Занимательная математика

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 11 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ: РАВНОСИЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ.

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + C = g(x) + C$$

Равносильность уравнений.

Ребята, мы подходим к концу изучению курса алгебры и начала анализа за 11 класс. Мы научились решать огромное количество уравнений, неравенств и различных систем уравнений. Нам осталось подвести некоторый итог и дать уточнения.

Для начала, вернемся к уравнениям с одной переменой. В курсе 11 класса мы уже рассматривали показательные и логарифмические уравнения. Теперь, мы постараемся рассмотреть уравнения в самом общем виде.

Равносильность уравнений.

Определение. Два уравнения с одной переменой f(x)=g(x) и h(x)=q(x) называются равносильными, если множества решений этих уравнений совпадают.

Два уравнения равносильны, когда у них одинаковые корни или когда у них нет решений.

Давайте приведем пример равносильных уравнений.

Уравнения $x^2-9=0$ $(x+3)(3^x-27)=0$льны, т.к. имеют одинаковые корни x=±3.

Уравнения и так же равносильны так как не имеют вещественных корней. $x^2+9=0$ $3^x+27=0$

Равносильность уравнений.

Определение. Если каждый корень уравнения f(x)=g(x) (1) является в то же время корнем уравнения h(x)=q(x) (2), то уравнение (2) является следствием уравнения (1).

Например, уравнение x-3=3, имеет корень x=6, а уравнение $(x-3)^2 = 9$ет два корня x=6 и x=0, один из корней совпадает, тогда уравнение $(x-3)^2 = 9$ следствием уравнения x-3=3.

Два уравнения являются равносильными, тогда и только тогда когда каждое из уравнений является следствием другого уравнения.

Формально, **схему решения любого уравнения можно описать так**. Исходное уравнение преобразуют в более простое уравнение, получившиеся уравнение преобразуют еще в более простое уравнение, и так, пока не получится совсем простое уравнение, которое легко решить. Но стоит заметить уравнения нельзя преобразовывать как вздумается, для каждого класса уравнений есть свои правила и требования.

Равносильность уравнений.

Так же возникает вопрос, совпадают ли корни полученного в конце уравнения с корнями исходного уравнения? Если все преобразования уравнений были равносильными, то корни совпадут, что значит, правильное решение последнего уравнения нам даст верные корни исходного уравнения. Если же мы переходили к уравнениям следствиям, то мы могли потерять корни уравнения, что не дает нам утвердительно ответить, с полной точностью, на поставленный выше вопрос.

Чтобы ответить более определенно, найденные корни последнего полученного уравнения, подставляют в исходное уравнение, если есть корни, которые не удовлетворяют решению, то их называют *посторонними*, и соответственно в ответ не включают.

Равносильность уравнений.

Решение уравнений обычно осуществляется в три этапа:

1. **Технический.** На данном этапе осуществляются преобразования уравнений, по схеме описанной выше. И находят корни последнего, самого простого, уравнения.

2. **Анализ решения.** Проводится проверка, все ли преобразования были равносильными.

3. **Проверка.** Если анализ выявил, что не которые преобразования привели к уравнениям следствиям, то проводится обязательная проверка всех полученных корней, прямой подстановкой в исходное уравнение.

Равносильность уравнений.

И так какие же преобразования являются равносильными?

Теоремы о равносильности уравнений.

Все теоремы которые мы рассмотрим ниже, уже встречались нам начиная с самых ранних классов.

Теорема 1. Если какой либо член уравнения, перенести из одной части в другую, поменяв при этом знак на противоположный, то получится уравнение равносильное исходному.

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну и туже нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Показательное уравнение

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} (a > 0, a \neq 1)$$

равносильно уравнению f(x)=g(x).

Равносильность уравнений.

Вспомним, что такое область определения уравнений, так как при выборе корней уравнения, она играют почти ключевую роль.

Определение. Областью определения уравнения $f(x)=g(x)$ или областью допустимых значений переменной x, называют множество тех значений переменной, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 4. Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ умножить на одно и тоже выражение $h(x)$, которое:

а) имеет смысл всюду в области определения уравнения $f(x)=g(x)$.

б) нигде в этой области не обращается в 0, то получится уравнение $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ равносильное исходному.

Следствие. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и тоже отличное от нуля число, то получится уравнение равносильное данному.

Равносильность уравнений.

Теорема 5. Если обе части уравнения f(x)=g(x) неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n, получится уравнение равносильное данному:

$$f(x)^n = g(x)^n$$

Теорема 6. Если f(x)>0 и g(x)>0, то логарифмическое уравнение

$$log_a f(x) = log_a g(x) \text{ (где } a > 0, a \neq 1)$$

равносильно уравнению f(x)=g(x).

Равносильность уравнений.

Преобразование данного уравнения в уравнение следствие.

Уравнения следствия могут возникнуть, если при использовании трех последних теорем выше не учитывать ограничения указанные в данных теоремах.

1. Уравнение x-3=3, имеет один корень x=6. Умножив обе части уравнения на выражения вида (x-a), где a – любое число, получим уравнение (x-3)·(x-a)=3·(x-a), мы получаем дополнительный корень x=a, который является посторонним для исходного уравнения. Причина его появления, в том, что мы нарушили условие теоремы 4, мы умножили на выражение которое может обратиться в нуль, нарушение пункта б теоремы 4.

2. Возведем обе части уравнения x-3=3 в квадрат. У нас получилось уравнение , решением которого являются x=6 и x=0, опять получился пост $(x-3)^2=9$ корень. В этот раз мы нарушили условие теоремы 5, возвели в четную степень, а там сказано, что можно возводить уравнение только в нечетную.

Равносильность уравнений.

3. Рассмотрим уравнение $\ln(2x-4) = \ln(3x-5)$м избавиться от знака логарифма, и решить простое линейное уравнение 2x-4=3x-5, решение которого является x=1. Но данный корень является посторонним, при решении данного уравнения мы нарушили условие теоремы 6, о том, что под знаком логарифма должны находиться выражения строго большие нуля.

Для правильного решения уравнения, всегда следует проверять или отыскивать область определения уравнения, для последнего примера, проверка сводится к системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x-4>0 \\ 3x-5>0 \end{cases}$$

Решение данной системы x>2, то есть только числа большие двух могли бы быть решением исходного логарифмического уравнения.

Равносильность уравнений.

В примере выше, мы искусственно расширили область определения исходного уравнения, что делать нельзя, давайте приведем примеры причин, когда область определения расширяется:

1. Освобождение, при решении уравнения, от знаменателей, содержащих переменную величину.

2. Освобождение в процессе решения, от знаков корней четной степени.

3. Освобождение в процессе решения, от знаков логарифма.

Обязательно нужно проводить проверку корней:

а) Произошло расширение области определения уравнения.

б) Осуществляется возведение обеих частей в одну и туже четную степень.

в) Выполняется умножение, обеих частей уравнения, на одно и то же выражение с переменной.

Вообще стоит заметить, проверку корней стоит производить всегда, для всех корней уравнения.

Равносильность уравнений.

Пример. Решить уравнение:

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-6}=5$$

Решение. **Технический этап решения уравнения.** Проведем различные преобразования уравнения.

$$\sqrt{2x+5}=5-\sqrt{5x-6}$$

$$(\sqrt{5x-6})^2=(5-\sqrt{2x+5})^2$$

$$5x-6=25-10\sqrt{2x+5}+(2x+5)$$

$$10\sqrt{2x+5}=36-3x$$

$$(10\sqrt{2x+5})^2=(36-3x)^2$$

$$100(2x+5)=1296-216x+9x^2$$

$$9x^2-416x+796=0$$

$$x_1=2, x_2=44\frac{2}{9}$$

Равносильность уравнений.

Анализ решения. При решении уравнения, дважды возводили в четную степень, такое преобразование не является равносильным. Так же произошло расширение области определения, т.к. в исходном уравнении встречались квадратные корни которые накладывают свое ограничение. Значит полученное квадратное уравнение, в конце, является уравнением следствием. Проверка корней обязательна.

Проверка корней. Подставим каждый из полученных корней в исходное уравнение.

При $x_1 = 2$, $\sqrt{2\cdot 2+5}+\sqrt{5\cdot 2-6}=\sqrt{9}+\sqrt{4}=3+2=5$ - верно.

При $x_2 = 44\frac{2}{9}$ $\sqrt{2\cdot 44\frac{2}{9}+5+\sqrt{5\cdot 44\frac{2}{9}-6}}$ больше 5, т.к. уже первое подкоренное ... 5, а мы еще к нему прибавляем положительное число, значит это постороннее решение.

Ответ: x=2.

Равносильность уравнений.

Проверка корней иногда может быть довольно таки сложной вычислительной операцией. Как в примере выше, полная проверка второго корня заняла бы не мало времени. В случаях сложных вычислений, стоит попробовать найти обходной путь.

При проверке, можно использовать приближенные значения полученных корней, или подстановкой в более простые уравнения полученные при преобразовании, но надо быть полностью уверенным в равносильности преобразований.

Чаще всего, но не всегда, достаточно проверить ОДЗ заданного уравнения.

Равносильность уравнений.

Пример. Решить уравнение:

$$\ln(x+4)+\ln(2x+3)=\ln(1-2x)$$

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$\ln(x+4)+\ln(2x+3)=\ln(1-2x)$$

$$\ln(x+4)(2x+3)=\ln(1-2x)$$

$$(x+4)(2x+3)=(1-2x)$$

$$2x^2+13x+11=0$$

$$x_1=-1, x_2=-5.5$$

Область определения была расширена, значит проверку следует произвести. Т.к. мы только расширили область определения, то достаточно найти область определения исходного уравнения:

$$\begin{cases} x+4>0 \\ 2x+3>0 \\ 1-2x>0 \end{cases}$$

Первый корень x=-1 – удовлетворяет данной системе, а вот корень x=-5.5 не удовлетворяет уже первому неравенству данной системы, тогда у нас всего один корень.

Ответ: x=-1.

Равносильность уравнений.

Проверка по области определения исходного уравнения не всегда достаточна, все зависит от преобразований, которые мы проводили, поэтому более надежным способом являет непосредственная подстановка корней уравнения.

При преобразовании уравнений, так же может происходить потеря корней. Когда такая ситуация может возникнуть?

1. Деление обеих частей уравнения на одно и тоже выражение $h(x)$ (кроме случая, когда уверены что $h(x)$ не обращается нуль при любых x).

2. Сужение области определения уравнения в процессе решения.

Бороться с первой причиной довольно таки просто, нужно привыкнуть переходить к уравнению вида $h(x)\cdot(f(x)-g(x))$, или вообще стараться не делить на выражения содержащие x.

Со вторым пунктом чуть сложнее.

Равносильность уравнений.

Рассмотрим уравнение. $\lg x^2 = 4$ и его:

$$x^2 = 10^4; x = \pm\sqrt{10^4} = \pm 100.$$

Используя определение логарифма

Второй способ решения. Воспользуемся одним из свойств логарифма: $2\lg x = 4;\ \lg x = 2;\ x = 100$.о заметить, что мы потеряли один из корней. На самом деле мы сузили область определения исходного уравнения. Для уравнения , $x \neq 0$, но для уравн $\lg x^2 = 4$, $x>0$. Получается $2\lg x = 4$ бросили огромный участок возможных решений, то есть сузили область определения. На самом деле верная формула при решении данного уравнения была бы:

$$2\lg|x| = 4$$

При решении уравнений и их преобразовании, **нужно быть абсолютно уверенным в правильности применения той или иной формулы!**

Равносильность уравнений.

Задачи для самостоятельного решения.

Решить следующие уравнения:

1. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{2x-3}=2$

2. $\ln(x+2)+\ln(x+4)=\ln(2-3x)$

3. $\lg x^4=8$