Функции.

Область определения и множество значений; график функции; построение графиков функций, заданных различными способами

Определение функции

Функция – это зависимость переменной y от переменной x, при которой <u>каждому</u> значению переменной x соответствует <u>единственное</u> значение переменной y.

x – независимая переменная, аргумент функ-
ции, абсцисса точки;

y – зависимая переменная, значение функци
ордината точки.

Если зависимость переменной y от переменной x является функцией, то коротко это записывают так:

$$y = f(x)$$

Пример.

$y = 2x + 3$ или $f(x) = 2x + 3$

Если $x = 5$, то $f(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 10 + 3 = 13$

Если $f(x) = 0$, то $2x + 3 = 0$

$$2x = -3$$

$$x = -1{,}5$$

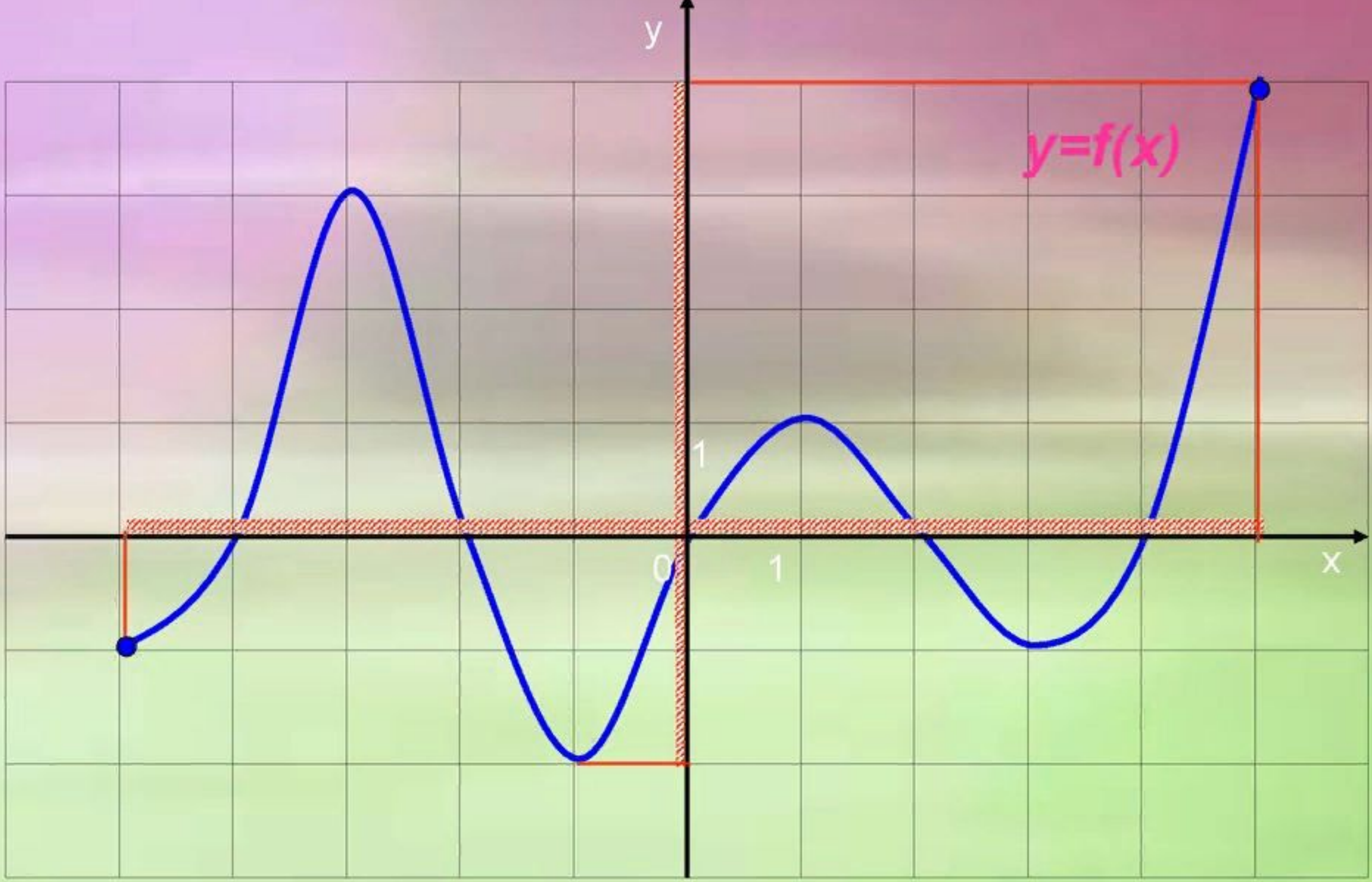
Область определения функции – все значения независимой переменной x.

Обозначение: $D(f)$

Область значений функции – все значения зависимой переменной y.

Обозначение: $E(f)$

Если функция $y = f(x)$ задана формулой и ее область определения не указана, то считают, что область определения функции состоит из всех значений х, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.



y
y=f(x)
1
0
1
x

Пример. Найти область определения функции

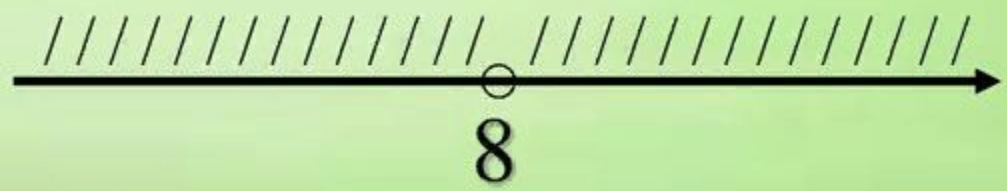
1) $f(x) = 2x + 3$ $\quad D(f) = R$ *или* $D(f) = (-\infty; +\infty)$

2) $f(x) = x^2 + \dfrac{x}{3}$ $\quad D(f) = R$ *или* $D(f) = (-\infty; +\infty)$

3) $f(x) = \dfrac{5x + 2}{x - 8}$

$$x - 8 \neq 0$$

$$x \neq 8$$



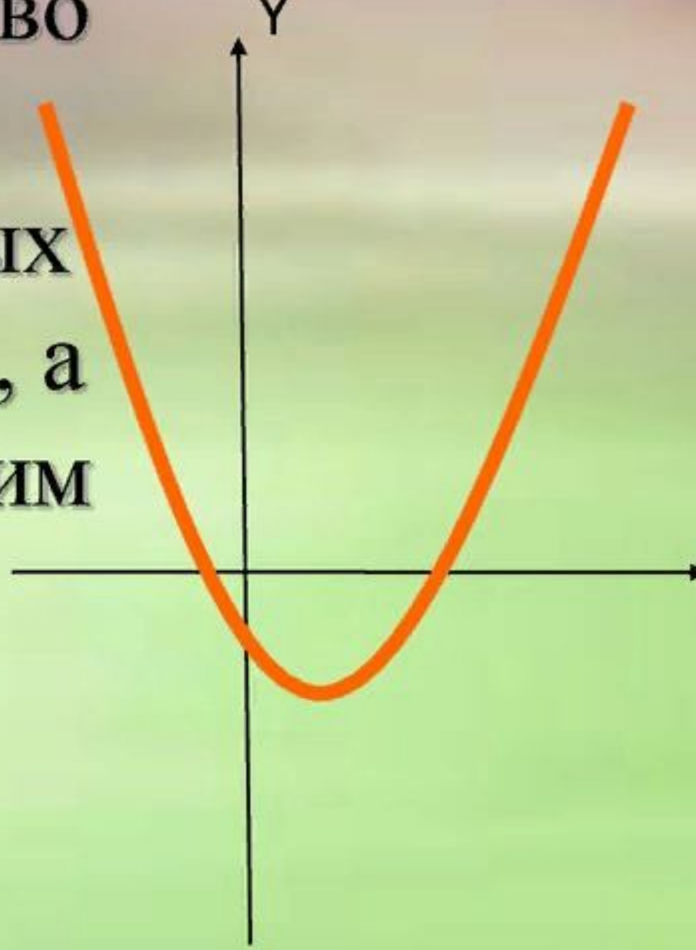
$$D(f) = (-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$$

УЧЕНИК

- Стр 16 рис 8, 9
- Стр 14 рис 13, 14
- Стр 22 рис 15, 16
- Стр 26 №42
- Стр 27 №46
- Стр 27 №47

График функции

График функции - множество точек на координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты - соответствующим значениям функции.



Способы задания функции

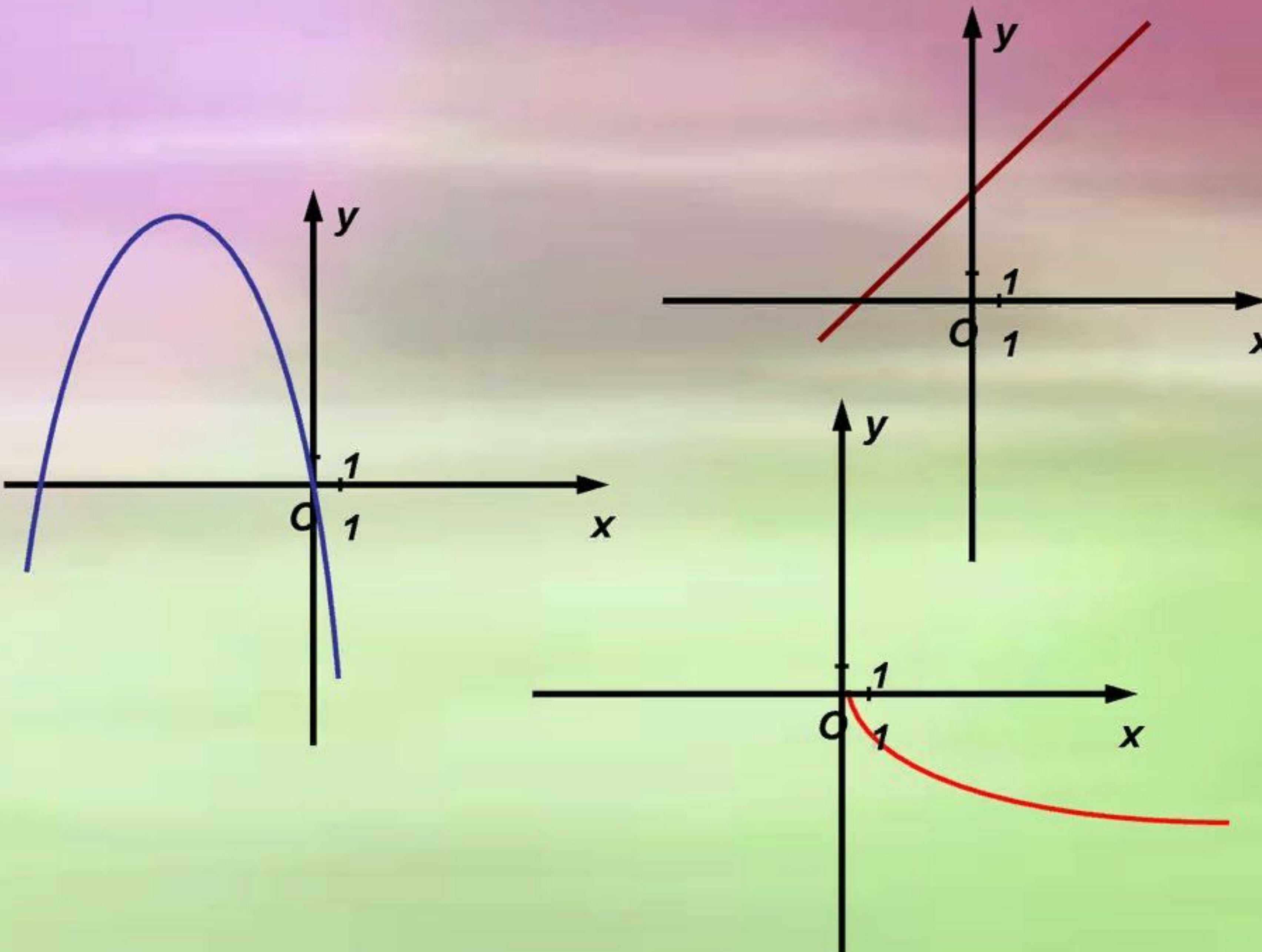
Табличный способ заключается в задани
аблицы отдельных значений аргумента и соот
етствующих им значений функции. Применя
тся в том случае, когда область определени
функции является конечным множеством.

X	-3	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	0	1	4

Аналитический способ заключается
становлении связи между аргументом
рункцией с помощью формул.

Например, $y = 2x + 1$ $y = 2x^2$ $y = \frac{1}{4}x + 8$ и
.д.

Графический способ задания функции н
сегда дает возможность точно определит
исленные значения аргумента. Однако о
меет большое преимущество перед други
пособами - наглядность. В технике и физик
асто пользуются графическим способо
адания функции, причем график бывае
динственно доступным для этого способом


y
1
O
1
x
y
1
O
1
x
y
1
O
1
x

Словесная формулировка - функция y = f
задана на множестве всех неотрицательн
чисел с помощью следующего прави
каждому числу x ≥ 0 ставится в соответств
первый знак после запятой в десятичной запи
числа x.

Задание 1. Функция задана таблично. Укажи
ее область определения и множество значен
постройте ее график.

Аргумент *x*	**-4**	**-1**	**-2**	**0**	**3**	**5**	**7**
Функция $y = f(x)$	**0**	**1**	**4**	**5**	**-2**	**4**	**6**

Задание 2. Функция задана аналитически $V = \frac{1}{3}S$

Выразите каждую переменную через две другие.

Задание 3. Функция задана графически. Найди

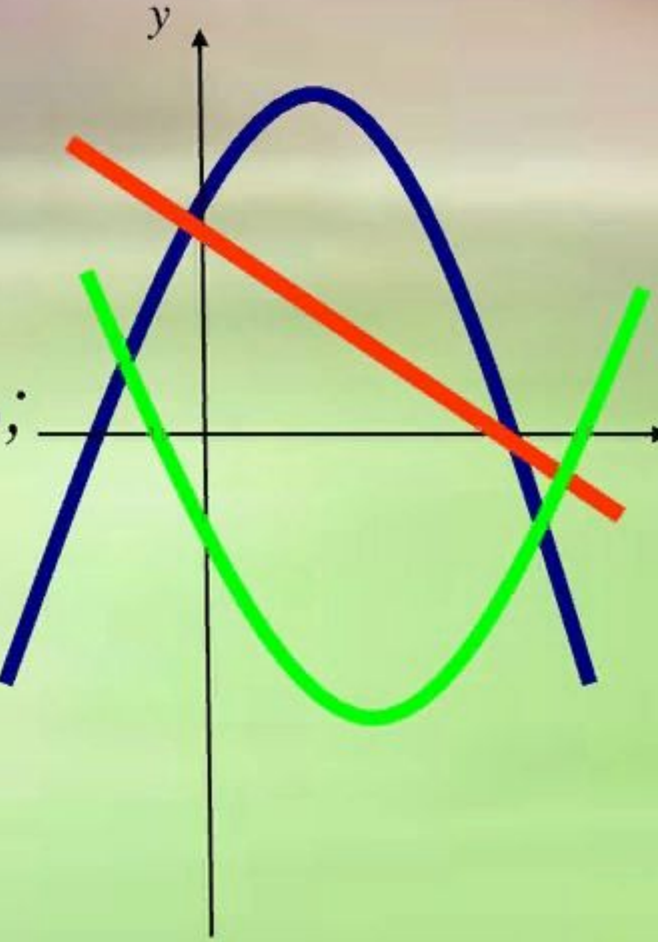
е область определения функции и област

начений функции.

Виды функций

Существует несколько основ-ных видов функций:

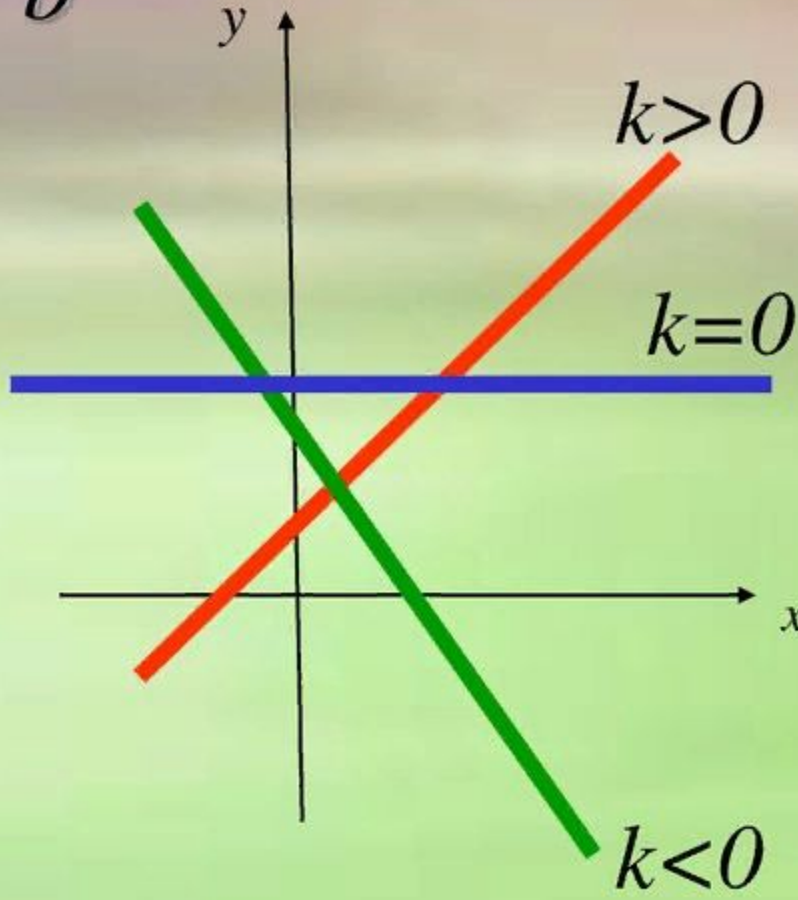
- *линейная функция;*
- *прямая пропорциональность;*
- *обратная пропорциональность;*
- *квадратичная функция;*
- *кубическая функция;*
- *функция корня;*
- *функция модуля.*



Линейная функция

функция вида $y = kx + b$

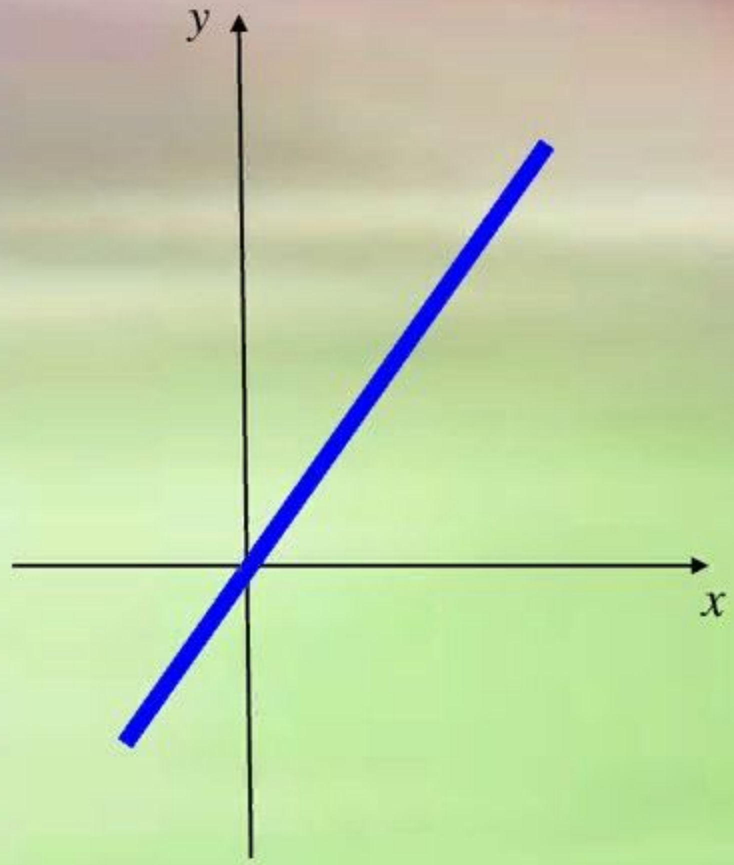
1. $D(f) = R$;
2. $E(f) = R$;
3. графиком функции является прямая



Прямая пропорциональность

функция вида $y = kx$

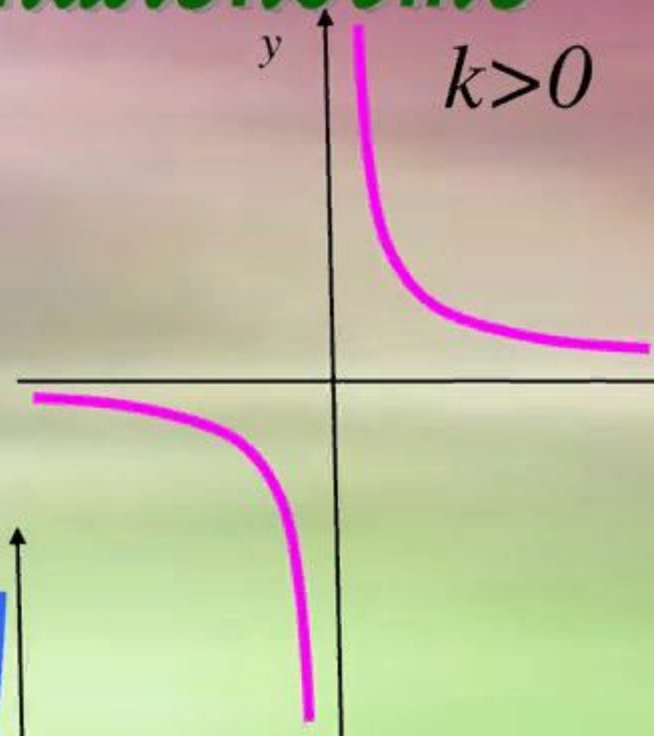
1. $D(f) = R$;
2. $E(f) = R$;
3. графиком функции является прямая, проходящая через начало координат.

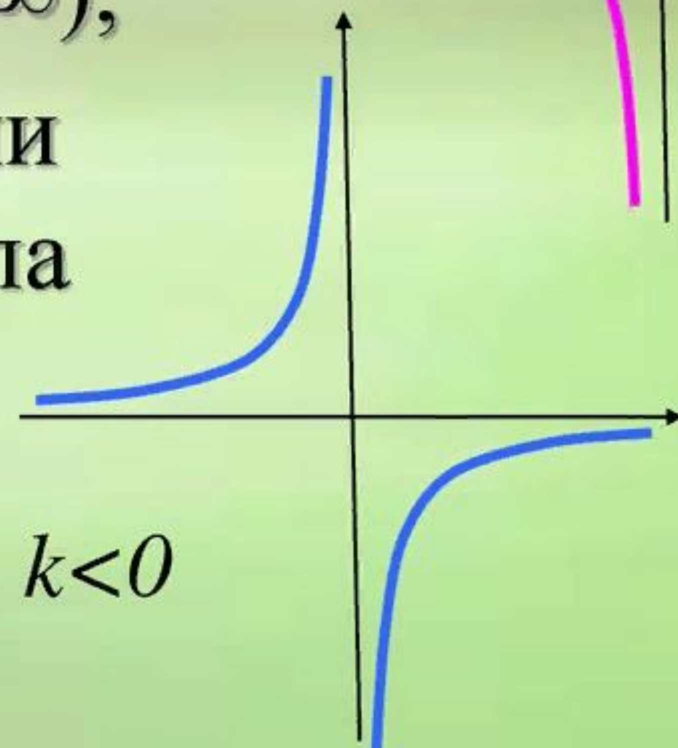


Обратная пропорциональность

функция вида $y = \dfrac{k}{x}$;

1. $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$
2. $E(f) = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$;
3. графиком функции является гипербола





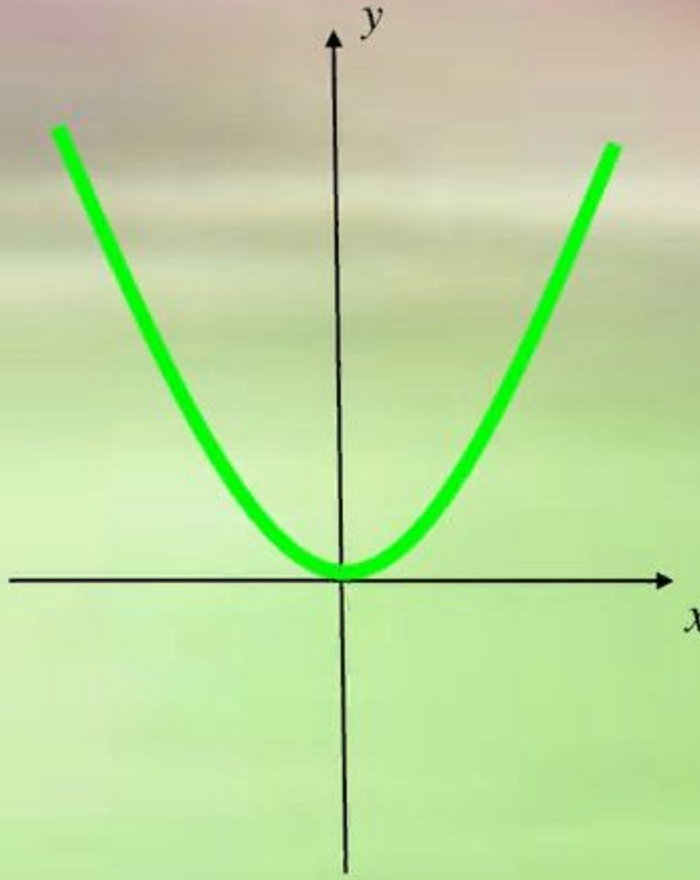
Квадратичная функция

функция вида $y = x^2$;

$1. D(f) = R$;

$2. E(f) = [0;\infty)$;

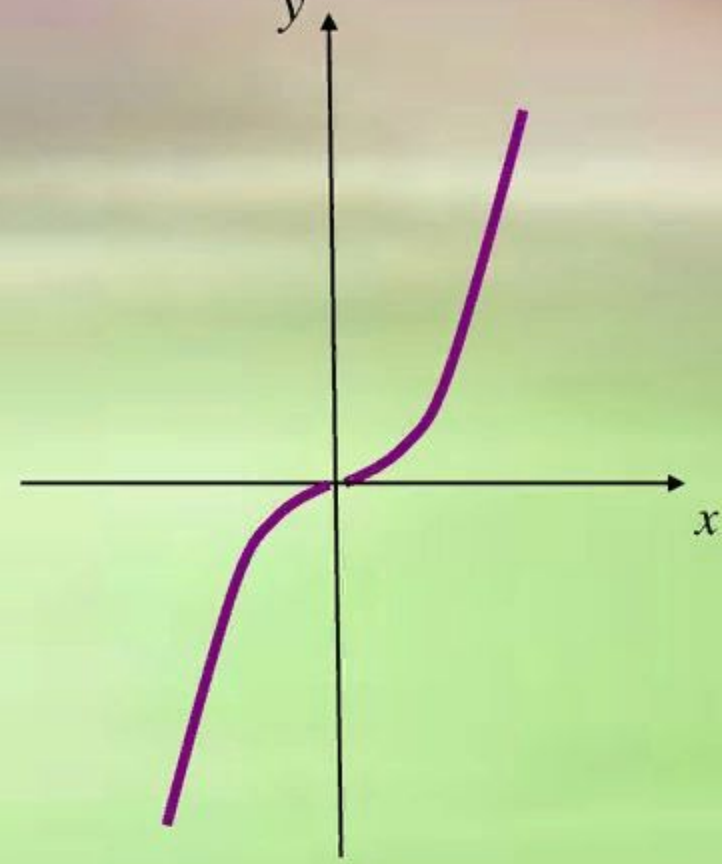
3. графиком функции является парабола



Кубическая функция

функция вида $y = x^3$;

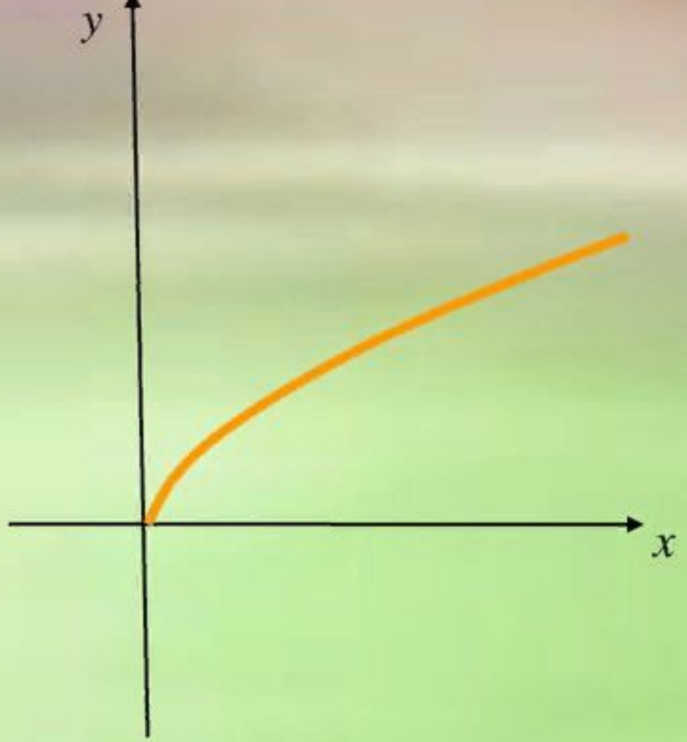
1. $D(f) = R$;
2. $E(f) = R$;
3. графиком функции является кубическая парабола.



Функция корня

функция вида $y = \sqrt{x}$;

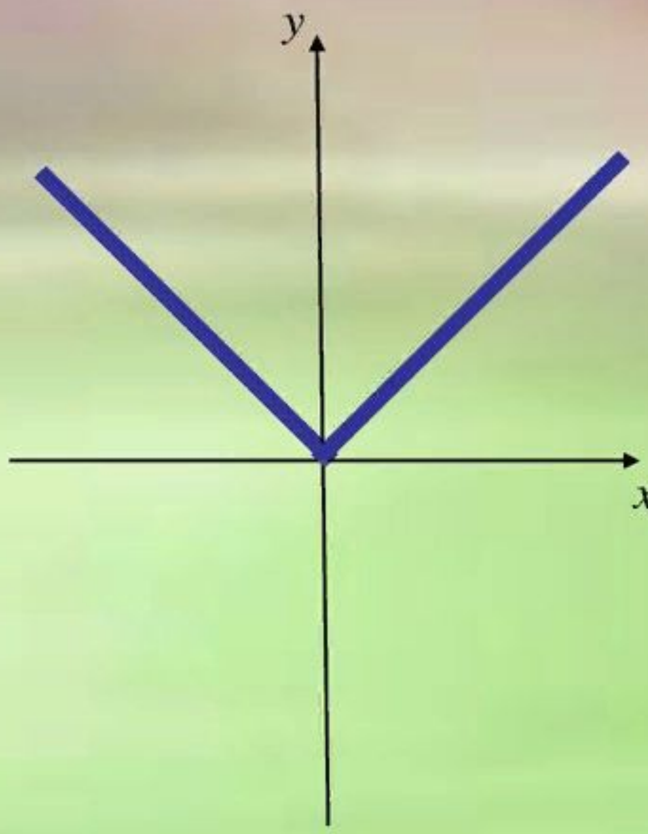
1. $D(f) = [0;\infty)$;
2. $E(f) = [0;\infty)$;
3. графиком функции является ветвь параболы.



Функция модуля

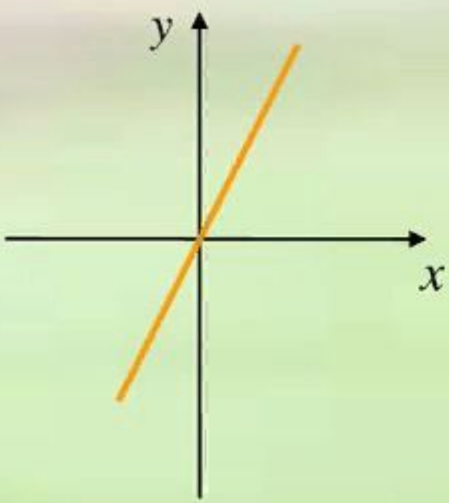
функция вида $y = |x|$;

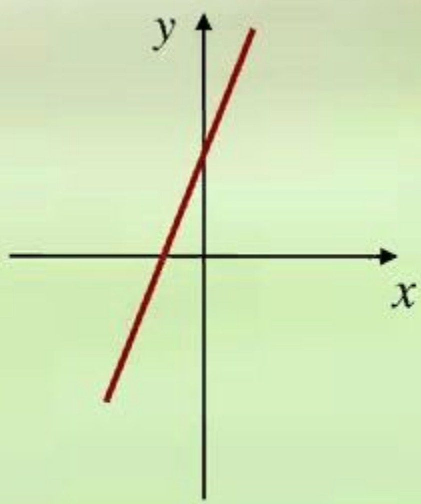
1. $D(f) = R$;
2. $E(f) = [0;\infty)$;
3. график функции на промежутке $[0;\infty)$ совпадает с графиком функции $y = x$, а на промежутке $(-\infty;0]$ – с графиком функции $y = -x$

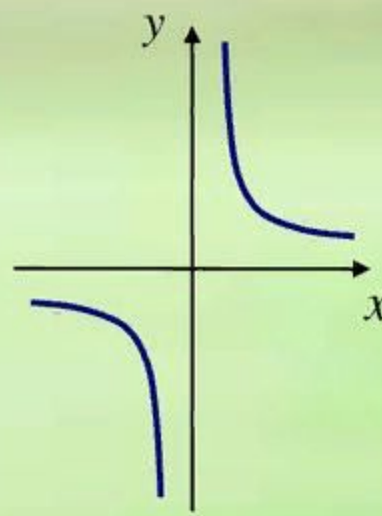


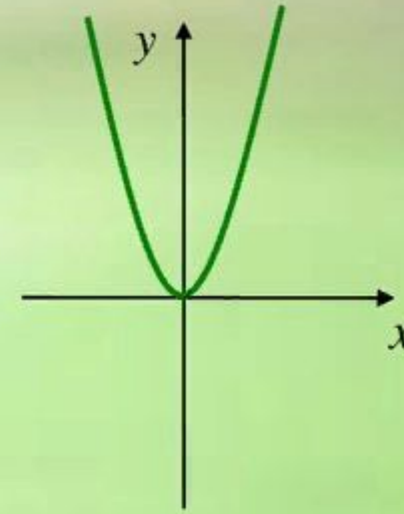
1. Каждый график соотнесите с соответствующей ему формулой:

$y = \dfrac{k}{x}$ $\qquad y = 2x \qquad y = x^2 \qquad y = 2x + 2$



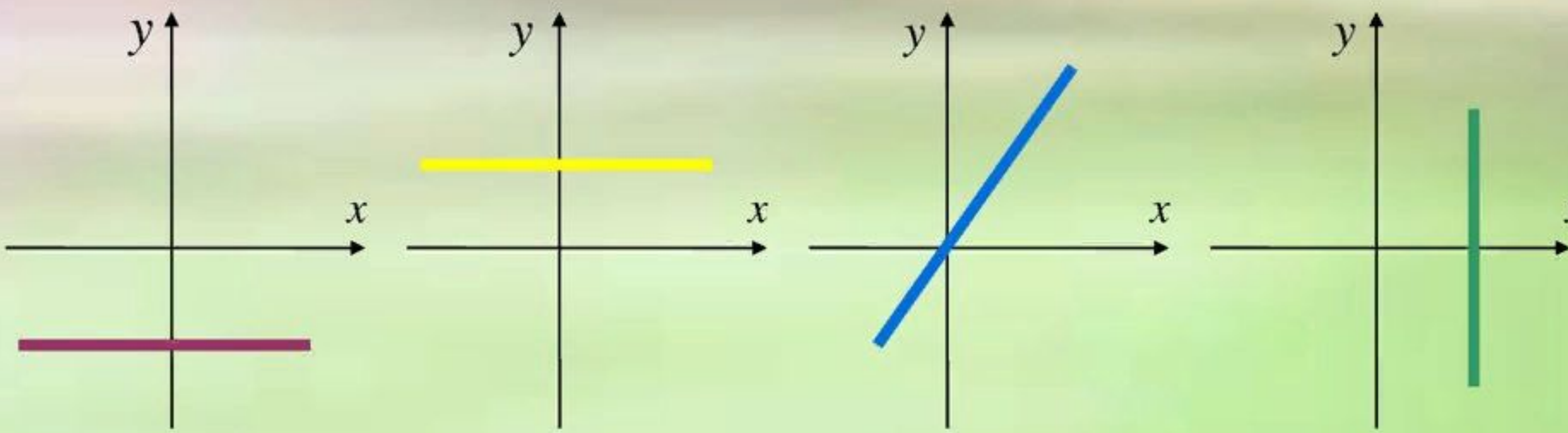






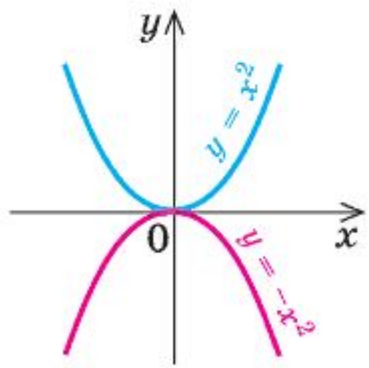
2. Каждую прямую соотнесите с её уравнением:

$y = x$ $x = 2$ $y = 2$ $y = -2$

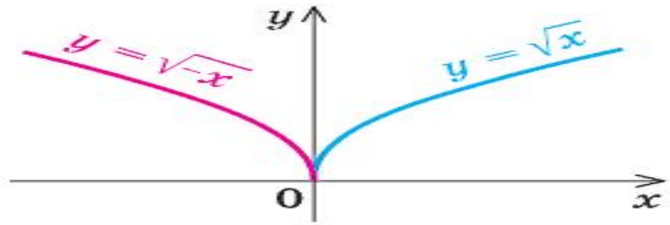
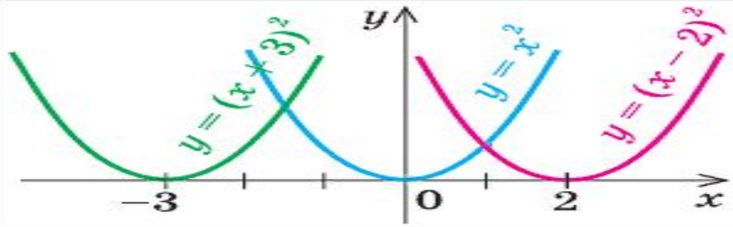
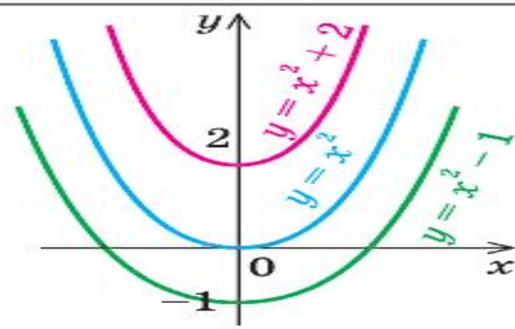
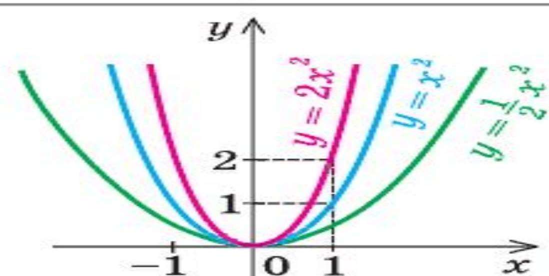
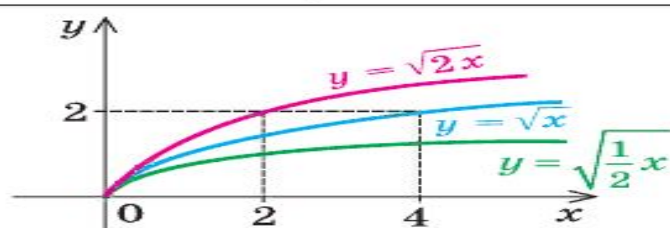


ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

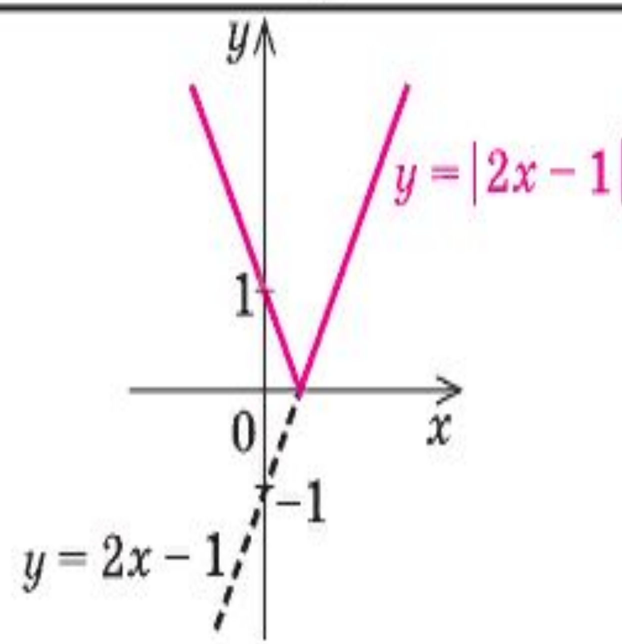
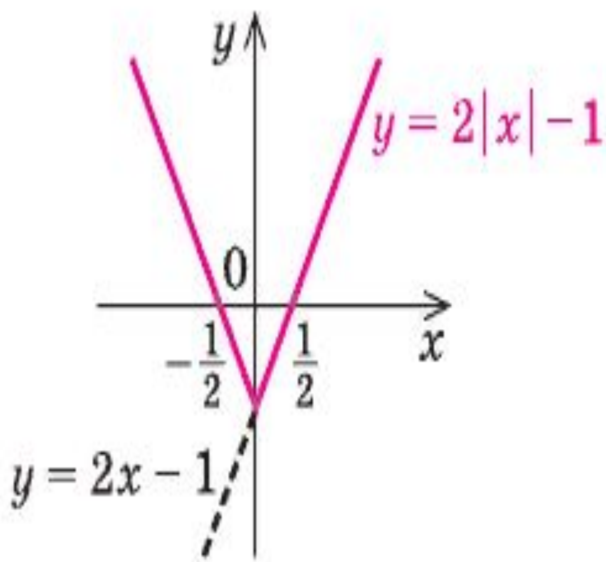
Таблица 6

Преобразование графика функции $y = f(x)$			
№	Формула зависимости	Пример	Преобразование
1	2	3	4
1	$y = -f(x)$		Симметрия относительно оси Ox

Продолжение табл. 6

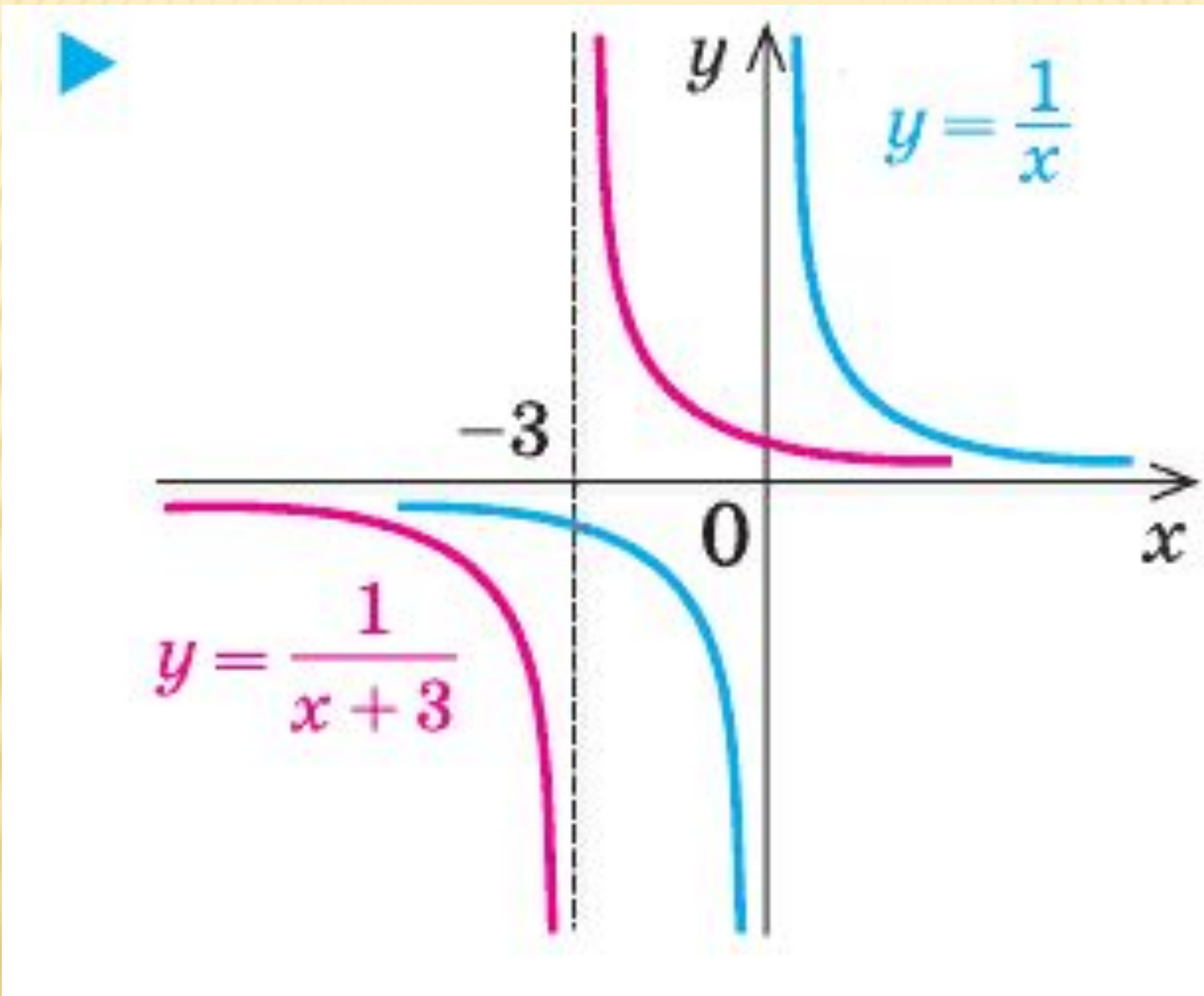
1	2	3	4
2	$y = f(-x)$		Симметрия относительно оси Oy
3	$y = f(x - a)$		Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $\boldsymbol{a}$ единиц
4	$y = f(x) + c$		Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на $\boldsymbol{c}$ единиц
5	$y = kf(x)$ $(k > 0)$		Растяжение или сжатие графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy (при $k > 1$ растяжение, при $0 < k < 1$ — сжатие)
6	$y = f(\alpha x)$ $(\alpha > 0)$		Растяжение или сжатие графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox (при $\alpha > 1$ — сжатие, при $0 < \alpha < 1$ — растяжение)

Продолжение табл. 6

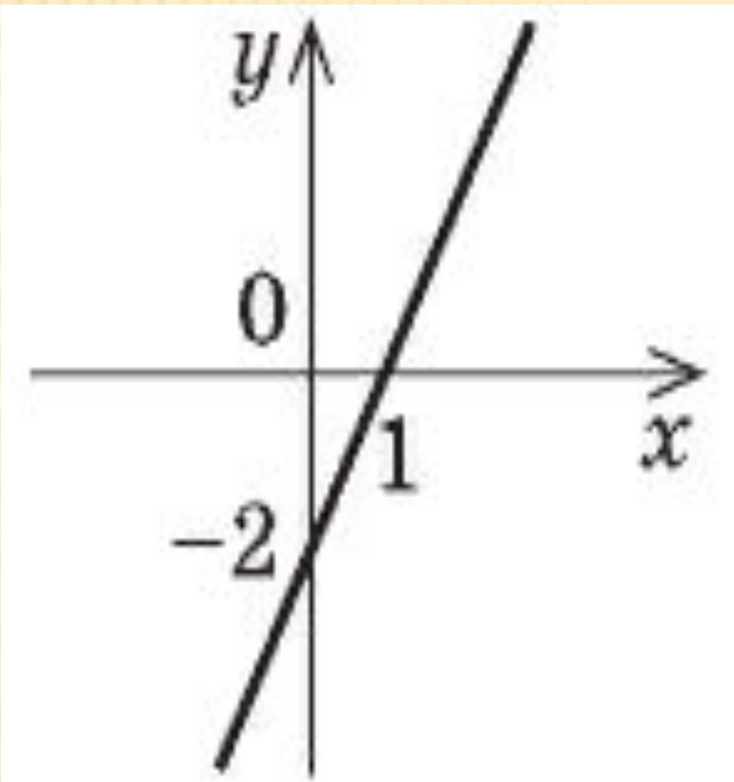
1	2	3	4
7	$y = \lvert f(x) \rvert$		Выше оси Ox (и на самой оси) график функции $y = f(x)$ — без изменений, ниже оси Ox — симметрия относительно оси Ox
8	$y = f(\lvert x \rvert)$		Справа от оси Oy (и на самой оси) график функции $y = f(x)$ — без изменений, и эта же часть графика — симметрия относительно оси Oy

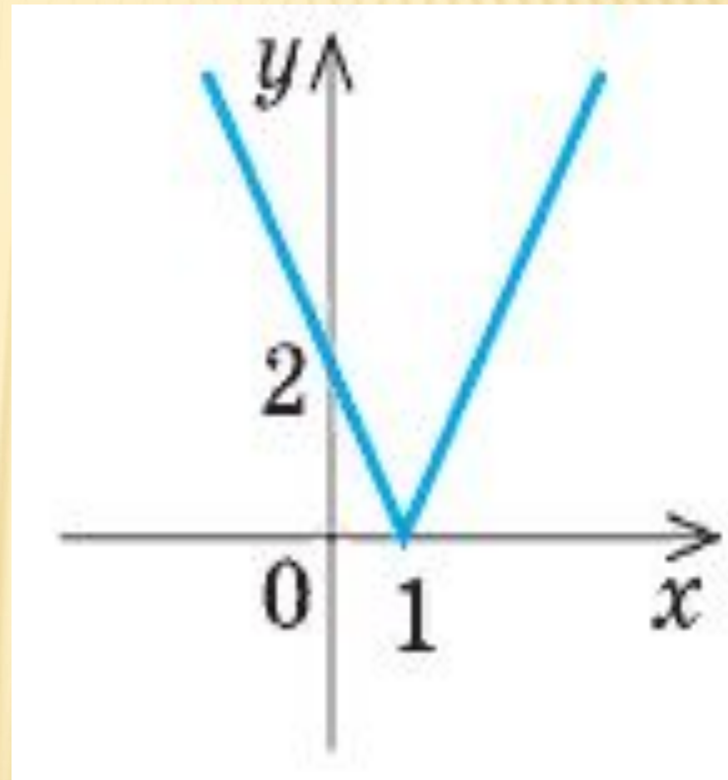
ПОСТРОЙТЕ ГРАФИК ФУН

$y = \dfrac{1}{x+3}$

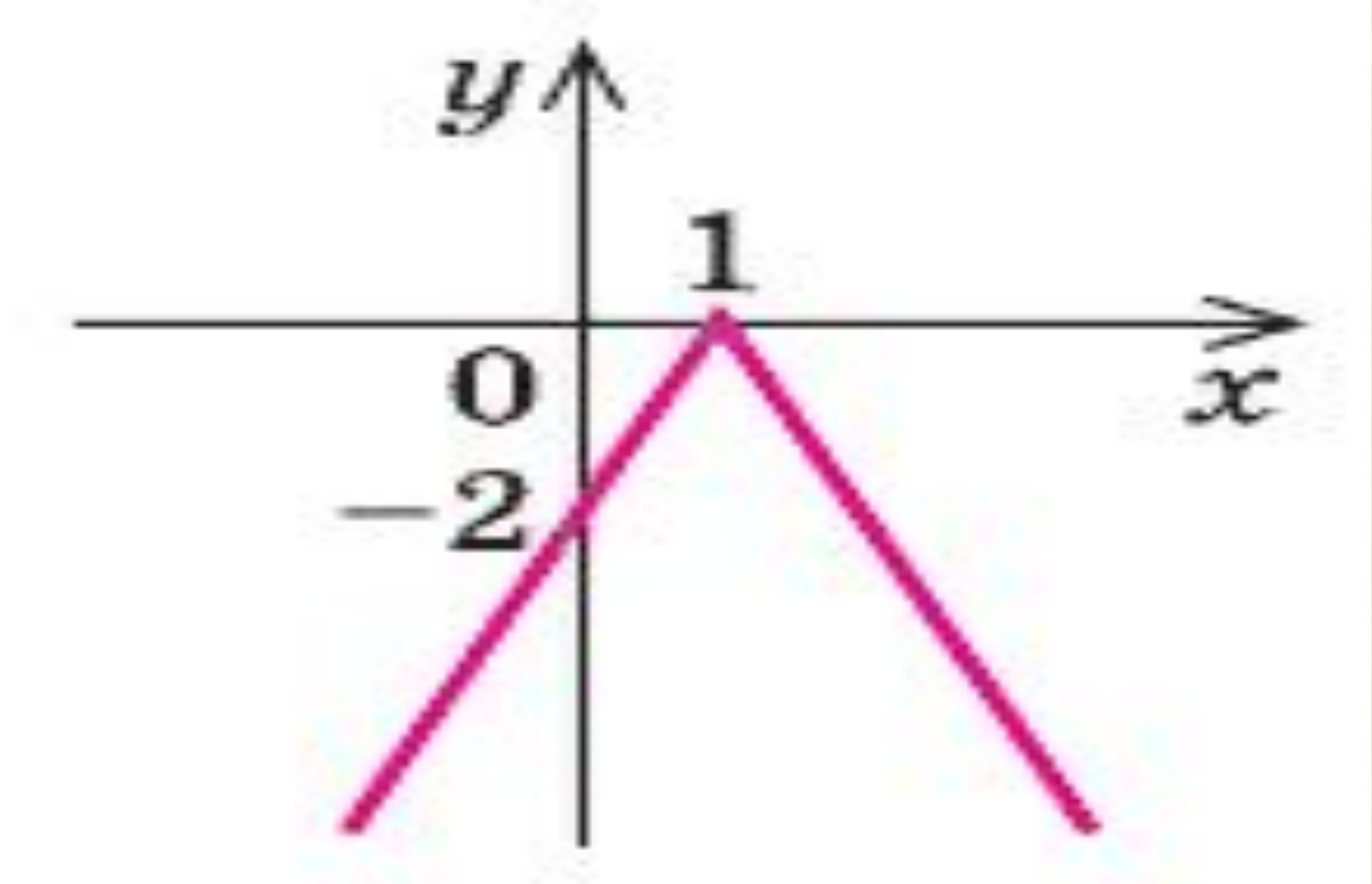


ПОСТРОЙТЕ ГРАФИК ФУНКЦИ $y = -|2x - 2|$





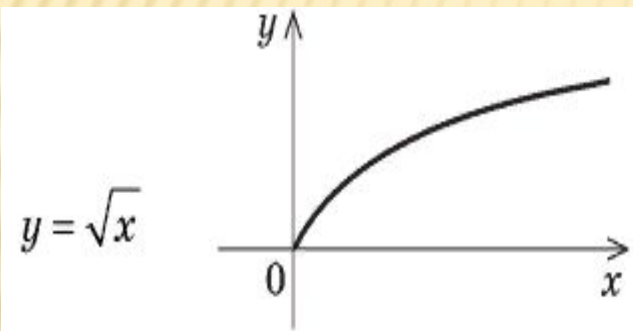
$$y = -|2x - 2|$$

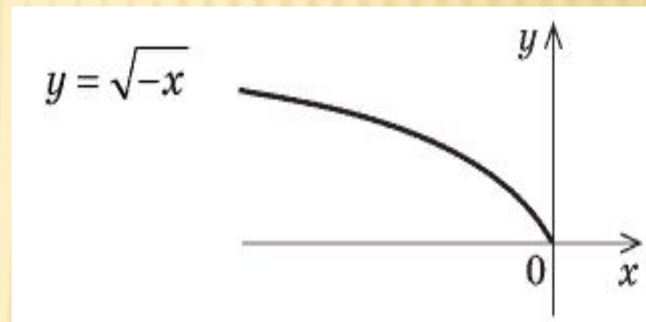


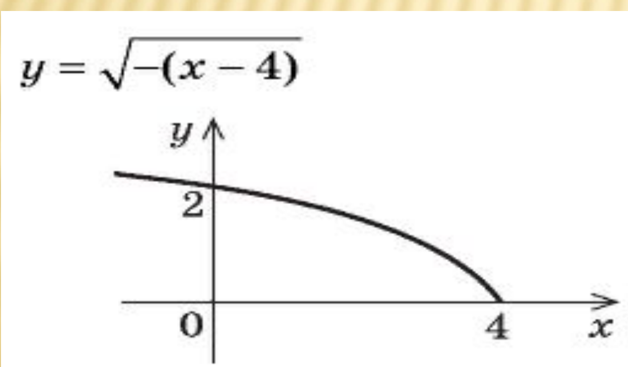
ПОСТРОЙТЕ ГРАФИК ФУН $y = \sqrt{4 - |x|}.$

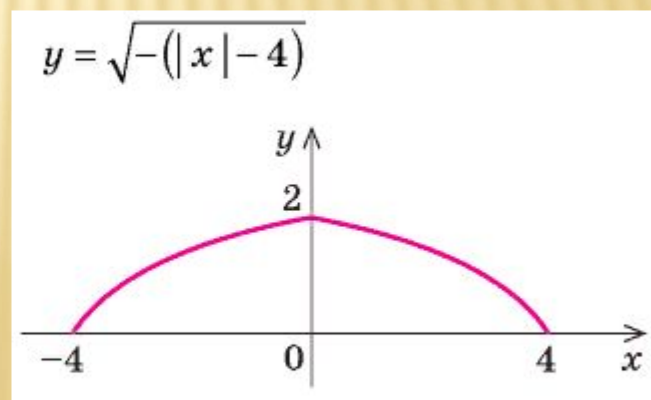
- Запишем уравнение заданной функции так:

$$y = \sqrt{4 - |x|} = \sqrt{-(|x| - 4)}.$$





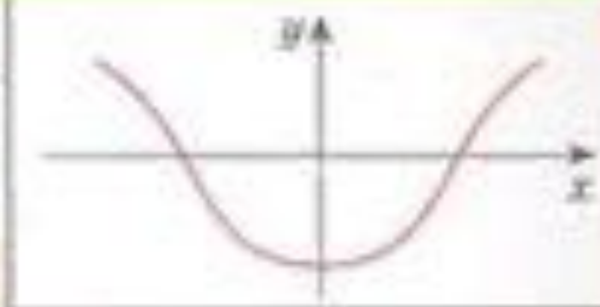




ЧЁТНОСТЬ И НЕЧЁТНОСТЬ

Функция $f(x)$ — **чётная**, если область определения функции симметрична относительно нуля и для любого x из области определения $f(-x) = f(x)$.

График чётной функции симметричен относительно оси y.



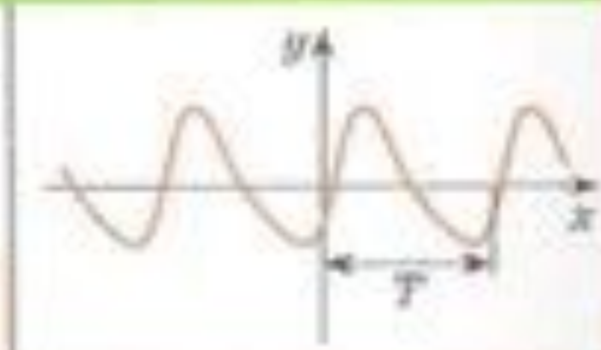
Функция $f(x)$ — **нечётная**, если область определения функции симметрична относительно нуля и для любого x из области определения $f(-x) = -f(x)$.

График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

ПЕРИОДИЧНОСТЬ

Функция $f(x)$ — **периодическая** с периодом $T > 0$, если для любого x из области определения значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и $f(x) = f(x + T) = f(x - T)$.

График периодической функции состоит из неограниченно повторяющихся одинаковых фрагментов.



НУЛИ ФУНКЦИИ

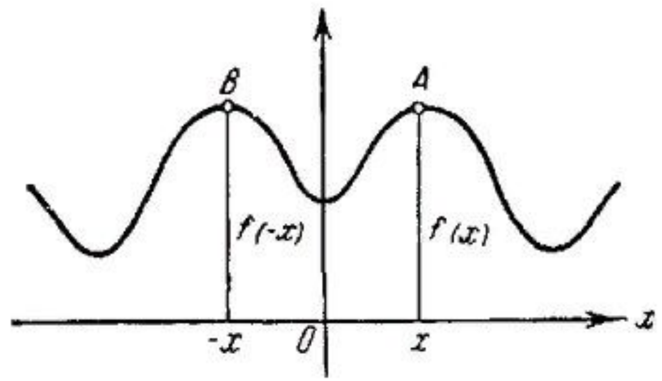
Нуль функции $f(x)$ — значение аргумента x, при котором функция обращается в нуль: $f(x) = 0$.

Четность и нечетность функции

Функция называется **четной**, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения выполняется равенство

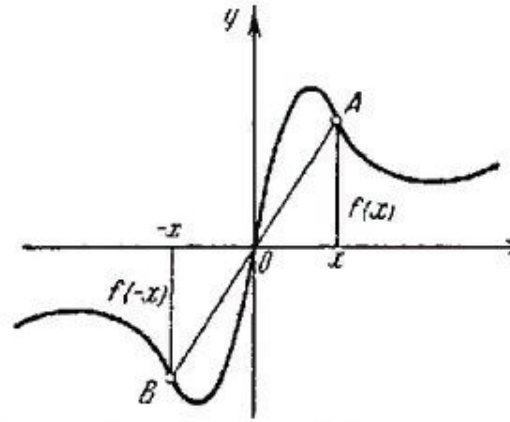
$$f(-x) = f(x)$$

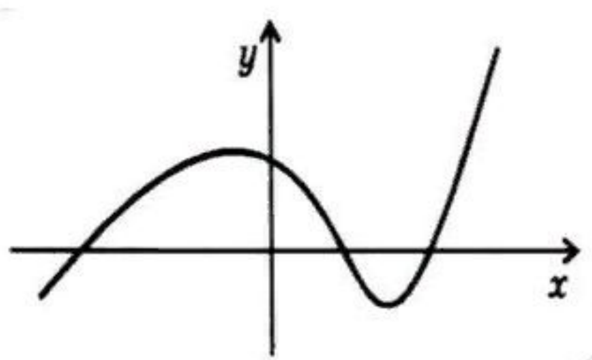


Функция называется **нечетной**, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x)$$





Функция называется **ни четная и ни нечетная**, если:

- область определения функции не симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения **НЕ** выполняется равенства:

$$f(-x) = f(x) \quad \text{и} \quad f(-x) = -f(x)$$

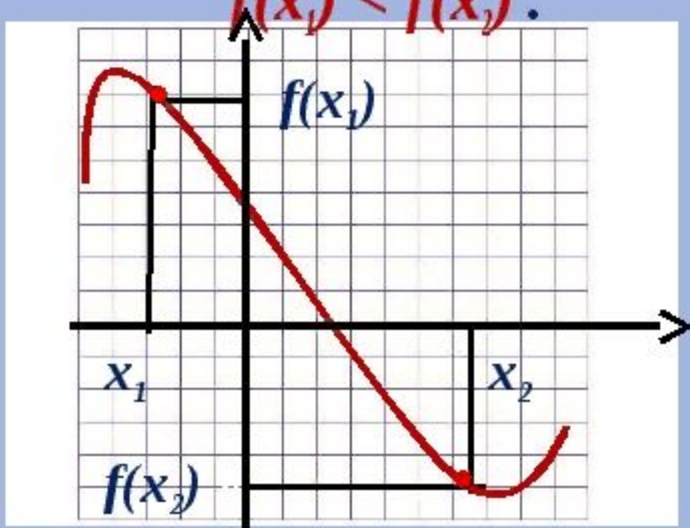
7. Монотонность

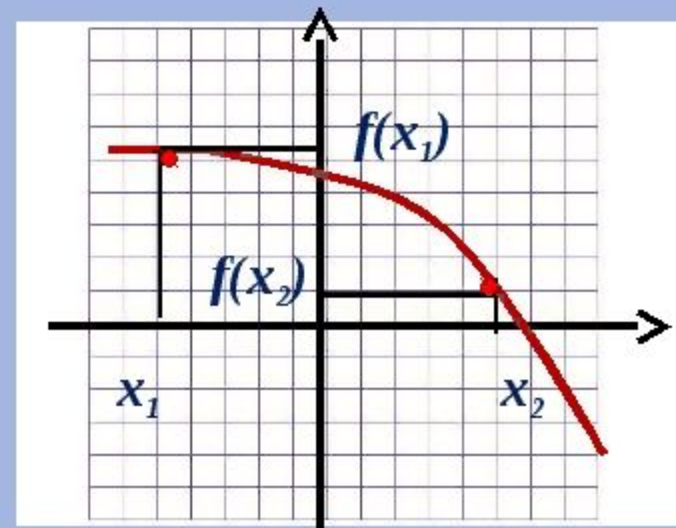
Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей** на множестве X, если для любых двух точек x_1 и x_2 из области определения, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей** на множестве X, если для любых двух точек x_1 и x_2 из области определения, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) > f(x_2).$$





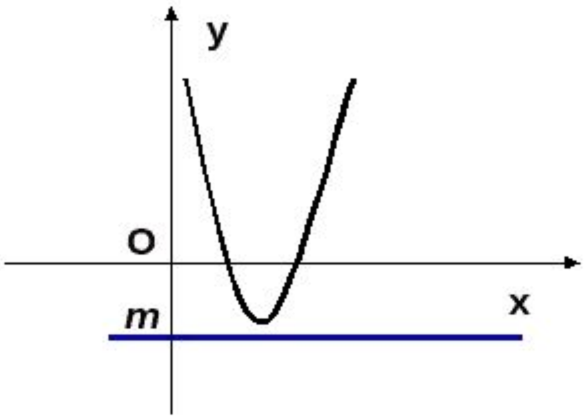
Ограниченность функции

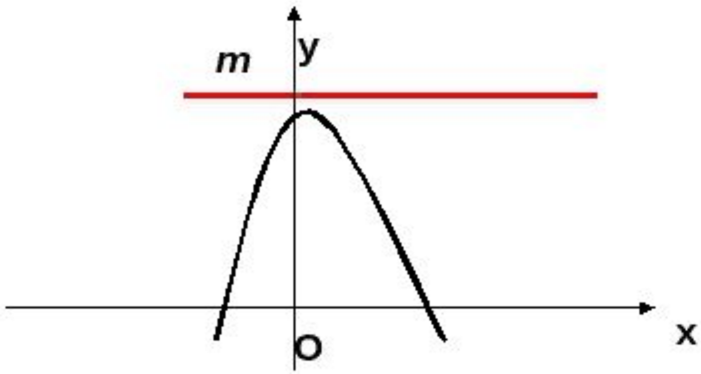
- **Функцию y = f(x) называют *ограниченной снизу* на множестве D(f), если все значения функции на области определения больше некоторого числа.**

*(Если существует число **m** такое, что для любого значения **x** области определения выполняется неравенство **f(x) > m**.)*

- **Функцию y = f(x) называют *ограниченной сверху* на множестве D(f), если все значения функции на области определения меньше некоторого числа.**

*(Если существует число **m** такое, что для любого значения **x** области определения выполняется неравенство **f(x) < m**.)*



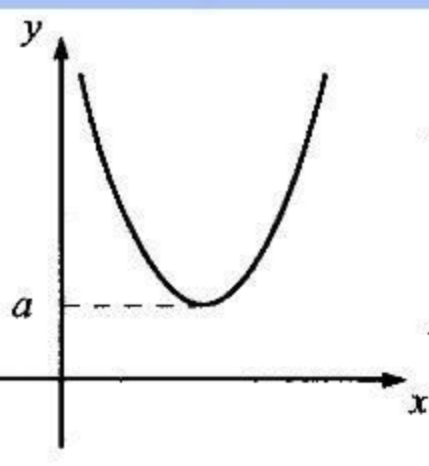


- ***Если функция ограничена снизу, то ее график целиком расположен выше некоторой горизонтальной прямой y = m.***
- ***Если функция ограничена сверху, то ее график целиком расположен ниже некоторой горизонтальной прямой y = m.***
- ***Если функция ограниченна и сверху и снизу, то ее называют ограниченной.***

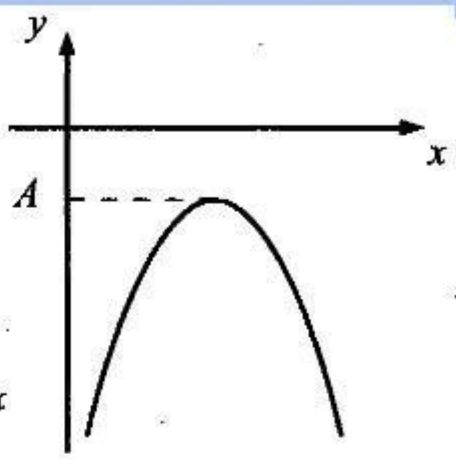
Ограниченность функции

Функция называется ограниченной снизу, если все значения функции не меньше некоторого числа а (т.е. y(x) ≥ a).

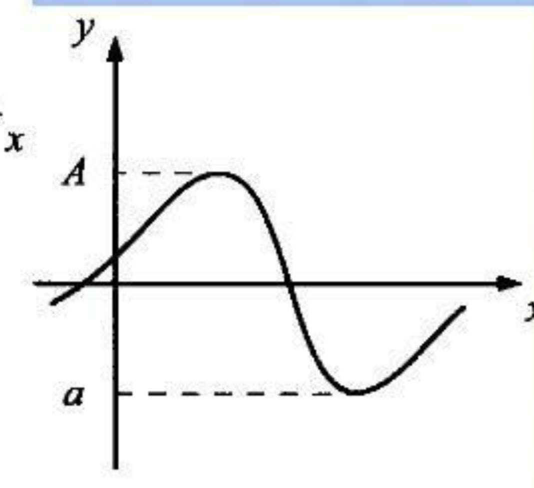
Функция называется ограниченной сверху, если все значения функции не больше некоторого числа А (т.е. y(x) ≤ A). Если функция ограничена снизу и снизу, то она называется ограниченной.



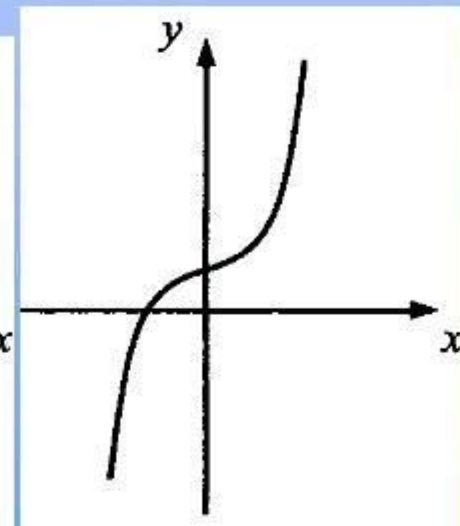
Ограничена снизу



Ограничена сверху



Ограниченная



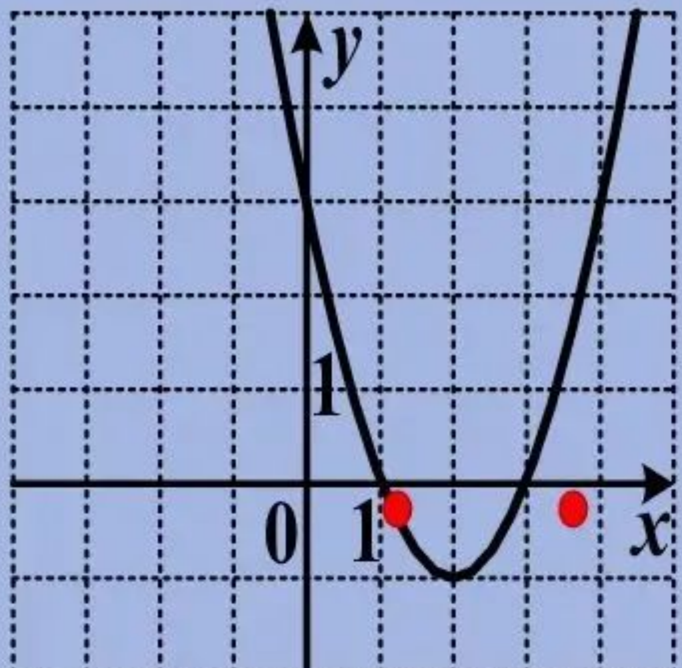
Неограниченная

5. Промежутки знакопостоянства

Промежутки, на которых непрерывная функция сохраняет свой знак и не обращается в нуль, называются промежутками знакопостоянства.

y > 0 (график расположен выше оси OX) при x $\in$(- ∞; 1) **U** **(3; +∞)**,

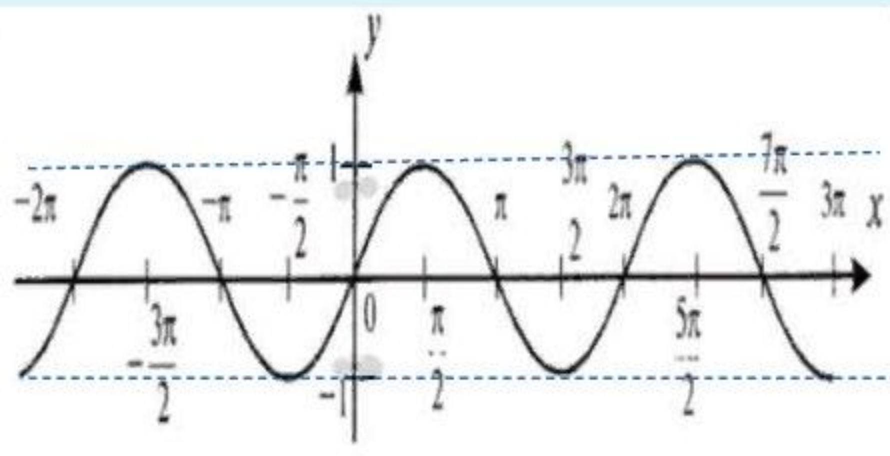
y<0 (график расположен ниже OX) при x $\in$ **(1;3)**



Функция $y = \sin x$

Свойства функции:

График функции

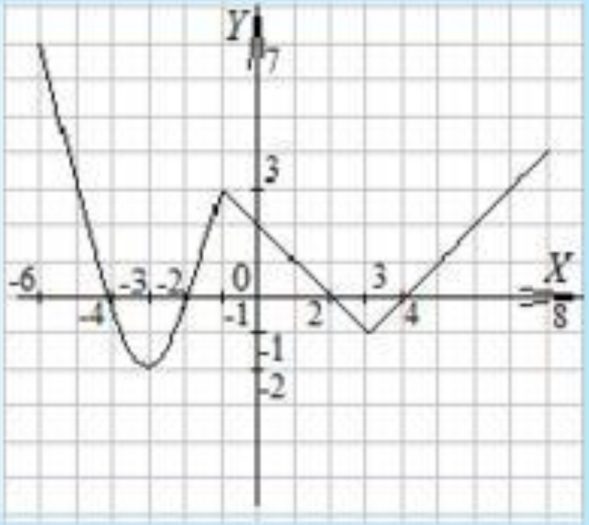


1. $D(y) = R$.
2. $E(y) = [-1 ; 1]$
3. <u>Функция периодическая; Т = 2π</u>
4. <u>Функция нечетная</u>
5. $\sin x = 0$ при $x = \pi n,\ n \in Z$.
6. <u>Функция возрастает</u> на
   $[-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n],\ n \in Z$,
   убывает на
   $[\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n],\ n \in Z$.
7. <u>$\sin x > 0$</u>
   при $2\pi n < x < \pi + 2\pi n,\ n \in Z$;
   $\sin x < 0$
   при $\pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n,\ n \in Z$.
8. Наибольшее значение функции y =
   наименьшее значение функции y =

Основные свойства функций.

Решение упражнений.

1. Используя данный график, опишите свойства функции.



1. Область определения функции: $D(f)=[-6;\ 8]$.

2. Множество значений функции: $E(f)=[-2;\ 7]$.

3. Нули функции: $x_1=-4, \quad x_2=-2, \quad x_3=2, \quad x_4=4.$

4. Функция положительна на интервалах:

$[-6;\ -4)\cup(-2;\ 2)\cup(4;\ 8]$;

функция отрицательна на интервалах:

$(-4;\ -2)\cup(2;\ 4)$.

5. Функция возрастает на интервалах: $[-3;\ -1]\cup[3;\ 8]$;

убывает на интервалах: $[-6;\ -3]\cup[-1;\ 3]$.

6. Экстремумы функции: $f_{max}=f(-1)=3; \quad f_{min}=f(-3)=-2; \quad f_{min}=f(3)=-1.$

На рисунке изображен график функции y = f(x), заданной на промежутке [-5;5].

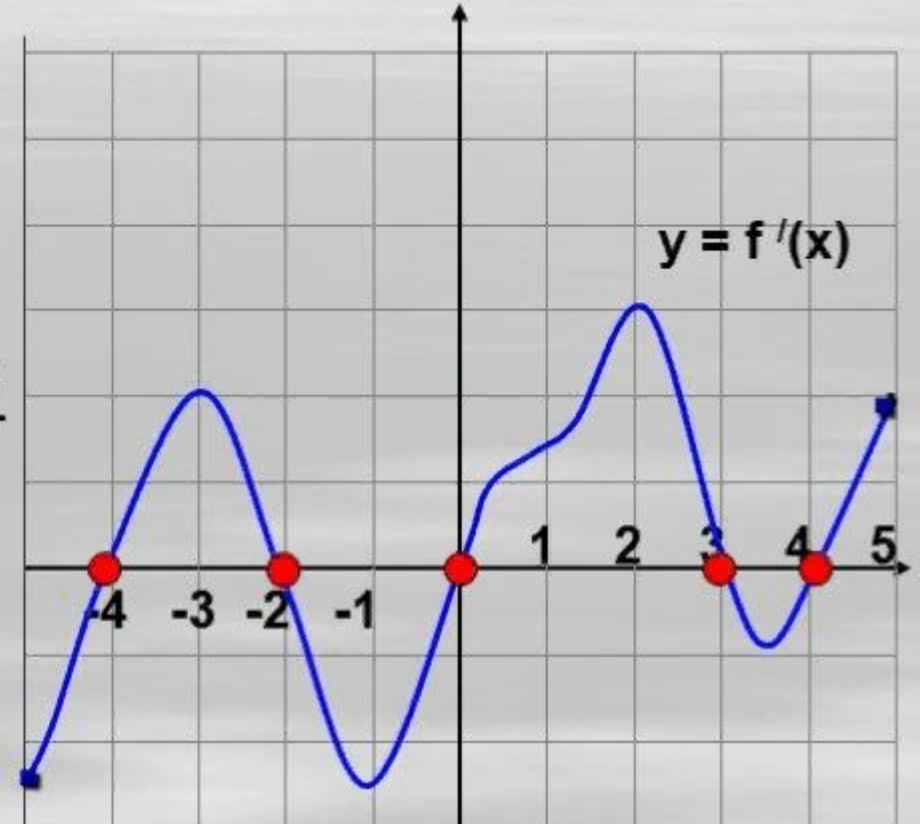
$D(y)=[-5-5;]$

$E(y)=[-2,5;3]$

y=0, если x =-4;-2;0;3;4.

y>0, при $x\in(-4;2)\cup(0;3)\cup(4;5]$,

<0,при $x\in[-5;-4)\cup(-2;0)\cup(3;4)$.



5. Функция возрастает

на $[-5;-3]$, на $[-1;2]$ и на $[3,5;5]$

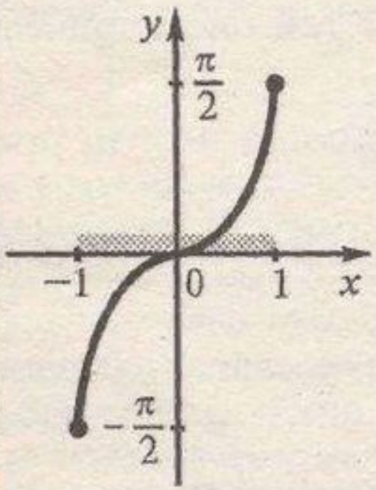
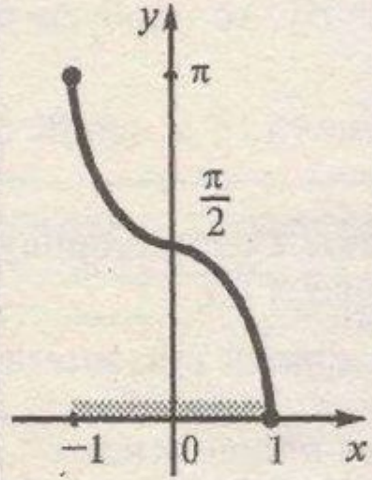
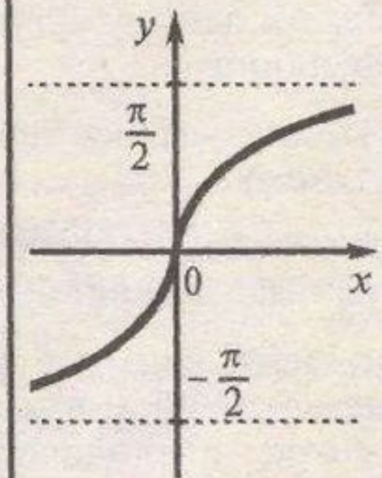
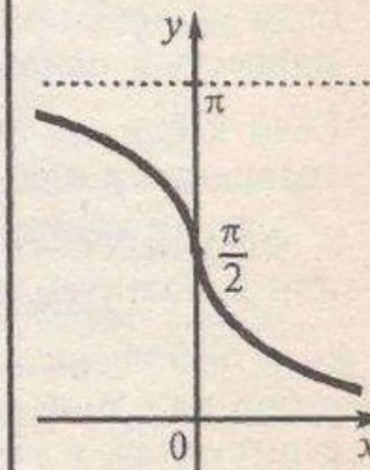
Функция убывает

на $[-3;-1]$ и на $[2;3,5]$.

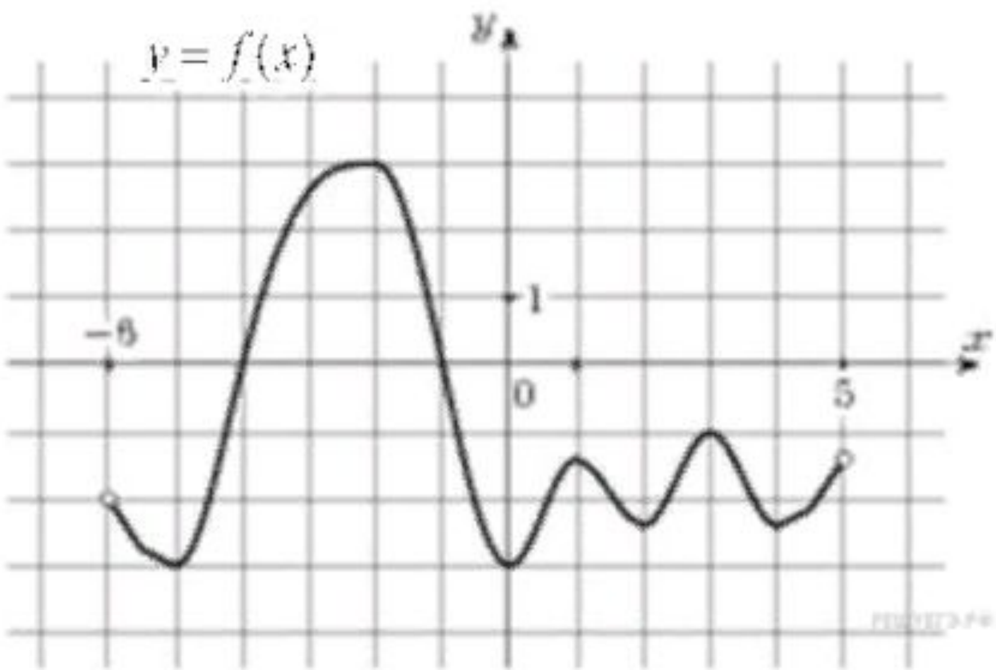
$y_{наим.}=-2,5$; $y_{наиб.}=3$

8.Ограничена сверху и снизу.

7. Функция непрерывна. **9. Ни четная ,ни нечетняя**

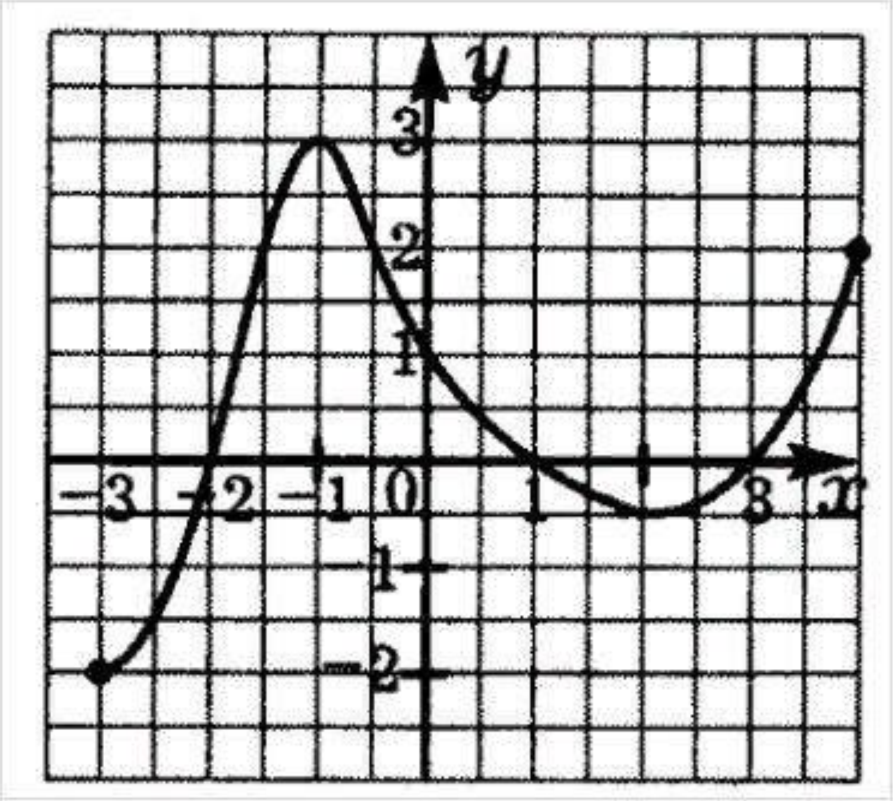
Область определения обратной функции	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$	$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$
Множество значений обратной функции	$\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$	$[0;\ \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$	$(0;\ \pi)$
График обратной функции				
Некоторые особенности обратной функции	Возрастает и нечетная	Убывает (ни четная, ни нечетная)	Возрастает и нечетная	Убывает (ни четная, ни нечетная)

Задача 2. На рисунке изображён график функции, определённой на интервале (-6; 5). Определите по графику:



1) множество значений функции;
2) нули функции;
3) промежутки знакопостоянства;
4) промежутки монотонности;
5) точки экстремума;
6) при каких значениях a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно три корня.
7) сколько корней имеет уравнение $f(x) = -2$.

4. ФУНКЦИЯ ЗАДАНА ГРАФИКОМ. ЗАПОЛНИТЕ ПРОПУСКИ.



1) f(-3) =
2) f(- 1) =
3) f(x) = - 1,5 при x =
4) f(x) = 2 при x =
 x = , x =
5) D(f) =
6) E(f) =

I С–3. График функции

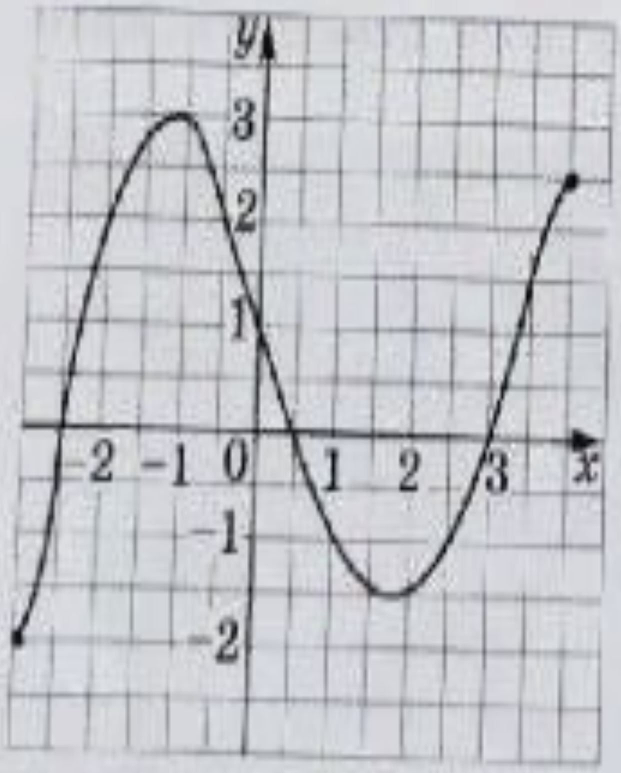


Рис. 1

1. На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$, областью определения которой служит промежуток $[-3; 4]$. Найдите:

1) а) $f(-3)$; б) $f(-2)$;
в) $f(0)$; г) $f(3)$;

2) значения аргумента x, при которых:

а) $f(x) = 2$; б) $f(x) = 0$;

в) $f(x) = -2$;

3) наибольшее и наименьшее значения функции;

4) область значений функции.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- Страница 93   № 95 - 96