

# Действительный анализ

*Основной источник : Смагин В.В.  
Действительный анализ. Учебное пособие.  
2014 год.*

( см. [https://vk.com/fd\\_an](https://vk.com/fd_an) )

## *Дополнительная литература*

- 1. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
- 2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
- 3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

*( см. [https://vk.com/fd\\_an](https://vk.com/fd_an) и [https://vk.com/func\\_an](https://vk.com/func_an) )*

## Глава 2.

# Измеримые множества

# **12. Основные определения и свойства измеримых множеств**

Множество  $A \subset [a, b]$  называется *измеримым*, если измерима (следовательно, суммируема) характеристическая функция этого множества

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \in [a, b] \setminus A. \end{cases}$$

При этом число  $I\chi_A = \mu A$  называется *мерой множества*  $A$ .

## ПРИМЕРЫ

1.  $A = [a, b] \Rightarrow \chi_A(t) \equiv 1 \Rightarrow \mu A = I\chi_A = b - a$ .
2.  $A$  – ММН на  $[a, b]$ . Тогда  $\chi_A(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0$ . Следовательно,  $\chi_A(t)$  суммируема на  $[a, b]$  и  $\mu A = I\chi_A = 0$ .

Верно и обратное: если  $\mu A = 0$ , то  $A$  – ММН (доказать самостоятельно).

3.  $A$  — множество полной меры отрезка  $[a, b]$ .

Тогда  $\chi_A(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 1$ . Следовательно,  $\chi_A(t)$  суммируема на  $[a, b]$  и  $\mu A = I\chi_A = b - a = \mu[a, b]$ .

4. Очевидно, что всякий промежуток  $\langle \alpha, \beta \rangle \subset [a, b]$  является измеримым множеством и его мера равна его длине, то есть  $\mu \langle \alpha, \beta \rangle = \beta - \alpha$ .

ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ИЗМЕРИМЫХ НА  $[a, b]$   
МНОЖЕСТВ  $A$  И  $B$ .

1. Если  $A \subset B$ , то  $\mu A \leq \mu B$ .

*Доказательство.* В этом случае верно неравенство  $\chi_A(t) \leq \chi_B(t)$  (см. таблицу). По свойству интеграла имеем:  $\mu A = I\chi_A \leq I\chi_B = \mu B$ .

2. Если  $A \cap B = \emptyset$ , то множество  $A \cup B$  измеримо и  $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$ .

*Доказательство* следует из равенства  $\chi_{A \cup B}(t) = \chi_A(t) + \chi_B(t)$  (см. таблицу) и соответствующего свойства интеграла:

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= I\chi_{A \cup B} = I(\chi_A + \chi_B) = I\chi_A + I\chi_B = \\ &= \mu A + \mu B. \end{aligned}$$

	$t \in A \setminus B$	$t \in B \setminus A$	$t \in A \cap B$	$t \notin A \cup B$
$\chi_A(t)$	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
$\chi_B(t)$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
$\chi_{A \setminus B}(t)$	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
$\chi_{A \cap B}(t)$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
$\chi_{A \cup B}(t)$	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>



3. Если  $B \subset A$ , то множество  $A \setminus B$  измеримо и  $\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$ .

Доказательство следует из равенства  $\chi_{A \setminus B}(t) = \chi_A(t) - \chi_B(t)$ .

4. Множество  $A \cup B$  измеримо и  $\mu(A \cup B) \leq \mu A + \mu B$ .

Доказательство следует из равенства  $\chi_{A \cup B}(t) = \max\{\chi_A(t), \chi_B(t)\}$  и оценки  $\max\{\chi_A(t), \chi_B(t)\} \leq \chi_A(t) + \chi_B(t)$ .

5. Множество  $A \cap B$  измеримо.

Доказательство следует из равенства  $\chi_{A \cap B}(t) = \min\{\chi_A(t), \chi_B(t)\}$ .

6. Множество  $A \setminus B$  измеримо.

Доказательство следует из равенства  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ .

ТЕОРЕМА 10. Пусть  $\{A_n\}$  — последовательность измеримых множеств, таких, что  $A_n \subset [a, b]$  и  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ . Тогда множество  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  измеримо и  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$ .

*Доказательство.* Пусть  $x_n(t) = \chi_{A_n}(t)$ . Последовательность  $x_n(t) = \chi_{A_n}(t)$  при всех  $t \in [a, b]$  возрастает и ограничена сверху единицей, следовательно, при всех  $t \in [a, b]$  существует конечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$  и на  $[a, b]$  определена функция

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t).$$

Покажем, что  $x(t) = \chi_A(t)$ :

Покажем, что  $x(t) = \chi_A(t)$ :

$$\begin{aligned}x(t) = 1 &\Leftrightarrow (\exists n_0 : \forall n \geq n_0)[x_n(t) = 1] \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (\exists n_0 : \forall n \geq n_0)[t \in A_n] \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \Leftrightarrow \chi_A(t) = 1.\end{aligned}$$

Итак,  $x(t) = \chi_A(t)$  (с учетом того, что эти функции могут принимать только два значения, 1 и 0).

Выполнены все три условия теоремы Лебега о предельном переходе. Следовательно,  $x \in L$  и  $Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n$ , то есть множество  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  измеримо и

$$\mu A = I\chi_A = Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n = \lim_{n \rightarrow \infty} I\chi_{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть  $\{A_n\}$  — последовательность измеримых множеств, таких, что  $A_n \subset [a, b]$  и  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ . Тогда множество  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  измеримо и  $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$ .

*Доказательство.* Обозначим множество  $[a, b] \setminus A = CA$  (дополнение множества  $A$  до отрезка  $[a, b]$ ). Пусть  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  и рассмотрим множество

$$CA = C \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} CA_n.$$

Множества  $CA_n$  измеримы и  $CA_1 \subset CA_2 \subset \dots \subset CA_n \subset \dots$ . Следовательно, по теореме 10, множество  $CA$  измеримо и

$$\mu(CA) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(CA_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu([a, b] \setminus A_n) = (b-a) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n.$$

Но тогда измеримо и множество  $A = C(CA) = [a, b] \setminus CA$ , причем  $\mu(CA) = (b-a) - \mu A$ . Следовательно,  $\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$ .

Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 11. Пусть  $\{A_n\}$  — последовательность измеримых множеств, таких, что  $A_n \subset [a, b]$  и  $A_i \cap A_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ). Тогда множество  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  измеримо и  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$ .

*Доказательство.* Для  $n \in \mathbb{N}$  определим измеримые множества  $D_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$  :  
 $D_1 = A_1, D_2 = D_1 \cup A_2, D_3 = D_2 \cup A_3, D_4 = D_3 \cup A_4, \dots$

Заметим, что  $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots$

Тогда по теореме 10 множество  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$  измеримо и  $\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu D_n$ .

По свойству 2  $\mu D_n = \sum_{k=1}^n \mu A_k$ .

Следовательно,

$$\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu A_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k.$$

Теорема доказана.

Установленное в теореме 11 свойство называют *счетной аддитивностью меры*.

ТЕОРЕМА 12. Пусть  $\{A_n\}$  – последовательность измеримых множеств,  $A_n \subset [a, b]$ . Тогда множество  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  измеримо и  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$ .

*Доказательство.* Для  $n \in \mathbb{N}$  определим измеримые множества  $D_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$  :  
 $D_1 = A_1, D_2 = D_1 \cup A_2, D_3 = D_2 \cup A_3, D_4 = D_3 \cup A_4, \dots$

Заметим, что  $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots$

Тогда по теореме 10 множество

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$  измеримо и  $\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu D_n$ .

По свойству 4  $\mu D_n \leq \sum_{k=1}^n \mu A_k$ .

Следовательно,

$$\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu D_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu A_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k.$$

Теорема доказана.



СЛЕДСТВИЕ. Пусть  $\{A_n\}$  – последовательность измеримых множеств,  $A_n \subset [a, b]$ . Тогда множество  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  измеримо.

*Доказательство.* Обозначим множество  $[a, b] \setminus A = CA$  (дополнение множества  $A$  до отрезка  $[a, b]$ ). В таком случае, множество

$$CA = C \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} CA_n$$

измеримо. Но тогда измеримо и множество  $A = C(CA) = [a, b] \setminus CA$ .

Следствие доказано.