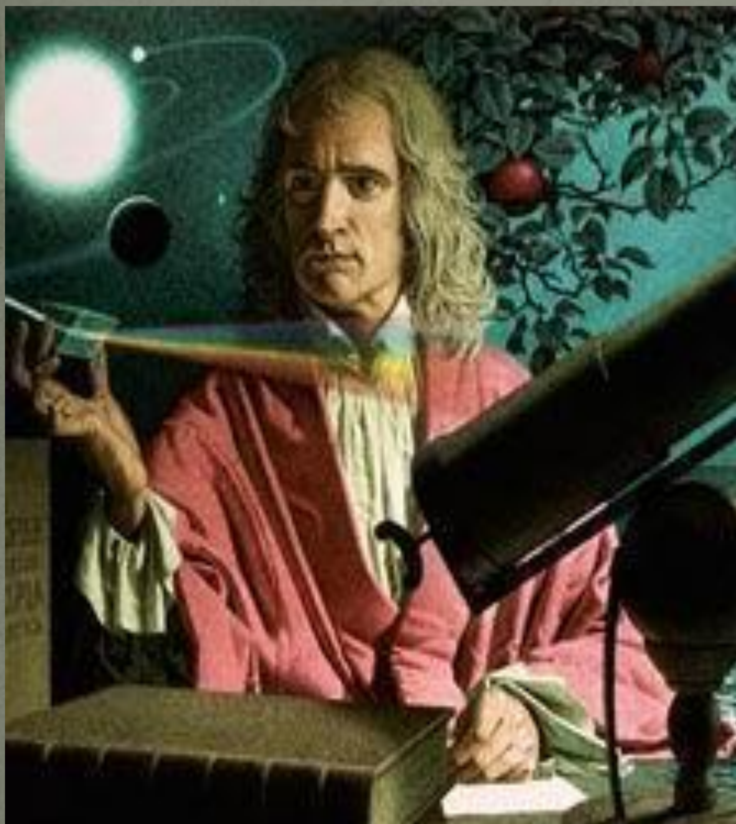
Применение производной при исследовании функции.

Разработала преподаватель математики высшей квалификационной категории

Бердского политехнического колледжа

Кулинич Татьяна Андреевна

Исаак Ньютон (1643 – 1727)



- «Когда величина является максимальной или минимальной, в этот момент она не течет ни вперед, ни

Промежутки возрастания и убывания функции

Применение производной при исследовании функции

Достаточные признаки возрастания, убывания функции

- 1. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I, то функция f(x) возрастает на I.
- 2. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I, то функция f(x) убывает на I.

Алгоритм определения промежутков возрастания и убывания функции

- 1. Найдите область определения функции.
- 2. Найдите производную функции.
- 3. Найдите точки, в которых производная равна 0.
- 4. Отметьте на числовой прямой область определения функции и точки, в которых производная равна 0 или не существует (критические точки)
- 5. Расставьте знаки производной в каждом полученном промежутке.
- 6. Отметьте стрелками возрастание, убывание функции.
- 7. Запишите ответ.

Образцы решения

- Определите промежутки возрастания, убывания функции: $f(x) = 3x - x^3$
- $D(f) = (-\infty;\infty)$
- $f'(x) = (3x - x^3)' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x)(1 + x)$
- $f'(x) = 0$; $3(1 - x)(1 + x) = 0$; $x = 1$, $x = -1$
- 

- $f'(2) < 0$
- $f'(0) > 0$
- $f'(-2) < 0$
- Ответ: $f(x)$ возрастает на промежутке $[-1; 1]$; убывает на промежутках $(-\infty;-1]$; $[1; \infty)$

2. $f(x) = \dfrac{2-3x}{x-4}$

а) $x - 4 \neq 0 \qquad x \neq 4$

б) $f'(x) = \left(\dfrac{2-3x}{x-4}\right)' =$

$$= \frac{(2-3x)'(x-4) - (x-4)'(2-3x)}{(x-4)^2} =$$

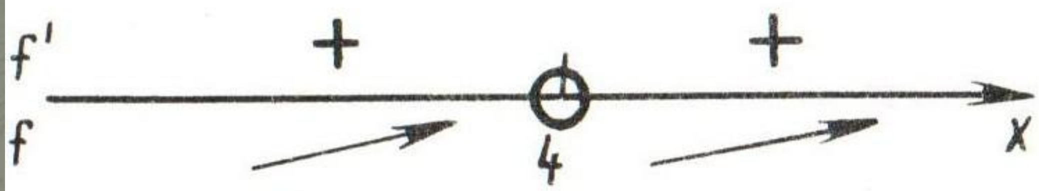
$$= \frac{-3(x-4) - 1(2-3x)}{(x-4)^2} = \frac{-3x+12-2+3x}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{10}{(x-4)^2}$$

в) $f'(x) = \dfrac{10}{(x-4)^2} > 0$, т.к. $10 > 0$

и $(x-4)^2 > 0$ при $x \neq 4$

г)



Ответ: $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; 4)$; $(4; \infty)$.

4.189. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = \ln x + \frac{1}{x}$.

4.190. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{2x}{e^x}$.

4.191. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = 2xe^x$.

4.192. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = 0{,}5x + \sin x$.

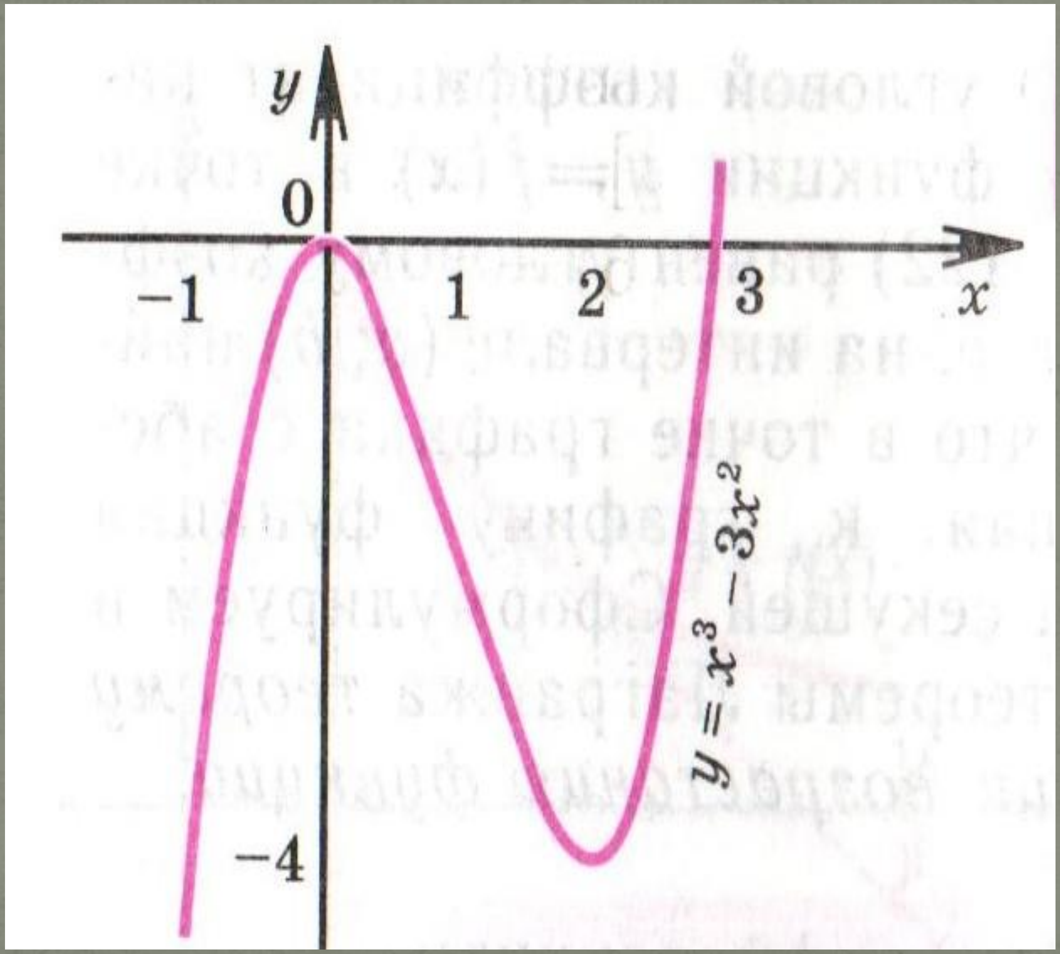
4.185. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = -x^4 + 4x^2 - 3$.

4.186. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = e^x - x$.

4.187. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = \cos x + 2x$.

4.188. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = x + \frac{1}{x}$.

Экстремумы функции



Максимум функции

- Точка x_0 называется точкой максимума функции f(x), если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Или

если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума.

Минимум функции

- Точка x_0 называется точкой минимума функции f(x), если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) › f(x_0)$.

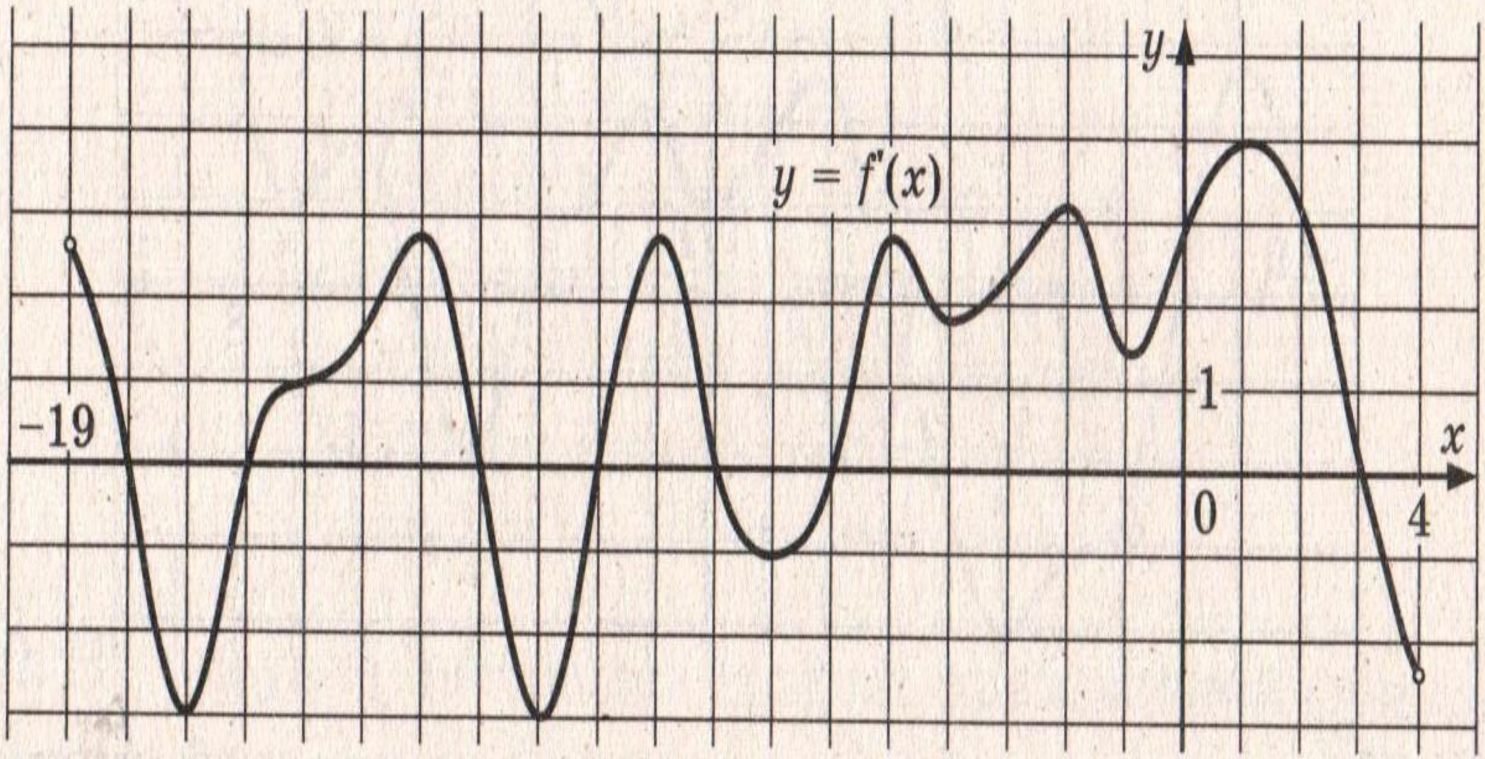
Или

если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума.

Точки максимума и минимума функции называются

Экстремумами функции

1745. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-19;\ 4)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-17;\ -1]$.

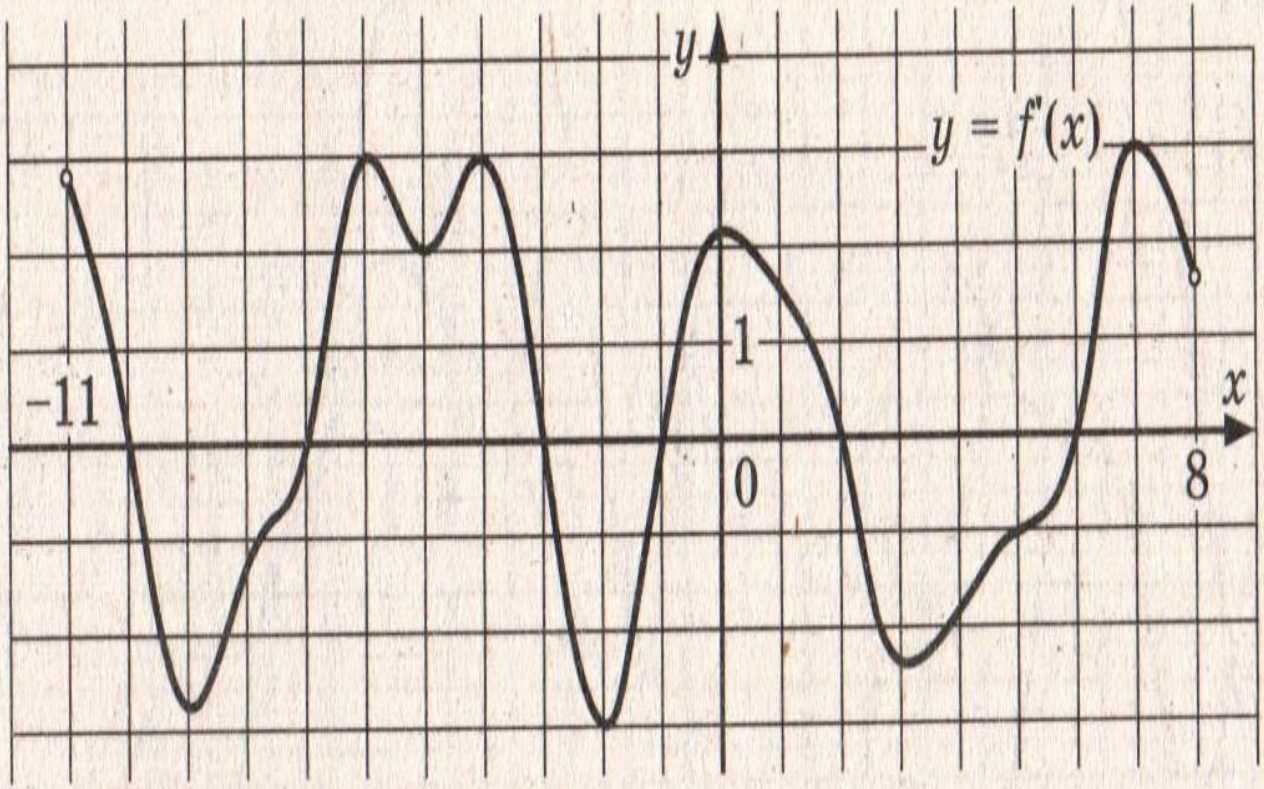


Ответ 3

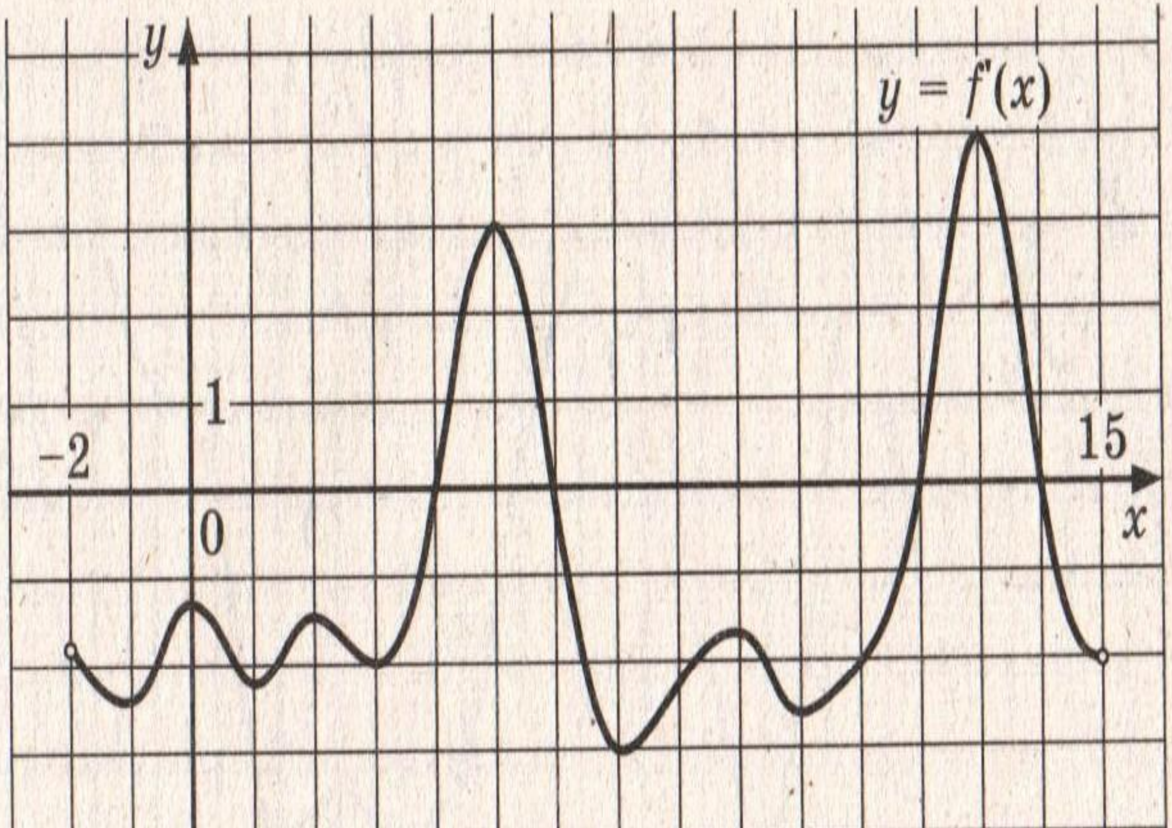
Алгоритм нахождения точек экстремума функции

- 1. Найдите область определения функции.
- 2. Найдите производную функции.
- 3. Найдите точки, в которых производная равна 0.
- 4. Отметьте на числовой прямой область определения функции и точки, в которых производная равна 0 или не существует (критические точки)
- 5. Расставьте знаки производной в каждом полученном промежутке.
- 6. Отметьте стрелками возрастание, убывание функции.
- 7.Отметить максимумы и минимумы функции.
- 8. Запишите ответ.

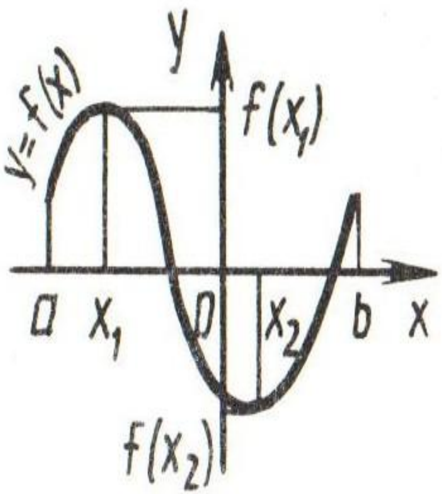
1748. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-8; 7]$.



1747. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 15)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[3; 13]$.

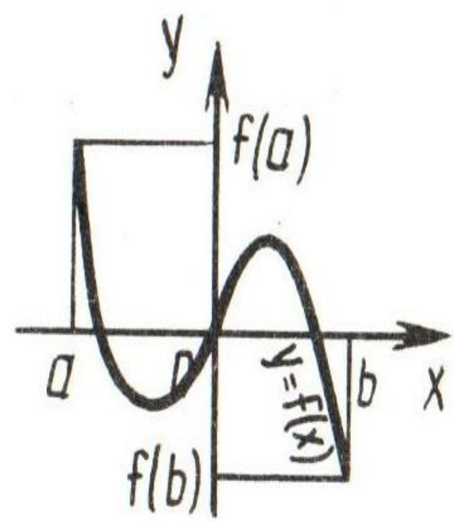


Наибольшее и наименьшее значение функции



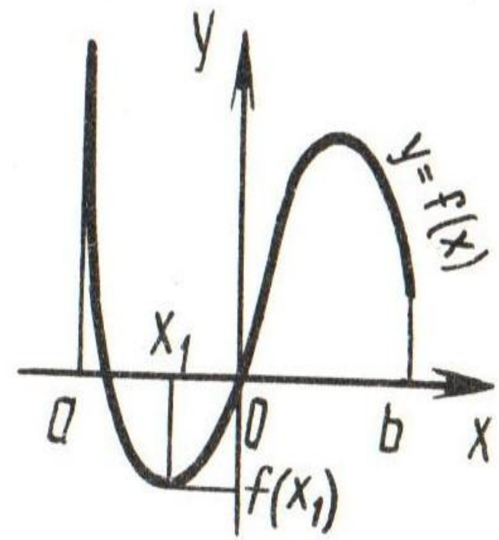
$\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_1)$

$\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_2)$



$\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(a)$

$\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(b)$



$\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(a)$

$\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_1)$

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функций на отрезке

- *1. Найдите производную функции.*
- *2. Найдите критические точки функции.*
- *3.Найдите значения функции на концах отрезка [a;b] и в критических точках, принадлежащих этому отрезку.*
- *4. Выберите наибольшее и наименьшее значение и запишите ответ.*

Образцы решения

Найдите наибольшее и наименьшее значения

1. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 \quad [-2; -0{,}5]$

а) $f'(x) = (2x^3 + 3x^2 - 1)' = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$

б) $f'(x) = 0;\ 6x(x+1) = 0;\ x = 0;\ x = -1$

$-1 \in [-2; -0{,}5];\ 0 \notin [-2; -0{,}5]$

в) $f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 1 = -5$

$f(-0{,}5) = 2(-0{,}5)^3 + 3(-0{,}5)^2 - 1 = -0{,}5$

$f(-1) = 0$

$\max f(x) = f(-1) = 0$

$[-2; -0{,}5]$

$\min f(x) = f(-2) = -5$

$[-2; -0{,}5]$

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

- 1. $f(x) = 1 + 8x – x^2$ $[2; 5]$
- 2. $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$ $[1; 4]$
- 3. $f(x) = 5 - 8x – x^2$ $[-6; -3]$

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке [4; 5].

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3$ на отрезке [2; 3].

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ на отрезке [−1; 2].

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 2$ на отрезке [−2; 2].

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = 2x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке [−2; 1].

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = -x^3 + 3x^2 + 4$ на отрезке [−3; 3].

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = 2x^3 - 9x^2 - 3$ на отрезке [−1; 4].

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

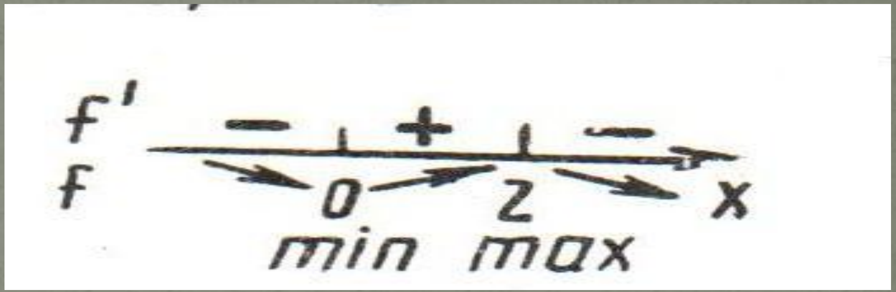
$y = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ на отрезке [−4; 4].

Исследование функции и построение графиков

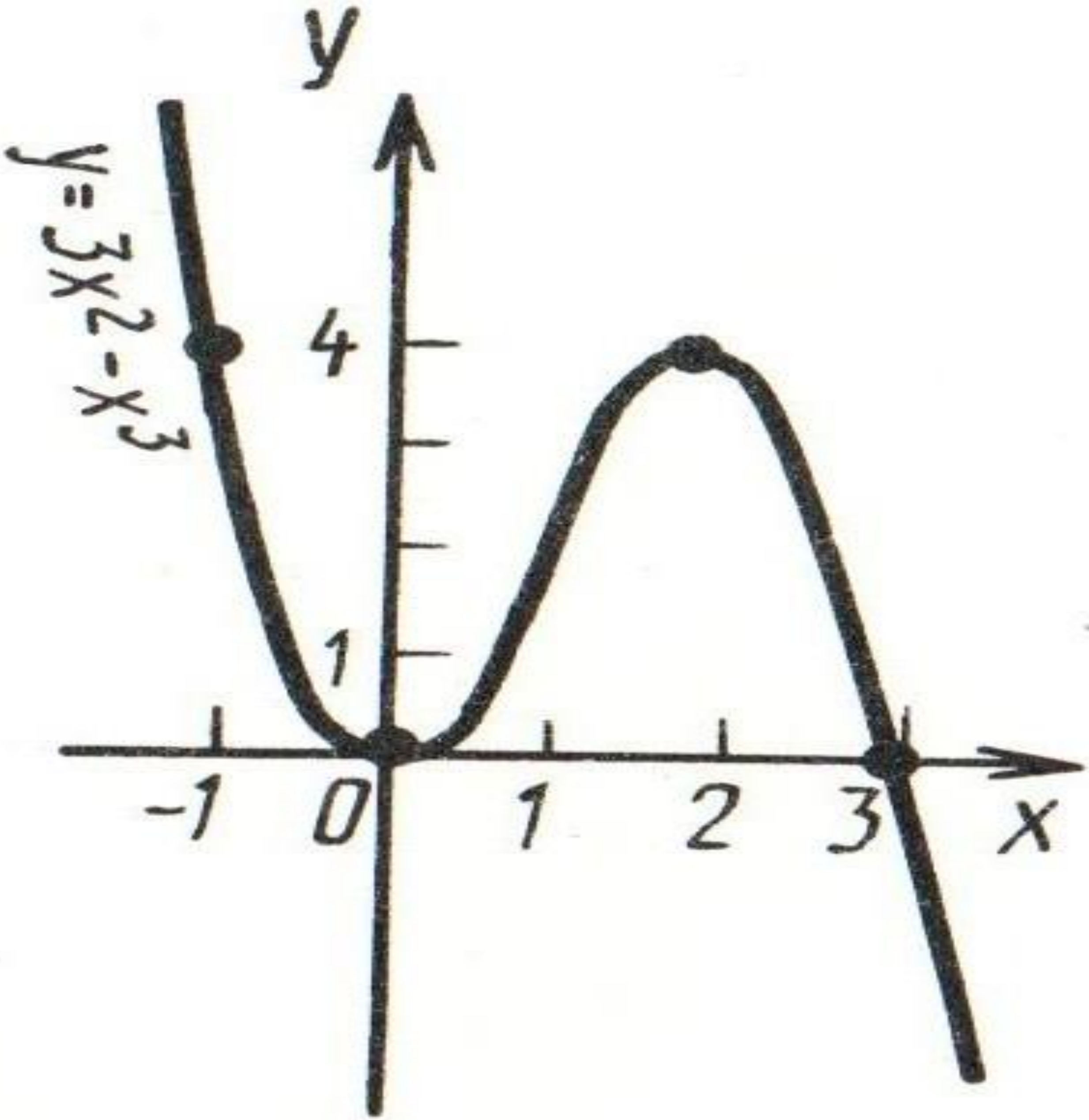
- ***Схема исследования функции:***
- 1. Найдите область определения функции.
- 2. Найдите производную функции.
- 3. Найдите критические точки функции.
- 4. Определите промежутки возрастания, убывания функции.
- 5.Отметьте точки экстремума функции.
- 6. Найдите значение функции в критических точках.
- 7. Заполните таблицу.
- 8. Постройте график функции.
- 9. Дополнительные точки.

Образец решения

- Исследуйте функцию и постройте график:
- $f(x) = 3x^2 - x^3$
- 1. $D(f) = (-\infty; \infty)$
- 2. $f'(x) = (3x^2 - x^3)' = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$
- 3. $f'(x) = 0$; $3x(2 - x) = 0$, $x = 0$, $x = 2$
- 4. $f'(3) < 0$
- $f'(1) > 0$
- $f'(3) < 0$
- $f(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$
- $f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2^3 = 4$



x	(-∞;0)	0	(0;2)	2	(2;∞)
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$
		min		max	


y
y=3x²-x³
4
1
-1
0
1
2
3
x