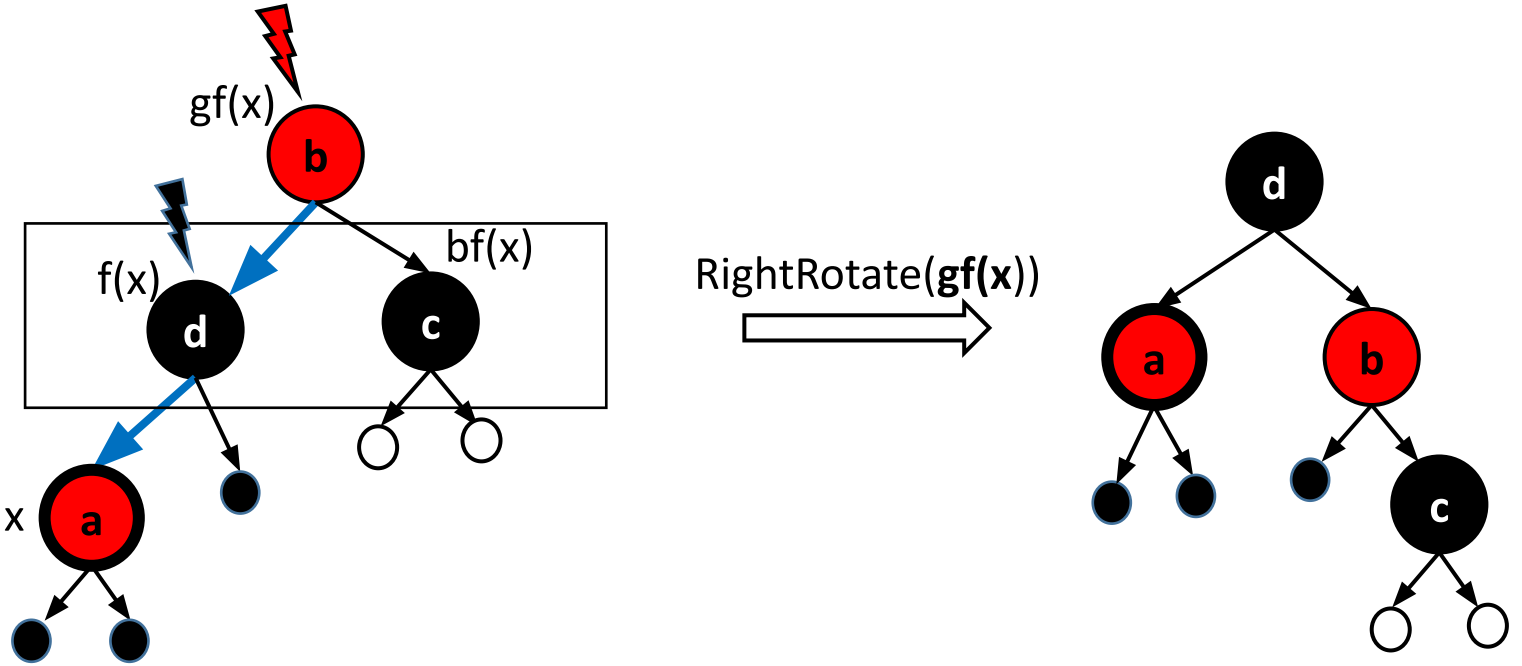
RB-свойство восстановлено

<u>2-й случай</u>:
отец – красный , дядя – чёрный

в)



перекраска

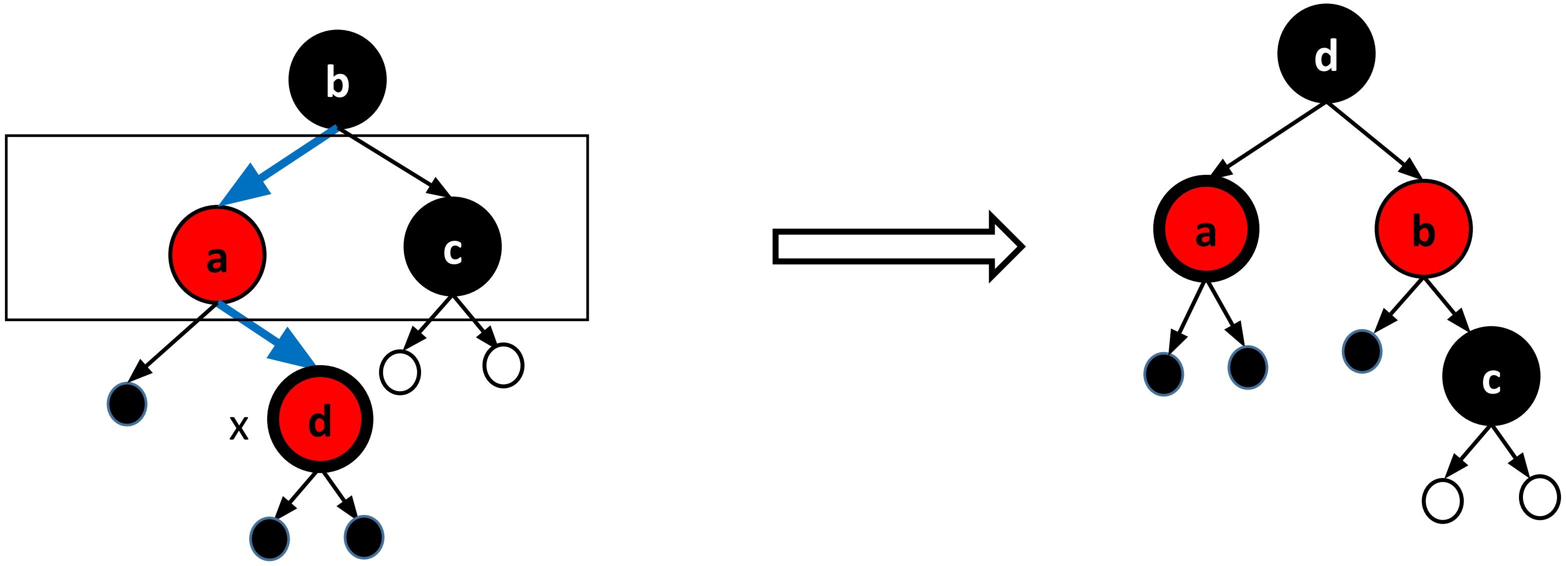


RB-свойство восстановлено

ФПМИ БГУ

<u>2-й случай</u>:
красный , дядя – чёрный

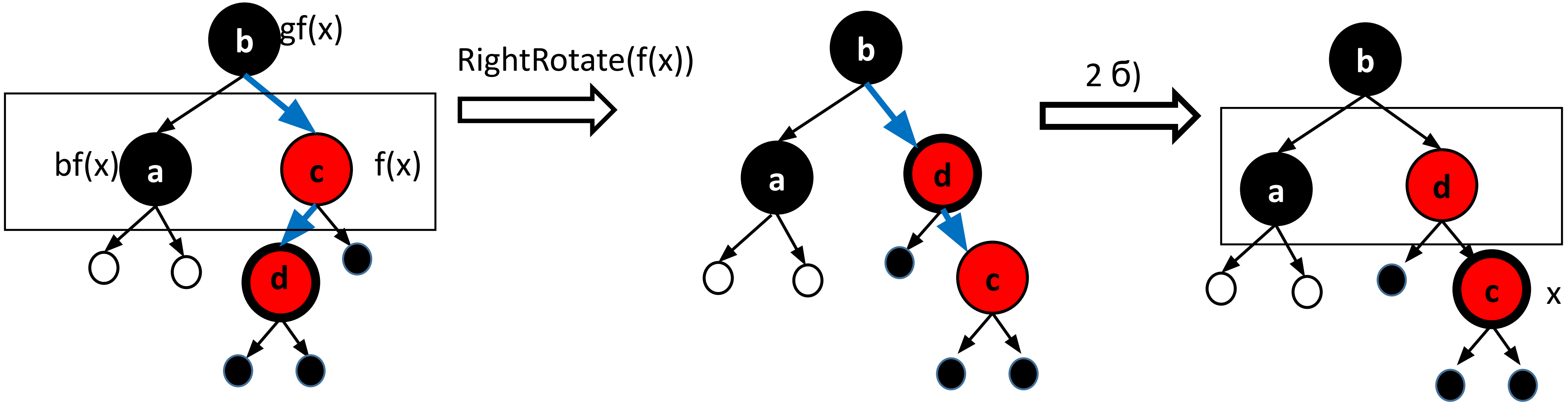
в) итог

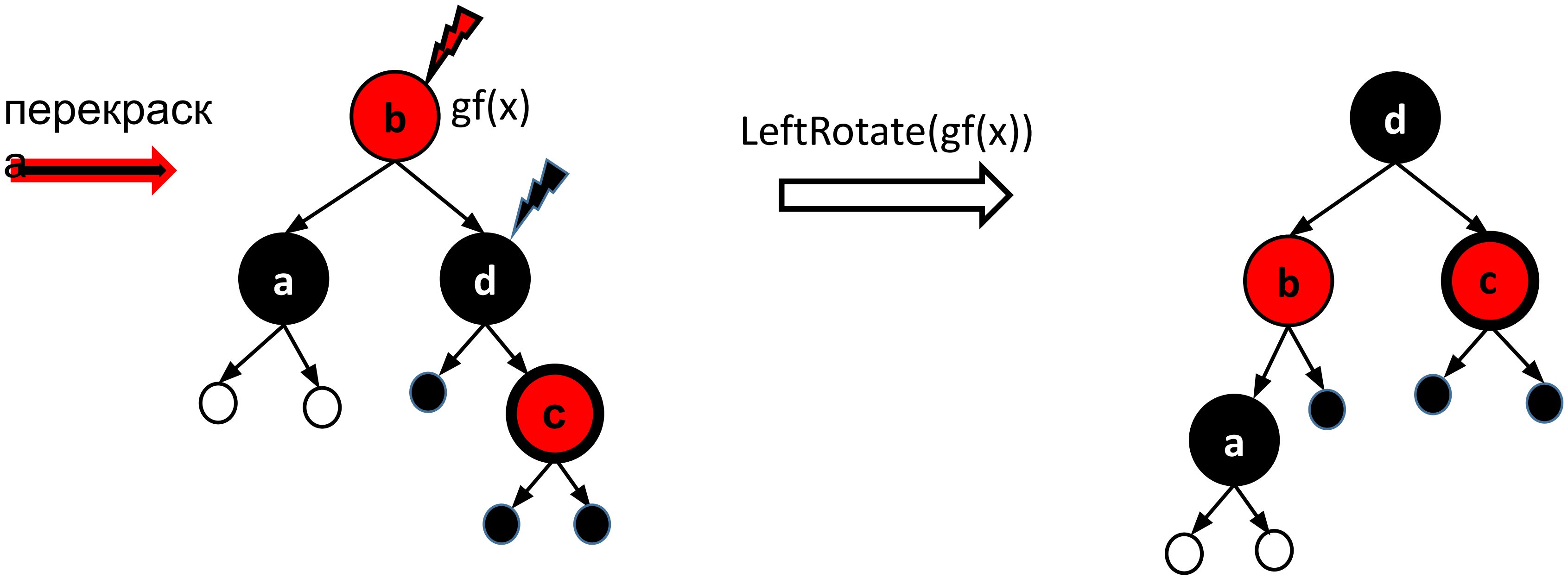


RB-свойство восстановлено

<u>2-й случай</u>:
отец – красный , дядя – чёрный

г)

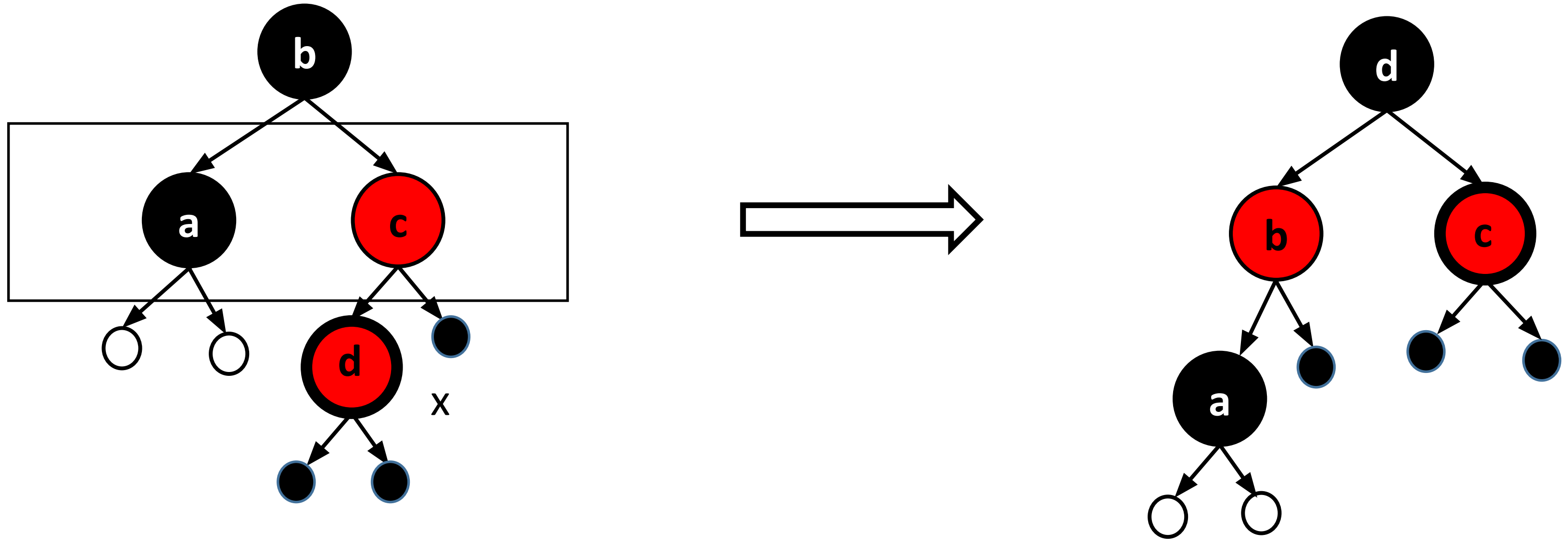




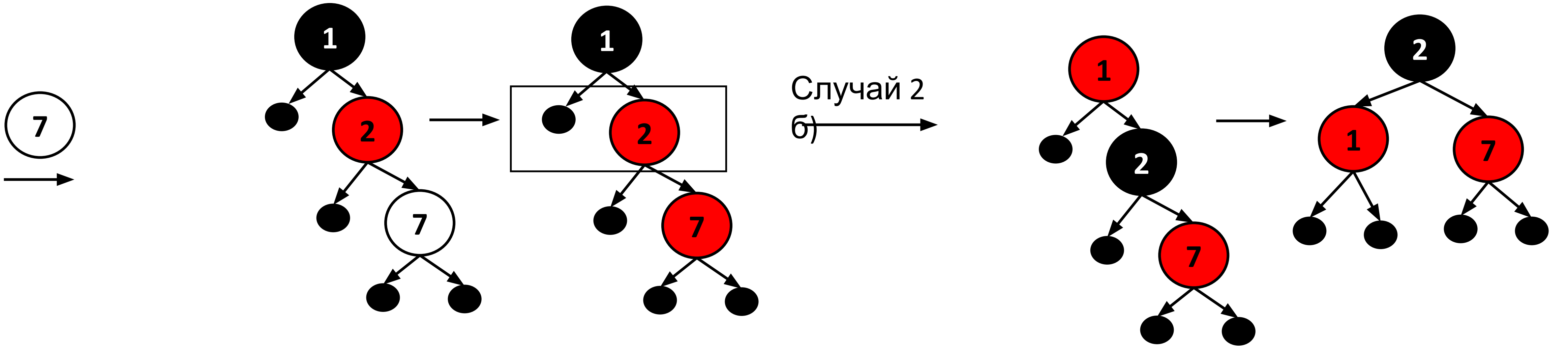
RB-свойство восстановлено

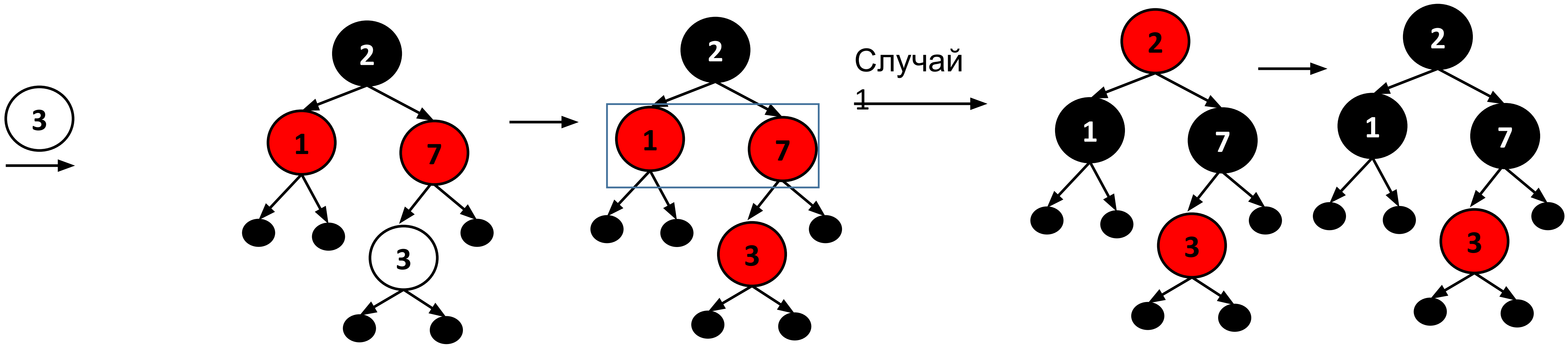
<u>2-й случай</u>:
отец – красный , дядя – чёрный

г) итог

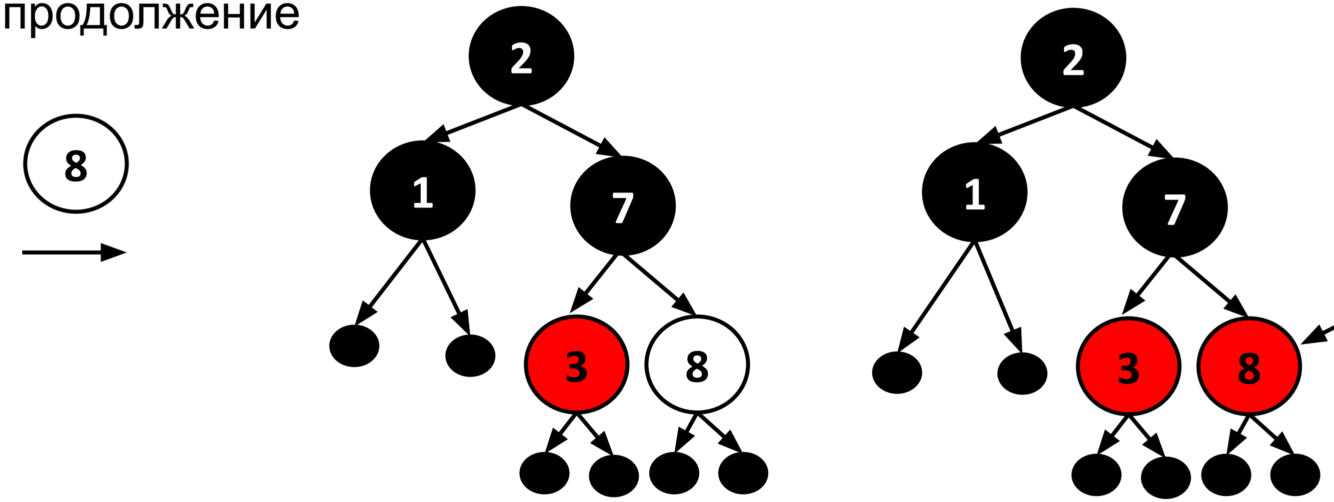


Пример (продолжение). Для последовательности чисел: 1, 2, 7, 3, 8, 14, 9 построить RB-дерево.

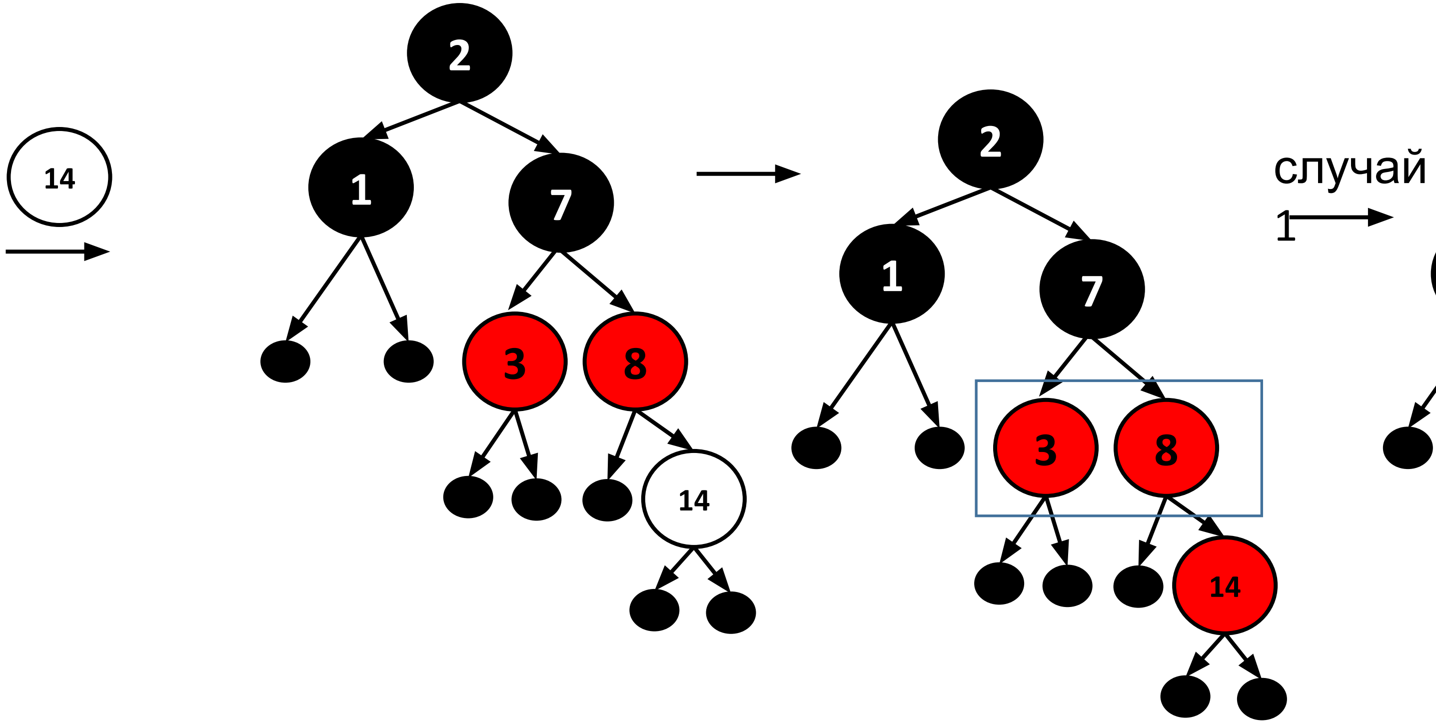


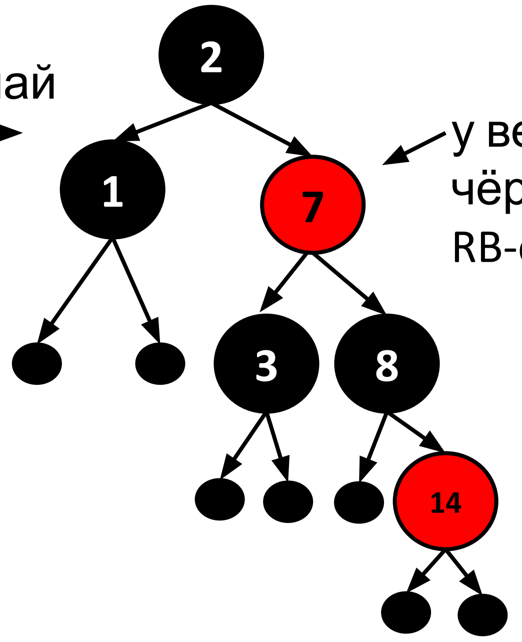


(продолжение)



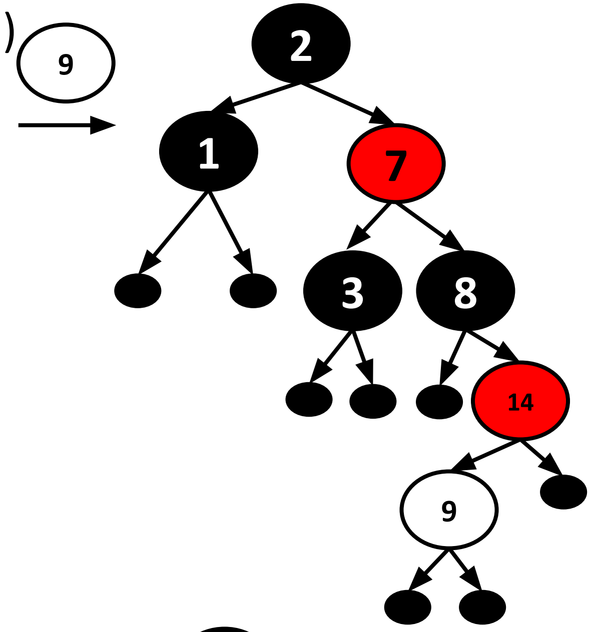
у вершины 8 отец - чёрный,
RB-свойства выполнены

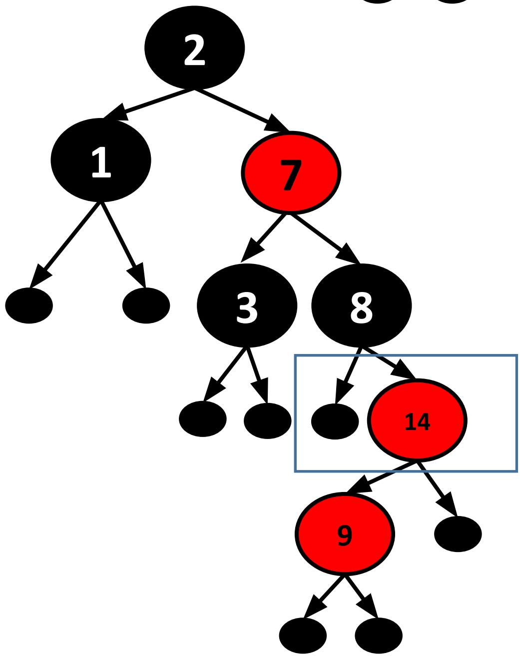




у вершины 7 отец - чёрный,
RB-свойства выполнены

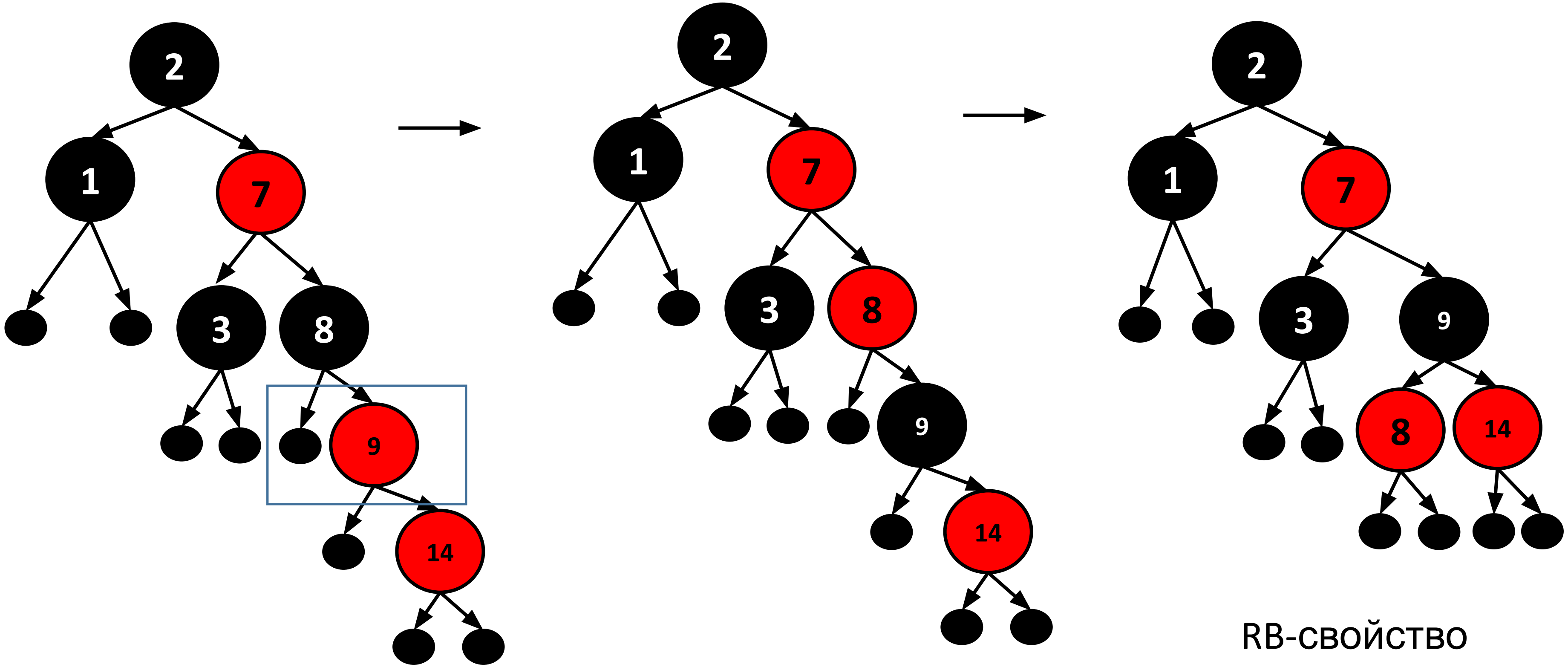
(продолжение)





случай 2 б)

восстановление RB-свойства



RB-свойство восстановлено

Добавление элемента. Оценки.

- поиск отца – O(log n)
- добавление – O(1)
- перекрашивания – O(log n)
- повороты (не более 2-х) – O(1)

Следовательно, время добавления элемента - O(log n).

Удаление

1. Удаляем вершину из дерева по аналогии с тем, как это делали в бинарном поисковом дереве.
2. Пусть **y** – фактически удалённая вершина (это лист или вершина, у которой только одно поддерево).
3. Если удалённая вершина **y** имела **красный цвет**, то все RB-свойства будут выполняться и операция удаления элемента завершена.
4. Если удалённая вершина **y** имела **черный цвет**, то любой путь, через неё проходивший, теперь содержит на одну чёрную вершину меньше. Нарушается RB-свойство, которое требует, чтобы любой путь из корня в листья содержал одинаковое количество чёрных вершин. Восстановим RB-свойство.

Обозначения

y – фактически удалённая вершина

x – единственный ребёнок вершины **y** (если детей у вершины **y** не было, то x=NULL)

f(x)=f(y)

вершину, которая может быть окрашена, как в красный, так и в чёрный цвет, будем обозначать на рисунках **r**/**b**

Если фактически удалённая вершина **y** имела **черный цвет**, то любой путь, через неё проходивший, теперь содержит на одну чёрную вершину меньше.

Поступим следующим образом:

- если вершина **x** - **красная**, то сделаем её **чёрной**, теперь все RB-свойства выполнены;
- если **x** - **чёрная**, то, будем при подсчёте числа чёрных вершин на пути от корня к листьям **считать её за две чёрные вершины**;

однако дерево не предполагает такие «двойные чёрные вершины», поэтому нужно выполнить процедуру, которая превращает полученное дерево в настоящее красно-чёрное дерево

1-й случай

✔ **x – чёрный и является левым сыном своего отца** (ситуация правого сына выполняется симметрично),

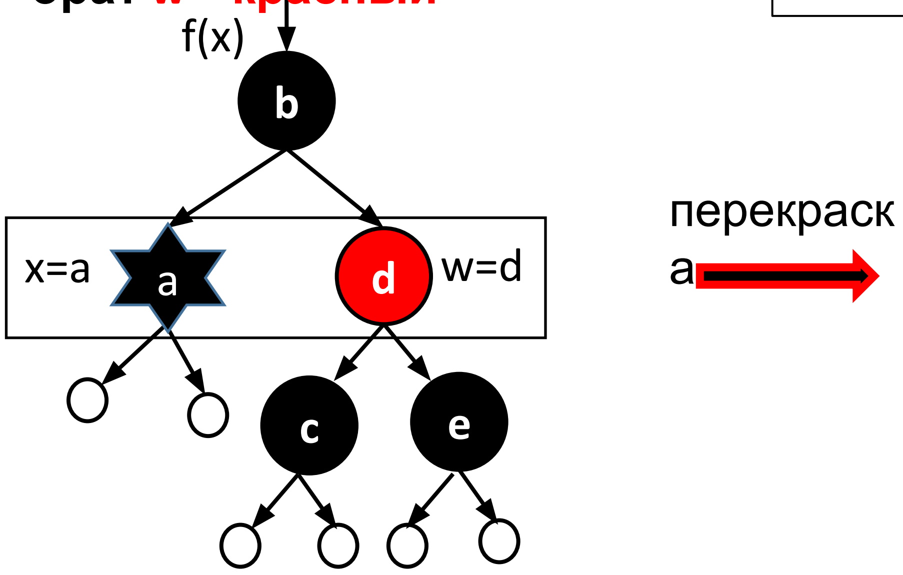
✔ **брат w – красный**

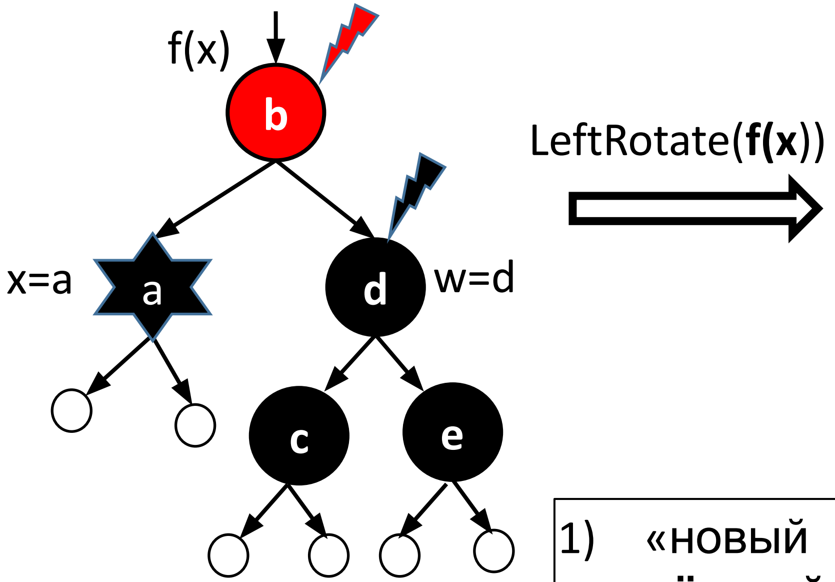
случай 2 перекраска и завершение

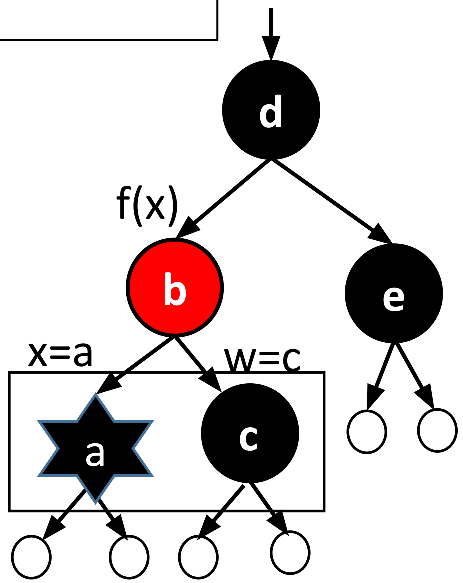
случай 3 перекраска и поворот

случай 4 (перекраска, поворот, завершение)

случай 4 (перекраска, поворот, завершение)







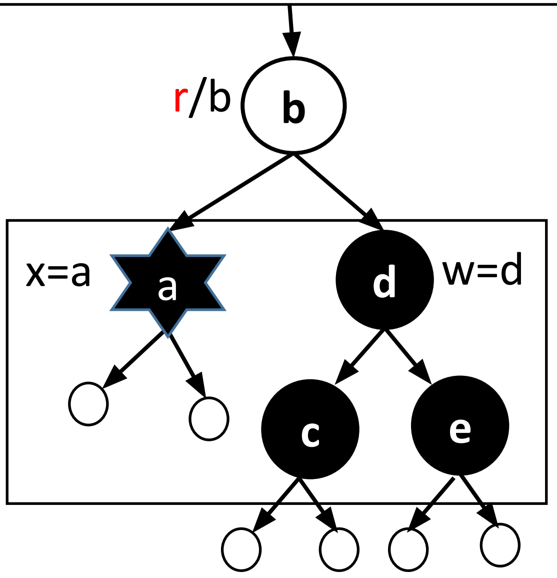
1) «новый брат» **w** вершины x – **чёрный**

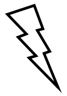
2) вершину **x** считаем «**дважды чёрной**»,

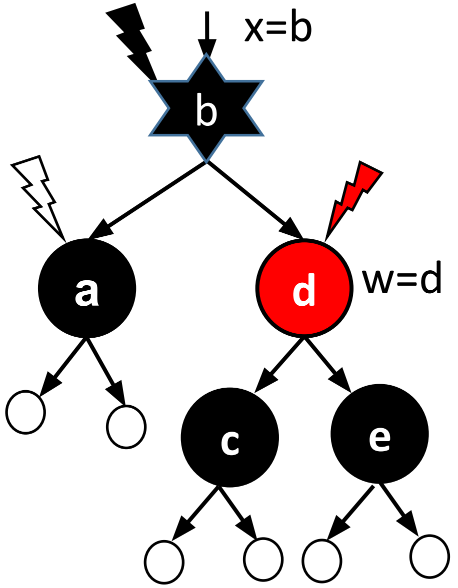
далее рассматриваются случаи в зависимости от того, какого цвета дети у вершины **w** (новый брат x)

2 случай (возможно повторение)

- ✔ **x** – «**дважды чёрный**» и является левым сыном своего отца,
- ✔ **w, left(w), right (w)** – **чёрные**

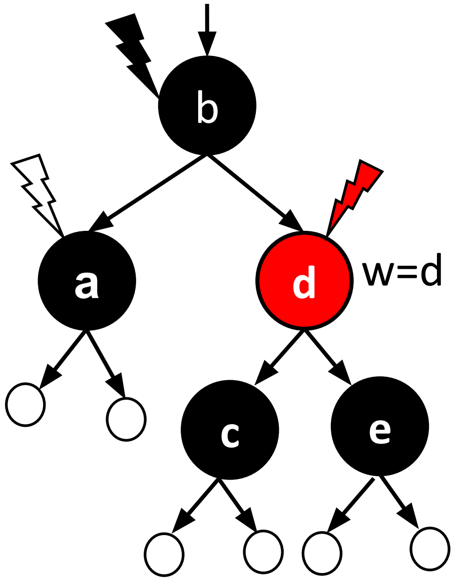



снятие «лишней» черной окраски



если вершина b была раньше чёрная, то она становится «дважды чёрной»;

продолжаем балансировку для вершины x=b



если вершина b была раньше красная, то она становится чёрной;

RB-свойства выполнены;

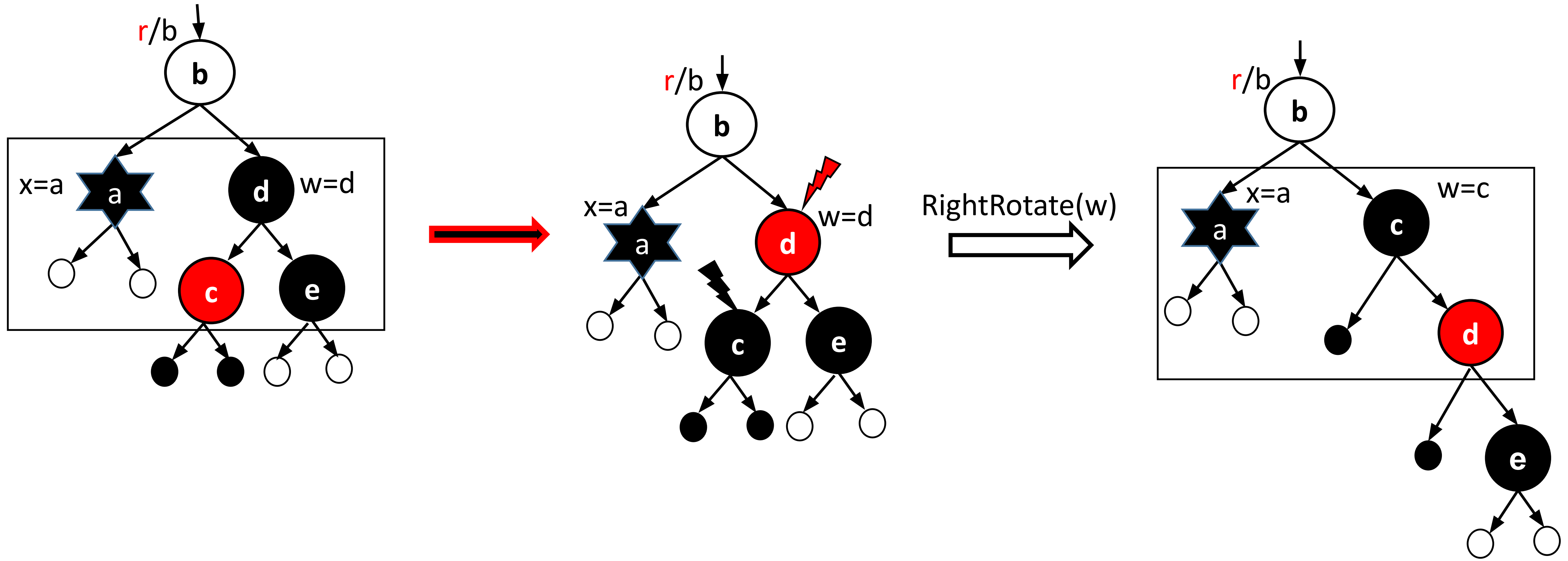
3-й случай

- ✔ x – «дважды чёрная»
- ✔ **w, right (w)** – чёрная
- ✔ **left(w)** - красная

4-й случай

- ✔ x – «дважды чёрная»
- ✔ **w, left (w)** – чёрная
- ✔ right(w) - красная

завершение



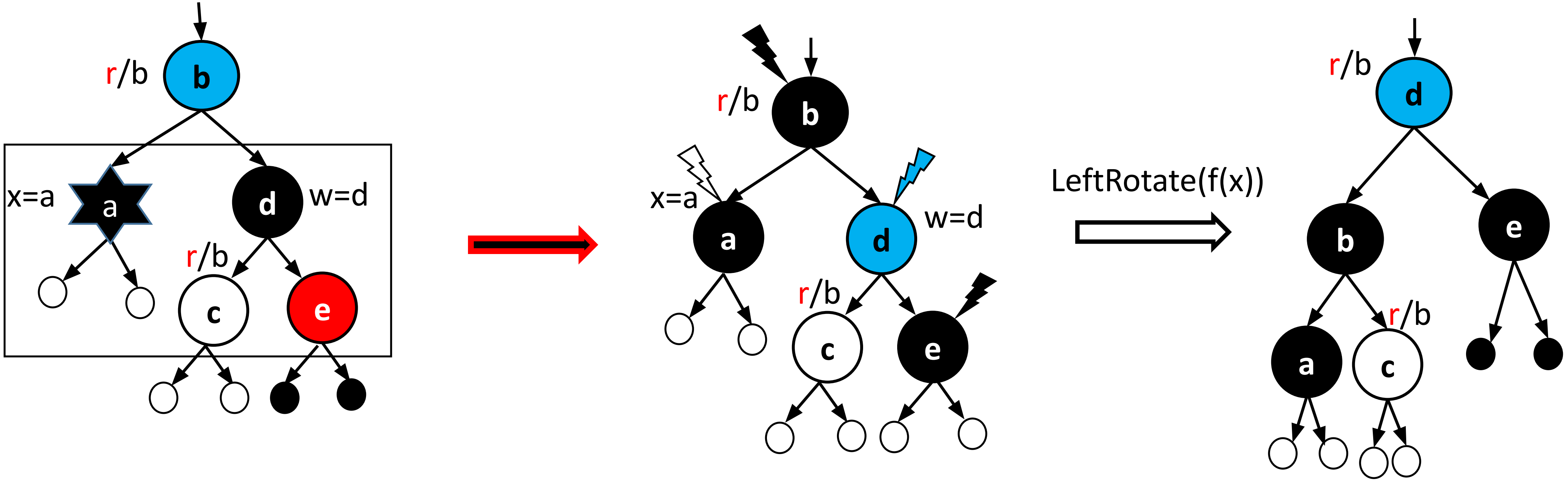
4 случай

✔ x – «дважды чёрная»

✔ **w, left (w)** – чёрная

✔ right(w) - красная

завершение

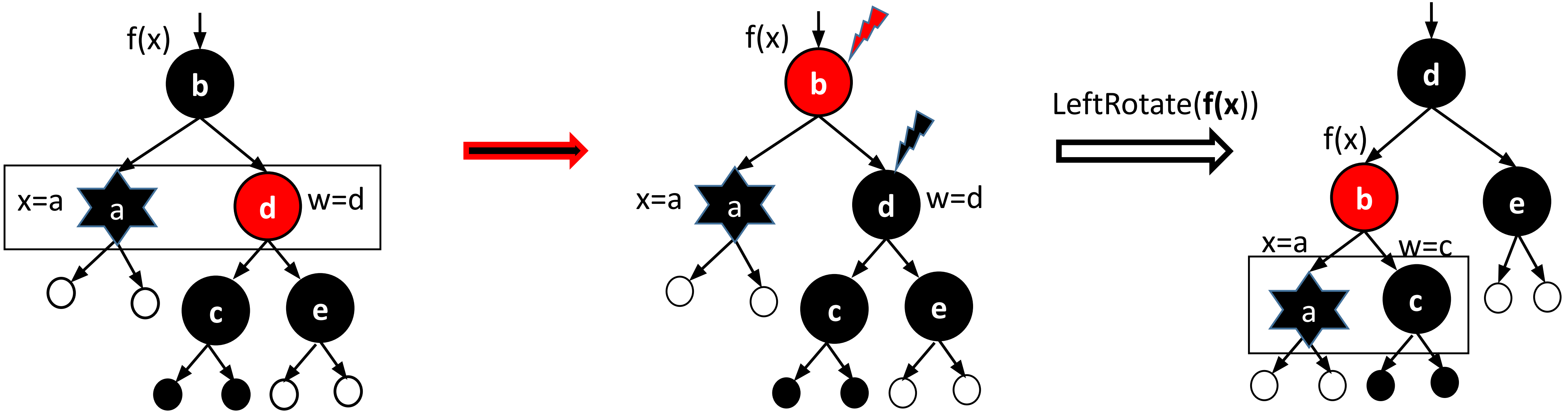


вершина d красится в тот же цвет, который был изначально у f(x) – вершины b

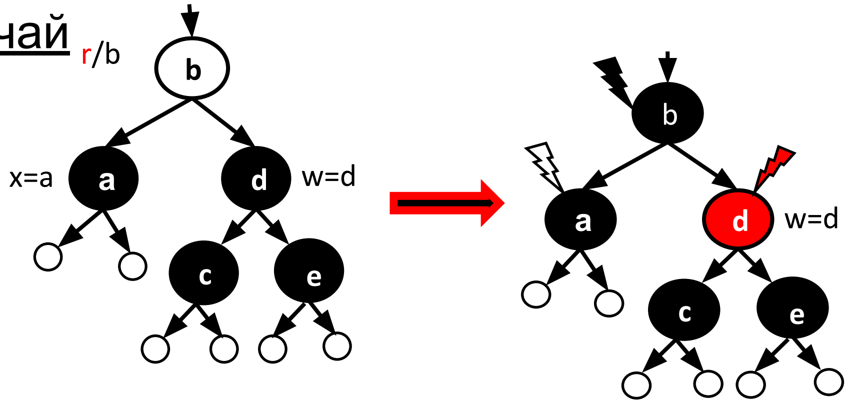
RB – свойства выполнены

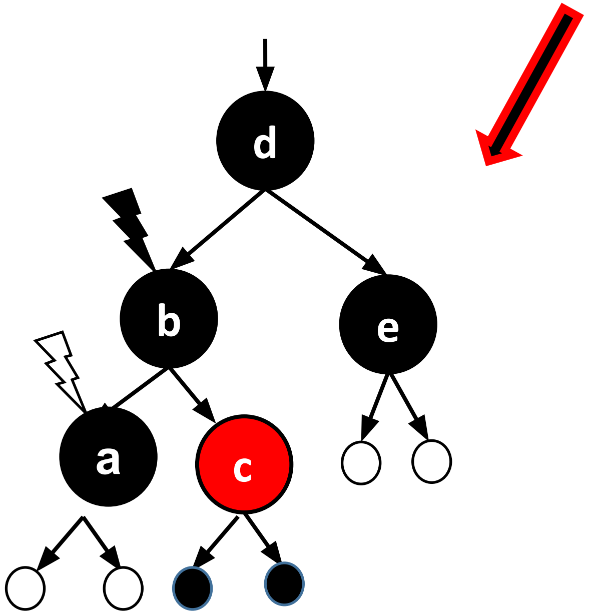
1-й случай (продолжение) → если выполняется сведение к случаю 2 и завершение

✔ если у нового брата вершины x оба сына - чёрные



2-й случай





RB - свойства выполнены

Удаление

Случаи 1, 3 и 4. Выполняются за время O(1) (выполняется самое большое 3 вращения).

Случай 2. При каждом выполнении этого случая цикл возможно продолжит свою работу. Одна итерация цикла выполняется за время O(1), но при каждом повторении указатель на вершину x перемещается вверх по дереву, никакие вращения при этом не происходят, поэтому количество повторений случая 2 ограничено высотой дерева h=O(log n).

Таким образом время на восстановление RB- свойства после выполнения операции удаления элемента - O(log n).

Удаление

- поиск удаляемой вершины – O(log n)
- непосредственное удаление вершины – O(log n)
- все перекрашивания - O(log n)
- повороты (будет выполнено не более 3-х) – O(1)

Следовательно, время удаления элемента - O(log n).

Сравнение

1. **Высота** АВЛ-дерева меньше, чем высота красно-чёрного дерева (на 38%)

$$h < 1{,}44 \cdot \log\left(n+2\right) - 0{,}328$$

АВЛ:

$$h \le 2 \cdot \log\left(n+1\right)$$

Красно-чёрное:

2. **Добавление элемента**

АВЛ
поиск отца для добавляемой вершины – O(h)
непосредственное добавление вершины –O(1)
поиск разбалансированной вершины - O(h)
повороты (будет выполнен 1 поворот) – O(1)

Красно-чёрное
поиск отца для добавляемой вершины – O(h)
непосредственное добавление вершины –O(1)
перекрашивания - O(h)
повороты (будет выполнено не более 2-х) – O(1)

3. **Удаление элемента**

АВЛ
поиск удаляемой вершины – O(h)
непосредственное удаление –O(1)
поворот – O(1)
повторная балансировка (повороты) - O(h)

Красно-чёрное
поиск удаляемой вершины – O(h)
непосредственное удаление –O(1)
повороты (не более 3-х) - O(1)
перекрашивания - O(h)

Тесты показывают, что АВЛ-деревья быстрее красно-чёрных во всех операциях

https://radius-server.livejournal.com/598.html

http://nathanbelue.blogspot.com/2012/05/red-black-versus-avl.html

1. Структуры данных и алгоритмы: теория и практика: учеб. пособие / В.М. Котов, Е.П. Соболевская. Мн.: БГУ. 2004.− С.141−153.
2. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен [и др.] – М.: Вильямс, 2005. – С 336 −356.

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Спасибо за внимание!