Решение систем линейных алгебраических уравнений

в пакете MATLAB

Ранее

- Возможности MATLAB
  - левостороннее деление
    - x = A\b
  - обратная матрица
    - x = inv(A)*b

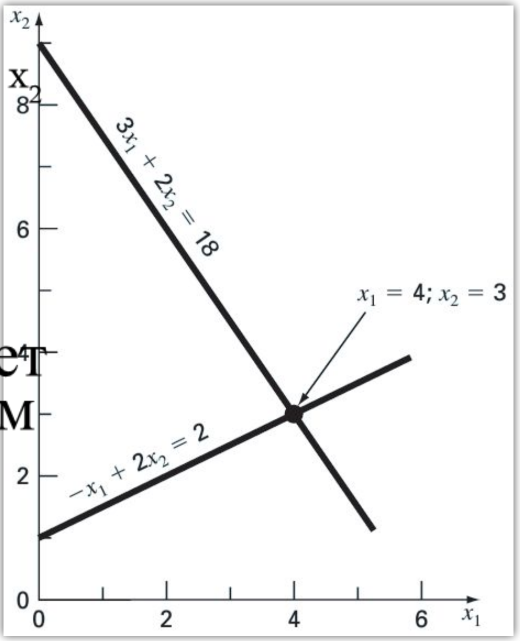
Небольшие системы уравнений

- Небольшая система содержит, как привило, не более трех уравнений
- Решение, чаще всего, может не требовать компьютера
- Методы
  - графический
  - Крамера
  - исключения неизвестных

Графический метод

» Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2

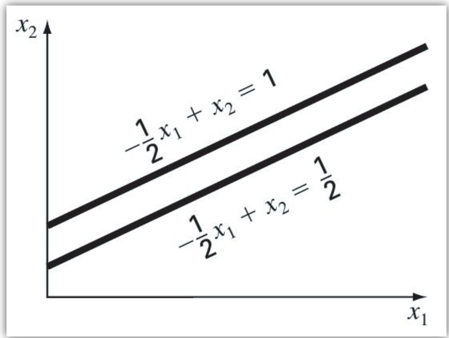
- $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ » $\begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
  - решение – точка пересечения

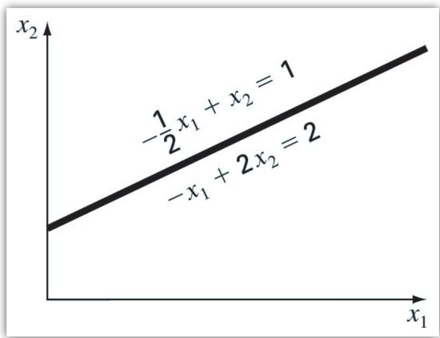


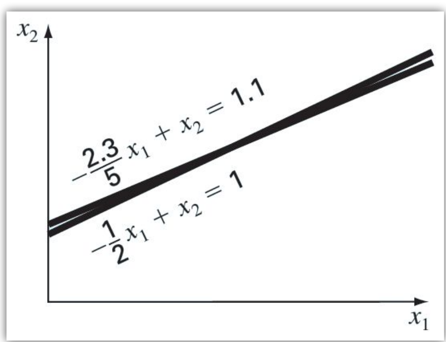
» Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве

» В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Сложные случаи решений







- Три случая
  1. Параллельные линии
     - нет решения
  2. Совпадающие линии
     - множество решений
  3. Близкие линии
     - трудно определить точку пересечения
- Системы в 1 и 2 случае называются – *вырожденными* (*особыми, сингулярными*)
- Случай 3 соответствует *плохо обусловленной* системе
  - существуют сложности при численном решении

Метод Крамера

» Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2

- $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения

» Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве

» В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Метод Крамера

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Исключение неизвестных

» Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2

- $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
  - решение – точка пересечения

» Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве

» В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Исключение неизвестных

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Метод Гаусса

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ & & a''_{33} & b''_3 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$x_3 = b''_3 / a''_{33}$$

$$x_2 = (b'_2 - a'_{23}x_3)/a'_{22}$$

$$x_1 = (b_1 - a_{13}x_3 - a_{12}x_2)/a_{11}$$

Метод Гаусса – Прямой ход

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Метод Гаусса – Прямой ход

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Метод Гаусса – Прямой ход

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Метод Гаусса – Прямой ход

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Метод Гаусса – Обратный ход

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример

```
function x = Gauss(A,b)
% Gauss: Решение СЛАУ методом Гаусса
%   x = Gauss(A,b)
% вход:
%   A = матрица коэффициентов при неизвестных
%   b = вектор свободных членов
% выход:
%   x = вектор неизвестных
[m,n] = size(A);
if m~=n, error('Матрица A должна быть квадратной'); end
nb = n+1;
Aug = [A b];
% прямой ход
for k = 1:n-1
    for i = k+1:n
        factor = Aug(i,k)/Aug(k,k);
        Aug(i,k:nb) = Aug(i,k:nb)-factor*Aug(k,k:nb);
    end
end
% обратный ход
x = zeros(n,1);
x(n) = Aug(n,nb)/Aug(n,n);
for i = n-1:-1:1
    x(i) = (Aug(i,nb)-Aug(i,i+1:n)*x(i+1:n))/Aug(i,i);
end
```

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\
0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\
0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4
\end{aligned}
$$

```
>> A=[3 -0.1 -0.2; 0.1 7 -0.3; 0.3 -0.2 10];
>> b=[7.85; -19.3; 71.4];
>> Gauss(A,b)
ans =
    3.0000
   -2.5000
    7.0000
```

Метод Гаусса с обратной подстановкой

- В рассмотренном варианте метода Гаусса могут возникнуть ситуации когда решение не может быть найдено или иметь существенную погрешность
  - например, в случае если главный элемент равен 0, при нормализации возникает деление на 0
  - также существенно меньшее значение главного элемента по сравнению с остальными может привести к увеличению погрешности вычислений
- Решение – выбор главного элемента
  - частный
    - выбор максимального значения главного элемента с последующей перестановкой *строк*
  - полный (применяется редко)
    - выбор максимального значения главного элемента с последующей перестановкой *строк* и *столбцов*

Пример – Частный выбор главного элемента

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример – Частный выбор главного элемента

Разряды	x_2	x_1	Ошибка x_1, %
3	0,667	-3,33	1099
4	0,6667	0,0000	100
5	0,66667	0,30000	10
6	0,666667	0,330000	1
7	0,6666667	0,3330000	0,1

»

- » Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- » Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- » В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Разряды	x_2	x_1	Ошибка x_1, %
3	0,667	0,333	0,1
4	0,6667	0,3333	0,01
5	0,66667	0,33333	0,001
6	0,666667	0,333333	0,0001
7	0,6666667	0,3333333	0,0000

Пример – MATLAB

```
function x = GaussMod(A,b)
% GaussMod: Решение СЛАУ методом Гаусса с обратной подстановкой
%   x = GaussMod(A,b)
% вход:
%   A = матрица коэффициентов при неизвестных
%   b = вектор свободных членов
% выход:
%   x = вектор неизвестных
[m,n]=size(A);
if m~=n, error('Матрица А должна быть квадратной'); end
nb=n+1;
Aug=[A b];
% прямой ход
for k = 1:n-1
    % выбор главного элемента
    [~,i]=max(abs(Aug(k:n,k)));
    ime=i+k-1;
    if ime~=k
        Aug([k,ime],:)=Aug([ime,k],:);
    end
    for i = k+1:n
        factor=Aug(i,k)/Aug(k,k);
        Aug(i,k:nb)=Aug(i,k:nb)-factor*Aug(k,k:nb);
    end
end
% обратный ход
x=zeros(n,1);
x(n)=Aug(n,nb)/Aug(n,n);
for i = n-1:-1:1
    x(i)=(Aug(i,nb)-Aug(i,i+1:n)*x(i+1:n))/Aug(i,i);
end
```

Расчет определителя матрицы

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Факторизация матриц

- В математике *факторизация* или *факторинг* - это декомпозиция объекта (например, числа, полинома или матрицы) в произведение других объектов или факторов, которые, будучи перемноженными, дают исходный объект
- Целью факторизации является приведение объекта к «основным строительным блокам»
  - Матрица может также быть факторизована на произведение матриц специального вида для приложений, в которых эта форма удобна
- Виды факторизации матриц
  - LU
  - Холецкого
  - QR

LU факторизация

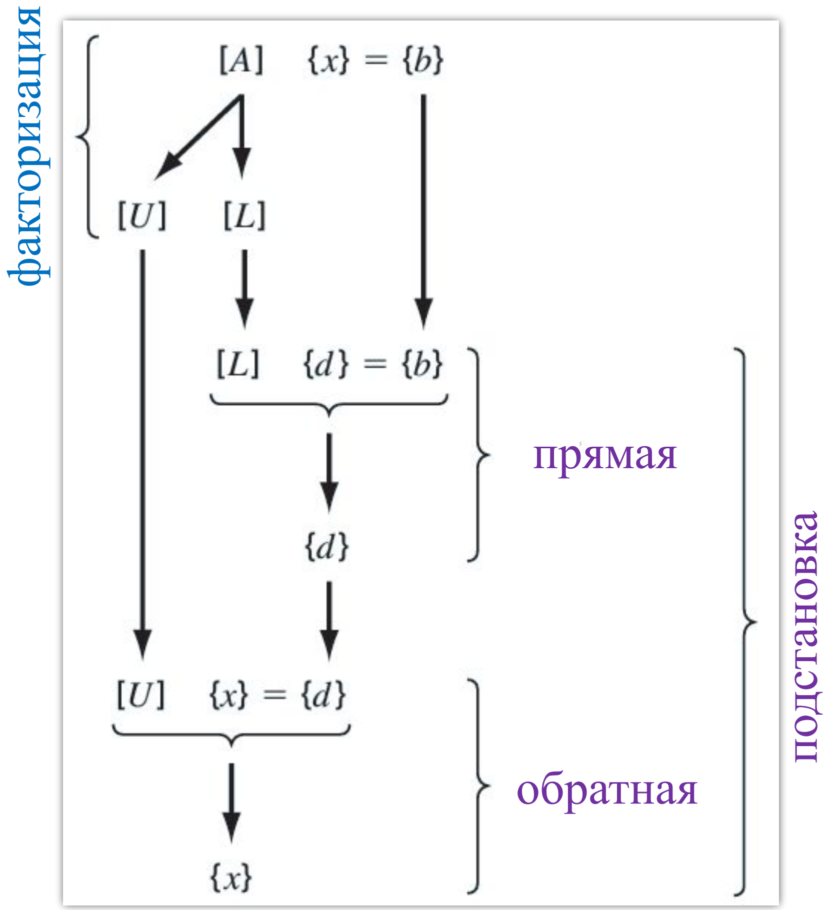
- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

LU факторизация

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

LU факторизация

» Два основных шага решения системы
  - факторизация
    - выполняется декомпозиция матрицы A на верхнюю U и нижнюю L треугольные матрицы
  - подстановка
    - прямая подстановка определяет промежуточный вектор d
    - обратная подстановка определяет вектор неизвестных x



Метод Гаусса как LU факторизация

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Метод Гаусса как LU факторизация

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Метод Гаусса как LU факторизация

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Метод Гаусса как LU факторизация

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример - Проверка

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример - Проверка

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Метод Гаусса как LU факторизация

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример

» Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2

- $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
  - решение – точка пересечения

» Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве

» В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

LU факторизация с выбором главного элемента

- Аналогично методу Гаусса для обеспечения надежности решения при использовании LU факторизации необходимо применять частный выбор главного элемента
  - одним из способов является использование матрицы перестановки
    - единичная матрица для взаимной замены строк и столбцов

$$[P][A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 8 & 3 & -6 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 8 & 3 & -6 \\ 2 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

LU факторизация с выбором главного элемента

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

LU факторизация – MATLAB функции

» lu

- [L,U] = lu(A) – возвращает верхнюю треугольную матрицу U и психологическую нижнюю матрицу L (то есть произведение нижней треугольной матрицы и матрицы перестановок), так что A=L*U
- [L,U,P] = lu(A) – возвращает верхнюю треугольную матрицу U, нижнюю треугольную матрицу L и сопряженную (эрмитову) матрицу матрицы перестановок P, так что L*U =P*A

Пример

```
>> A = [3 -.1 -.2;.1 7 -.3;.3 -.2 10];
>> b = [7.85; -19.3; 71.4];
>> [L,U] = lu(A)
L =
    1.0000         0         0
    0.0333    1.0000         0
    0.1000   -0.0271    1.0000
U =
    3.0000   -0.1000   -0.2000
         0    7.0033   -0.2933
         0         0   10.0120
>> L*U
ans =
    3.0000   -0.1000   -0.2000
    0.1000    7.0000   -0.3000
    0.3000   -0.2000   10.0000
>> d = L\b
d =
    7.8500
  -19.5617
   70.0843
>> x = U\d
x =
    3.0000
   -2.5000
    7.0000
```

Факторизация Холецкого

» Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$$

› решение – точка пересечения

» Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве

» В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример

» Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2

- $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
  - › решение – точка пересечения

» Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве

» В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Факторизация Холецкого

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Факторизация Холецкого – MATLAB функции

- chol
  - U = chol(A) – для квадратной матрицы A возвращает верхнюю треугольную матрицу U, так что U'*U=A
    - Разложение Холецкого возможно для действительных и комплексных эрмитовых матриц

Пример

```
>> A = [6 15 55; 15 55 225; 55 225 979];
>> b = [sum(A(1,:)); sum(A(2,:)); sum(A(3,:))];
>> U = chol(A)
U =
    2.4495    6.1237   22.4537
         0    4.1833   20.9165
         0         0    6.1101
>> U'*U
ans =
    6.0000   15.0000   55.0000
   15.0000   55.0000  225.0000
   55.0000  225.0000  979.0000
>> d = U'\b
d =
   31.0269
   25.0998
    6.1101
>> x = U\d
x =
    1.0000
    1.0000
    1.0000
```

Левостороннее деление MATLAB

- При использовании левостороннего деления «\» MATLAB выполняет оценку матрицы коэффициентов и применяет оптимальный метод для решения
  - MATLAB проверяет *вид* матрицы коэффициентов при неизвестных для возможности нахождения решения без применения полного метода Гаусса
    - разреженная
    - треугольная
    - симметричная
  - В противном случае применяется для квадратной матрицы применяется метод Гаусса с частным выбором главного элемента

QR факторизация

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

QR факторизация – MATLAB функции

- qr
  - [Q,R] = qr(A) – вычисляет верхнюю треугольную матрицу R того же размера, как и у A, и унитарную матрицу Q, так что X=Q*R
  - [Q,R,P] = qr(A) – вычисляет матрицу перестановок P, верхнюю треугольную матрицу R с убывающими по модулю диагональными элементами и унитарную матрицу Q, так что A*P=Q*R
    - Матрица перестановок P выбрана так, что abs(diag(R)) уменьшается
  - [Q,R] = qr(A,0) и [Q,R,P] = qr(A,0) – вычисляют экономное разложение, в котором P – вектор перестановок, так что Q*R=A(:,P)
    - Матрица P выбрана так, что abs(diag(R)) уменьшается

Пример

```
>> A=rand(5,4);
>> [Q,R]=qr(A)
Q =
   -0.4927   -0.4806    0.1780    0.6566    0.2518
   -0.5478   -0.3583   -0.5777   -0.4758   -0.1068
   -0.0768    0.4754   -0.6343    0.5547   -0.2409
   -0.5523    0.3391    0.4808   -0.0718   -0.5862
   -0.3824    0.5473    0.0311   -0.1722    0.7236
R =
   -1.6536   -1.1405   -1.2569   -1.1757
         0    0.9661    0.6341    1.0098
         0         0   -0.8816   -0.3885
         0         0         0    0.1784
         0         0         0         0
>> [Q,R]=qr(A,0)
Q =
   -0.4927   -0.4806    0.1780    0.6566
   -0.5478   -0.3583   -0.5777   -0.4758
   -0.0768    0.4754   -0.6343    0.5547
   -0.5523    0.3391    0.4808   -0.0718
   -0.3824    0.5473    0.0311   -0.1722
R =
   -1.6536   -1.1405   -1.2569   -1.1757
         0    0.9661    0.6341    1.0098
         0         0   -0.8816   -0.3885
         0         0         0    0.1784
```

```
>> [Q,R,P]=qr(A)
Q =
   -0.4160   -0.3744    0.7873   -0.1678    0.1969
   -0.0227   -0.6906   -0.1874    0.6979   -0.0170
   -0.5386    0.2878    0.0950    0.2749   -0.7365
   -0.5925   -0.3037   -0.5741   -0.4723    0.0642
   -0.4305    0.4559   -0.0797    0.4314    0.6437
R =
   -1.5765   -1.1068   -0.5127   -1.0053
         0   -0.9698   -0.1764   -0.8051
         0         0    0.5420    0.1046
         0         0         0    0.2636
         0         0         0         0
P =
     1     0     0     0
     0     0     0     1
     0     0     1     0
     0     1     0     0
```

```
>> [Q,R,p]=qr(A,0)
Q =
   -0.4160   -0.3744    0.7873   -0.1678
   -0.0227   -0.6906   -0.1874    0.6979
   -0.5386    0.2878    0.0950    0.2749
   -0.5925   -0.3037   -0.5741   -0.4723
   -0.4305    0.4559   -0.0797    0.4314
R =
   -1.5765   -1.1068   -0.5127   -1.0053
         0   -0.9698   -0.1764   -0.8051
         0         0    0.5420    0.1046
         0         0         0    0.2636
p =
     1     4     3     2
```

Итерационные методы

- » Итерационные или аппроксимационные методы являются альтернативой ранее рассмотренным методам решения СЛАУ, основанным на исключении неизвестных
- » Можно выделить два основных этапа
  - выбор начального приближения
  - последующее систематическое уточнение
- » Методы
  - Гаусса-Зейделя
  - Якоби
  - релаксации
  - бисопряженных градиентов
  - и др.

Метод Гаусса-Зейделя

» Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2

$$\begin{cases}3x_1 + 2x_2 = 18\\ -x_1 + 2x_2 = 2\end{cases} \gg \begin{cases}x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9\\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1\end{cases}$$

› решение – точка пересечения

» Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве

» В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Метод Гаусса-Зейделя

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Метод Якоби

» Метод Гаусса-Зейделя использует найденное значение x сразу же для нахождения следующего x из другого уравнения

» Несколько альтернативный подход, называемый *методом Якоби*, заключается в расчете *всех* x на основании предыдущей итерации

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \\
x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22} \\
x_3 &= (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33} \\
x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \\
x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22} \\
x_3 &= (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}
\end{aligned}
$$

Гаусса-Зейдель

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \\
x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22} \\
x_3 &= (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33} \\
x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \\
x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22} \\
x_3 &= (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}
\end{aligned}
$$

Якоби

Сходимость и диагональное преобладание

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример

» Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \quad » \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$$

› решение – точка пересечения

» Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве

» В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

```
function x = GaussSeidel(A,b,e,maxi)
% GaussSeidel: метод Гаусса-Зейделя
%   x = GaussSeidel(A,b): решение СЛАУ методом Гаусса-Зейделя
% вход:
%   A = матрица коэффициентов
%   b = вектор правых частей
%   e = условие окончания (по умолчанию = 0.00001%)
%   maxi = максимальное число итераций (по умолчанию = 50)
% выход:
%   x = вектор решений
if nargin<2,error('необходимо минимум 2 входных аргумента'),end
if nargin<4|isempty(maxi),maxi=50;end
if nargin<3|isempty(e),e=0.00001;end
[m,n] = size(A);
if m~=n, error('Матрица А должна быть квадратной'); end
C = A;
for i = 1:n
    C(i,i) = 0;
    x(i) = 0;
end
x = x';
for i = 1:n
    C(i,1:n) = C(i,1:n)/A(i,i);
end
for i = 1:n
    d(i) = b(i)/A(i,i);
end
iter = 0;
while (1)
    xold = x;
    for i = 1:n
        x(i) = d(i)-C(i,:)*x;
        if x(i) ~= 0
            ea(i) = abs((x(i) - xold(i))/x(i)) * 100;
        end
    end
    iter = iter+1;
    if max(ea)<=e | iter >= maxi, break, end
end
```

Метод релаксации

» Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2

- $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
  - решение – точка пересечения

» Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве

» В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Метод релаксации

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример

- Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2
  - $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
    - решение – точка пересечения
- Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве
- В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы

Пример

» Графическое решение системы из двух линейных уравнений может быть получено путем графического представления их в декартовой системе координат с осями x_1 и x_2

- $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \gg \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 \end{cases}$
  - решение – точка пересечения

» Решением системы из трех уравнений будет пересечение трех плоскостей в трехмерном пространстве

» В случае размерности системы уравнений графические методы не применимы