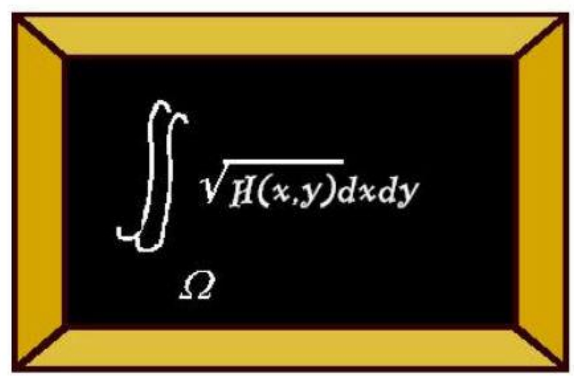
Первообразная



Первообразная

Функция F(x)называется первообразной для функции f(x)на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Операцию, обратную дифференцированию называют интегрированием.

$$\textit{Например}:$$

$$1)\left(x^2\right)' = 2x \qquad \textit{значит для } f(x) = 2x,$$

$$\textit{есть первообразная } F(x) = x^2$$

$$2)(\sin x)' = \cos x$$

$$\textit{значит } F(x) = \sin x - \textit{первообразная}$$

$$\textit{для } f(x) = \cos x$$

$$3)\ \textit{Доказать, что } F(x) = 2x^3 + 4x - \textit{первообразная}$$

$$\textit{для } f(x) = 6x^2 + 4$$

$$F'(x) = \left(2x^3 + 4x\right)' = 6x^2 + 4 = f(x)$$

Основное свойство первообразных

Если F(x)– первообразная для функции f(x) на некотором промежутке, то функция F(x)+C также является первообразной функции f(x) на этом промежутке, где C – произвольная постоянная.

$$\text{Например}: \qquad \left(x^2-2\right)' = 2x$$

$$\left(x^2\right)' = 2x \qquad \left(x^2+0,5\right)' = 2x$$

$$\left(x^2+3\right)' = 2x \qquad \text{значит для } f(x) = 2x$$

$$\text{первообразная} \quad F(x) = x^2 + C$$

Таблица первообразных

f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgx+C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx+C$
$\text{к} - \text{пост}$	$\text{к}x+C$	0	C
1	$x+C$	e^x	e^x+C
$\sin x$	$-\cos x+C$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
$\cos x$	$\sin x+C$	$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+C$

Например:

1) $f(x) = x^3, \quad F(x) = \frac{x^4}{4} + C$

2) $f(x) = x^6, \quad F(x) = \frac{x^7}{7} + C$

3) $f(x) = 5, \quad F(x) = 5x + C$

4) $f(x) = \cos x, \quad F(x) = \sin x + C$

5) *Найти первообразную график которой проходит через точку* $A(2;1)$ *для* $f(x) = \frac{1}{x^3}$

$$f(x) = x^{-3}$$

$$1 = -\frac{1}{2 \cdot 2^2} + C$$

$$F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

значит, $C = 1\frac{1}{8}$

$$F(x) = -\frac{1}{2x^2} + 1\frac{1}{8}$$

Три правила нахождения первообразных

Если F(x) есть первообразная для f(x), а G(x) – первообразная для g(x), то F(x) + G(x) есть первообразная для f(x) + g(x).

$$1)\ f(x) = 2 + x,\quad F(x) = 2x + \frac{x^2}{2} + C$$

$$2)\ f(x) = \sin x - 3,$$

$$F(x) = -\cos x - 3x + C$$

Если F(x) есть первообразная для f(x), а k –

постоянная, то функция kF(x) есть первообразная

для kf(x).

Постоянную выносят за знак первообразной

Например :

$$1)\ f(x)=5x,\ \ F(x)=5\cdot\frac{x^2}{2}+C$$

$$2)\ f(x)=-3\cos x,\quad F(x)=-3\sin x+C$$

$$3)\ f(x)=12x^3+8x,\quad F(x)=12\cdot\frac{x^4}{4}+8\cdot\frac{x^2}{2}+C=$$

$$=3x^4+4x^2+C$$

Если F(x) есть первообразная для f(x), а k и b – постоянные, причем k ≠ 0, то функция $\frac{1}{k}F(kx + b)$

Например :

есть первообразная для f(kx + b).

$$1)\ f(x) = \sin 2x, \qquad F(x) = \frac{1}{2}(-\cos 2x) + C$$

$$2)\ f(x) = \cos\frac{x}{3}, \qquad F(x) = 3\sin\frac{x}{3} + C$$

$$3)\ f(x) = \left(4 - 5x\right)^{7}, \quad F(x) = -\frac{1}{5}\frac{\left(4-5x\right)^{8}}{8} + C = -\frac{\left(4-5x\right)^{8}}{40} + C$$

$$4)\ f(x) = \frac{1}{\sin^{2}(3x-1)}, \qquad F(x) = -\frac{1}{3}ctg(3x-1) + C$$