

Поступательное движение  
твёрдого тела и вращательное  
движение твёрдого тела  
вокруг неподвижной оси.  
Геометрия масс.

Выполнили:

студенты группы АСМ 14-1

Анохин Алексей и Сергачев Сергей.

## Момент инерции твердого тела

Твердое тело можно представить как систему МТ, удерживаемых внутренними силами на неизменных расстояниях друг от друга и по аналогии с МТ записать:  $dL / dt = \Sigma N_{\text{внеш}}$

Пусть момент импульса  $i$ -й частицы,  $r_i$  — радиус окружности, по которой движется МТ  $\Delta m_i$ , относительно оси вращения тела.

Направление  $L_i$  относительно оси вращения всех точек тела одинаковое, так как в каждый момент времени направление и величина угловых скоростей всех точек одинаковы (тело твердое).

$$L = \Sigma L_i = \omega \Sigma \Delta m_i r_i^2 = I \omega$$

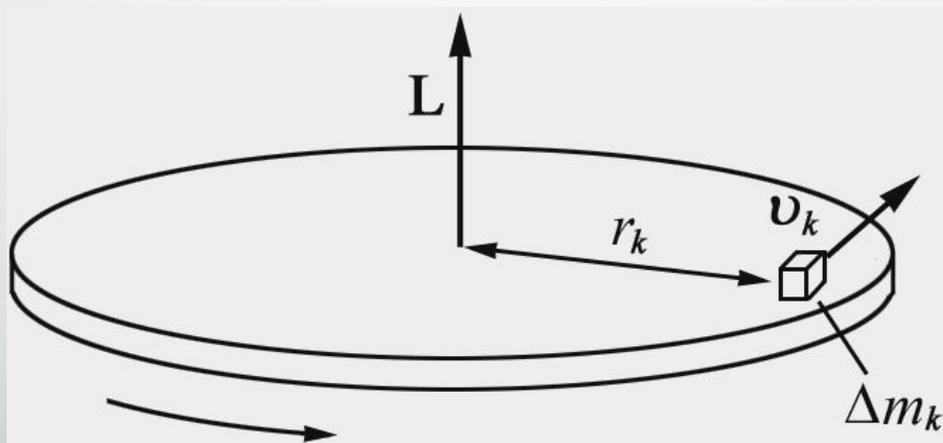
Величина  $I = \Sigma \Delta m_i r_i^2$  называется моментом инерции твердого тела относительно данной оси.

Направление векторов  $L$  и  $\omega$  совпадают только в случае симметричного тела.

## Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции

Пусть частицы образуют твердое тело, способное вращаться вокруг некоторой оси. Любая часть этого тела расположена неизменным образом относительно других его частей.

Найдем полный момент импульса относительно неподвижной оси. Пусть масса  $k$ -й частицы равна  $m_k$  и она расположена на расстоянии  $r_k$  от оси .



Момент импульса  $k$ -й частицы равен

$$L_k = m_k v_k r_k.$$

Угловая скорость вращения тела  $\omega$  связана с линейной скоростью точки соотношением

$$v_k = \omega r_k,$$

и, следовательно,

$$L_k = m_k v_k r_k = L_k = m_k r_k^2 \omega.$$

Полный момент количества движения тела равен сумме моментов количества движения всех частиц, образующих тело:

$$L = \sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \omega m_k r_k^2$$

**4. Момент инерции однородного стержня постоянного сечения относительно оси:**



Выделим элементарный объем  $dV = Adx$  на расстоянии  $x$ .

Элементарная масса:  $dm = \rho A dx$

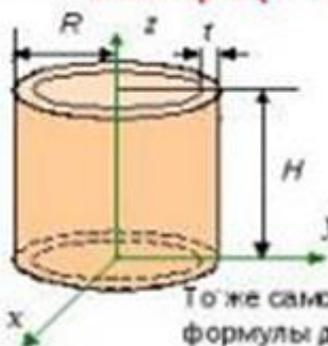
$$I_z = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho A dx = \rho A \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \rho A \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

Для вычисления момента инерции относительно центральной оси (проходящей через центр тяжести) достаточно изменить расположение оси и задать пределы интегрирования  $(-L/2, L/2)$ . Здесь продемонстрируем формулу перехода к параллельным осям:

$$I_z = I_{zC} + d^2 M. \quad \Rightarrow \quad \frac{ML^2}{3} = I_{zC} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 M.$$

$$I_{zC} = \frac{ML^2}{3} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 M = \frac{ML^2}{12}$$

**6. Момент инерции тонкого цилиндра относительно оси симметрии ( $t \ll R$ ):**



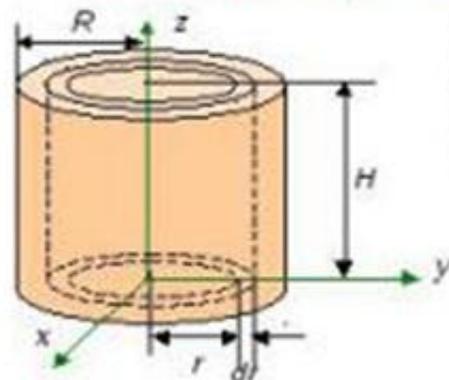
В силу малости толщины цилиндра считаем, что все точки находятся на одинаковом расстоянии  $R$  до оси и интегрирование не требуется. Объем  $V = 2\pi R t H$ . (тонкий цилиндр радиуса  $R$  с толщиной стенки  $t$ .)

$$I_z = R^2 \rho 2\pi R t H = MR^2$$

То же самое можно получить с использованием формулы для толстостенного цилиндра, учитывая малость  $t$ .

$$I_z = \frac{M((R^2 + (R-t)^2))}{2} = \frac{M(2R^2 - 2Rt + t^2)}{2} \ll 2R^2$$

**5. Момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно оси симметрии:**



Выделим элементарный объем  $dV = 2\pi r dr H$  (тонкий цилиндр радиуса  $r$ ):  
Элементарная масса:  $dm = \rho 2\pi r dr H$

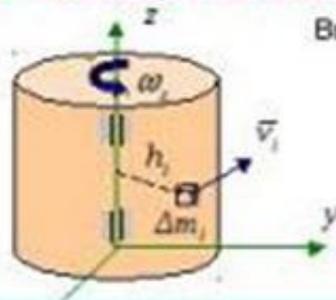
$$I_z = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr H = \rho 2\pi H \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \rho 2\pi H \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Здесь использована формула объема цилиндра  $V = \pi R^2 H$ . Для вычисления момента инерции пустотелого (толстого) цилиндра достаточно задать пределы интегрирования от  $R_1$  до  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ):

$$I_z = \rho 2\pi H \frac{r^4}{4} \Big|_{R_1}^{R_2} = \rho 2\pi H \left( \frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right) = \frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$

Поскольку высота цилиндров в результате не входит в формулы моментов инерции, то они остаются справедливыми для тонкого сплошного диска и обода колеса (тонкого кольца).

**Кинетический момент твердого тела**



Выделим дискретный малый объем массы  $\Delta m_i$ :

$$\Delta K_{z_i} = h_i \Delta m_i v_i = h_i \Delta m_i \omega h_i = \omega h_i^2 \Delta m_i$$

$$K_z = \sum \Delta K_{z_i} = \omega \sum h_i^2 \Delta m_i = \omega I_z$$

Или переходя к бесконечно малым:

$$dK_z = h dm v = h dm \omega h = \omega h^2 dm$$

$$K_z = \int dK_z = \omega \int h^2 dm = \omega I_z$$

Кинетический момент вращающегося тела равен произведению угловой скорости на момент инерции относительно оси вращения.

## Эллипсоид инерции

Рассмотрим систему материальных точек  $M_1, M_2, \dots, M_n$  и некоторую произвольную прямую  $OR$ . Пусть  $m$  есть масса какой-нибудь одной из этих точек  $M$  и  $r$  - ее расстояние от оси  $OR$ . Для каждой точки образуем произведение  $mr^2$  и затем составим сумму  $\sum mr^2$  всех таких произведений, распространенную на все точки системы. Эту сумму называют *моментом инерции* системы относительно оси  $OR$ . Мы будем обозначать момент инерции через  $I$ . Следовательно, имеем по определению

$$I = \sum mr^2.$$

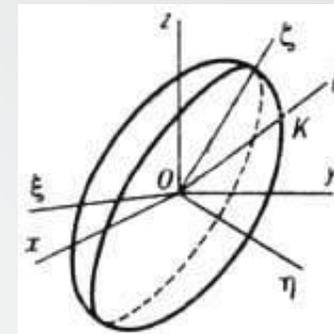
Пусть  $M = \sum m$  есть полная масса системы; мы можем определить положительное число  $k$ , удовлетворяющее соотношению:

$$I = Mk^2.$$

Число  $k$  называется *радиусом инерции* системы относительно оси  $OR$ .

Моменты инерции определяют лишь для неизменяемой системы; ясно также, что момент инерции твердого тела зависит от положения оси  $OR$  по отношению к телу и что он изменяется вместе с изменением положения этой оси. Чтобы выяснить, как изменяется момент инерции при изменении положения оси, необходимо рассмотреть два случая (предполагаем твердое тело неподвижным): 1° изменение момента инерции по отношению к параллельным осям; 2° изменение момента инерции по отношению к пересекающимся осям.

Эллипсоид инерции – это поверхность, характеризующая распределение *моментов инерции* тела относительно пучка осей, проходящих через фиксированную точку  $O$ . Строится эллипсоид инерции и как геометрическое место концов отрезков  $OK=1/\sqrt{I_l}$ , отложенных вдоль  $Ol$  от точки  $O$ , где  $Ol$ -любая ось, проходящая через точку  $O$ ;  $I_l$  - момент инерции тела относительно этой оси (рис.). Центр эллипсоида инерции совпадает с точкой  $O$ , а его уравнение в произвольно проведённых координатных осях  $Oxyz$  имеет вид:



$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx = 1,$$

где  $I_x, I_y, I_z$  - осевые, а  $I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}$  - центробежные моменты инерции тела относительно указанных координатных осей. В свою очередь, зная эллипсоид инерции для точки  $O$ , можно найти момент инерции относительно любой оси  $Ol$ , проходящей через эту точку, из равенства  $I_l = 1/R^2$ , измерив в соответствующих единицах расстояние  $R = OK$ .

Для каждой связанной с телом точки можно построить свой эллипсоид инерции. При этом эллипсоид инерции, построенный для центра масс тела, называется *центральный* эллипсоидом инерции. Главные оси эллипсоида инерции называются *главными осями инерции* тела для данной точки, а главные оси центрального эллипсоида инерции – *главными центральными осями инерции* тела. Если в качестве координатных осей выбрать главные оси инерции  $Oxhz$ , то все центробежные моменты инерции обратятся в нули и уравнение эллипсоида инерции примет вид

$$I_\xi \xi^2 + I_\eta \eta^2 + I_\zeta \zeta^2 = 1.$$

## *Главные оси инерции*

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называют главными осями (иногда их называют главными осями инерции). Через любую точку, взятую в плоскости сечения, можно провести в общем случае пару главных осей (в некоторых частных случаях их может быть бесчисленное множество). Для того чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, рассмотрим, как изменяется центробежный момент инерции при повороте осей на  $90^\circ$ . Для произвольной площадки  $dA$ , взятой в первом квадранте системы осей  $xOy$ , обе координаты, а, следовательно, и их произведение положительны. В новой системе координат  $xOy_1$ , повернутой относительно первоначальной на  $90^\circ$ , произведение координат рассматриваемой площадки отрицательно. Абсолютное значение этого произведения не изменяется, т. е.  $x_1y_1 = -xy$ . Очевидно, то же самое имеет место и для любой другой элементарной площадки. Значит, и знак суммы  $dAx_1y_1$ , представляющий собой центробежный момент инерции сечения, при повороте осей на  $90^\circ$  меняется на противоположный, т. е.  $J_{x_1y_1} = -J_{xy}$ . В процессе поворота осей центробежный момент инерции изменяется непрерывно, следовательно, при некотором положении осей он становится равным нулю. Эти оси и являются главными. Хотя мы и установили, что главные оси можно провести через любую точку сечения, но практический интерес представляют только те из них, которые проходят через центр тяжести сечения — главные центральные оси. В дальнейшем, как правило, для краткости будем называть их просто главными осями, опуская слово «центральные». В общем случае сечения произвольной формы для определения положения главных осей необходимо провести специальное исследование. Здесь ограничимся рассмотрением частных случаев сечений, имеющих по меньшей мере одну ось симметрии.

$$J_{xy} = \int_A xy dA = \int_{A_1} xy dA + \int_{A_2} xy dA,$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — части сечения, расположенные соответственно справа и слева от оси симметрии. Очевидно,

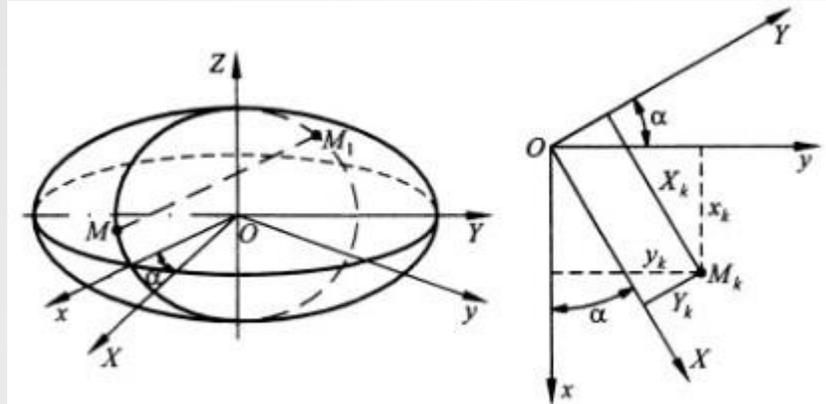
$$\int_{A_1} xy dA = - \int_{A_2} xy dA,$$

Проведем через центр тяжести сечения ось  $Ox$ , перпендикулярную оси симметрии  $Oy$ , и определим центробежный момент инерции  $J$ . Воспользуемся известным из курса математики свойством определенного интеграла (интеграл суммы равен сумме интегралов) и представим  $J$  в виде двух слагаемых: так как, для любой элементарной площадки, расположенной справа от оси симметрии, есть соответствующая слева, для которой произведение координат отличается лишь знаком. Таким образом, центробежный момент инерции относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  оказался равным нулю, т. е. это главные оси. Итак, для нахождения главных осей симметричного сечения достаточно найти положение его центра тяжести. Одной из главных центральных осей является ось симметрии, вторая ось ей перпендикулярна. Конечно, приведенное доказательство остается в силе, если ось, перпендикулярная оси симметрии, проходит и не через центр тяжести сечения, т. е. ось симметрии и любая, ей перпендикулярная, образуют систему главных осей.

## *Свойства главных осей инерции:*

Теорема 1: Если одна из декартовых осей является главной осью инерции, то два центробежных момента содержащих в индексе эту ось равны 0.

(рис.)



Теорема 2: Если однородное тело имеет плоскость симметрии (или неоднородное) - плоскость материальной симметрии, то для любой точки в этой плоскости одна из главных осей перпендикулярна этой плоскости, а две другие лежат в этой плоскости.

Теорема 3: Если однородное тело имеет ось симметрии или неоднородное имеет ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции этого тела.

Теорема 4: Главная центральная ось инерции твердого тела является главной осью инерции для всех своих точек.

## *Передаточные механизмы*

Передаточные механизмы приводов роботов служат связующими звеньями между двигателями и исполнительными органами и предназначены для выполнения следующих функций:

преобразования вида движения (вращательного - в поступательное и наоборот), согласования параметров движения (скорости и крутящего момента), а также осей двигателей и исполнительного органа. В качестве передаточных механизмов используются самые различные виды передач: винтовые, шариковинтовые и роликовинтовые; реечные, зубчатые и червячные; фрикционные, ременные и тросовые; рычажные и цепные; планетарные и волновые.

Конкретное назначение передаточных механизмов при различных сочетаниях типов двигателей и видов перемещений исполнительных звеньев, из которой видно, что в сочетаниях В2 и П1 передаточные механизмы вообще могут отсутствовать, так как двигатели в этих случаях могут непосредственно воздействовать на исполнительные звенья либо сами выполнять их функции. Этот вариант наиболее предпочтителен, хотя не всегда осуществим, поскольку в некоторых случаях по соображениям компоновки, технологичности или удобства обслуживания двигатель не может быть расположен соосно с исполнительным звеном, а потому для согласования осей необходимо применение тех или иных передач, используемых также для согласования скоростей и силовых характеристик. Сочетания В1 и П2 требуют использования передач для преобразования вида движения (поступательного во вращательное и наоборот). В сочетаниях В3 и П3 необходимы передачи с большими передаточными числами, для 10 Основы робототехники чего используют, как правило, различные редукторы - зубчатые, червячные, планетарные или волновые, которые для преобразования вида движения (П3) могут сочетаться с зубчатой реечной или винтовой (шариковинтовой, роликовинтовой) передачами.

Важнейшей характеристикой передаточного механизма является его передаточное отношение, исчисляемое как отношение скоростей движения ведущего звена (вала, штока и т.п.) к ведомому. Выражения для передаточных отношений модулей движения роботов имеют различный вид в зависимости от сочетаний преобразуемых движений: для согласования параметров вращательного движения двигателя во вращательное движение исполнительного звена (ВЗ)

Как следует из приведенных соотношений, при согласовании параметров движения одного вида передаточное отношение является безразмерным ( $i$ ), однако в случае преобразования вида движения (вращательного в поступательное и наоборот) оно становится размерной величиной ( $/$ ). Поскольку в расчетной практике удобнее оперировать с передаточным отношением в виде безразмерного числа, его можно исчислять, используя приведение движений на входе и выходе к одному виду (вращательному или поступательному).

В этом случае, как и при согласовании параметров движения одного вида, говорят о передаточном числе и механизма, являющемся безразмерной величиной.

Помимо передаточного отношения (передаточного числа), для выбора того или иного передаточного механизма наиболее важными оценочными показателями являются мертвый ход, или люфт, в передаче; жесткость, величина КПД, свойства самоторможения или обратимости, габаритные размеры и масса, удобство компоновки, уровень шума при работе, долговечность, сложность, технологичность изготовления и стоимость.

Зубчатые цилиндрические редукторы имеют высокую жесткость и долговечность, технологичны в производстве. Высокие значения КПД позволяют без больших потерь мощности применять специальные методы устранения люфтов. Приемлемый уровень шума достигается достаточно высокой степенью точности изготовления. Недостатком зубчатых передач для применения в механических системах роботов является их высокая инерционность. Зубчатые конические передачи, кроме того, требуют более точной регулировки при сборке и имеют повышенный шум при работе.

Преимуществом планетарных зубчатых передач является их высокая компактность, однако они менее технологичны в производстве, требуют повышенной точности изготовления и сборки.

Червячные редукторы отличаются хорошей жесткостью, меньшей инерционностью, относительно простой конструкцией и возможностью самоотражения, что очень важно для осуществления следящего привода

Недостатком червячных передач является пониженный КПД (до 0,4-0,5 в однозаходных передачах).

Комплексом важных качеств обладают волновые зубчатые передачи, что определило перспективу их широкого применения в роботостроении.

Рассмотрим подробнее некоторые виды передач, сравнительно реже применяемые в общем машиностроении, однако получившие очень широкое распространение в приводах роботов.