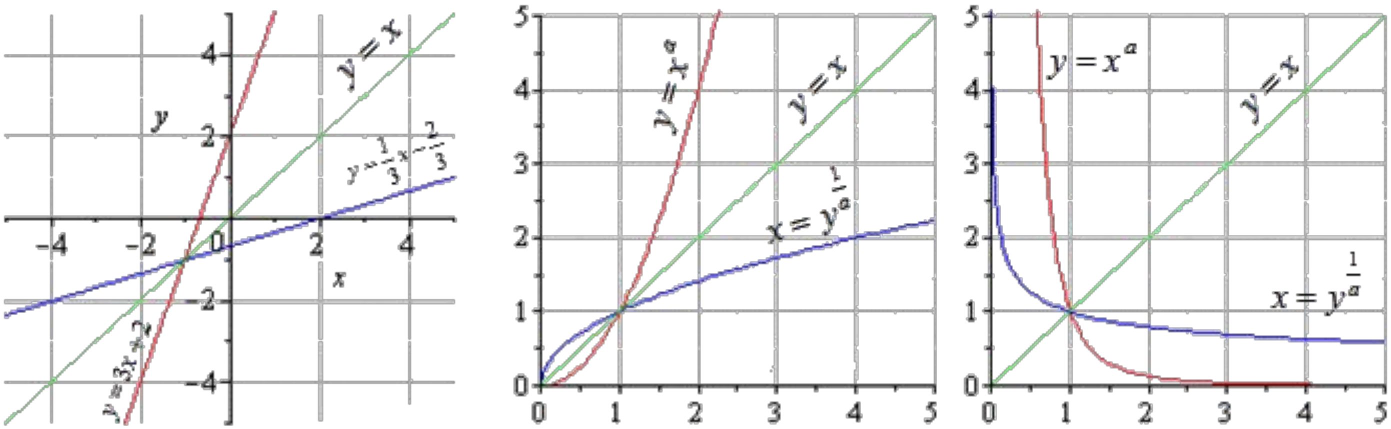
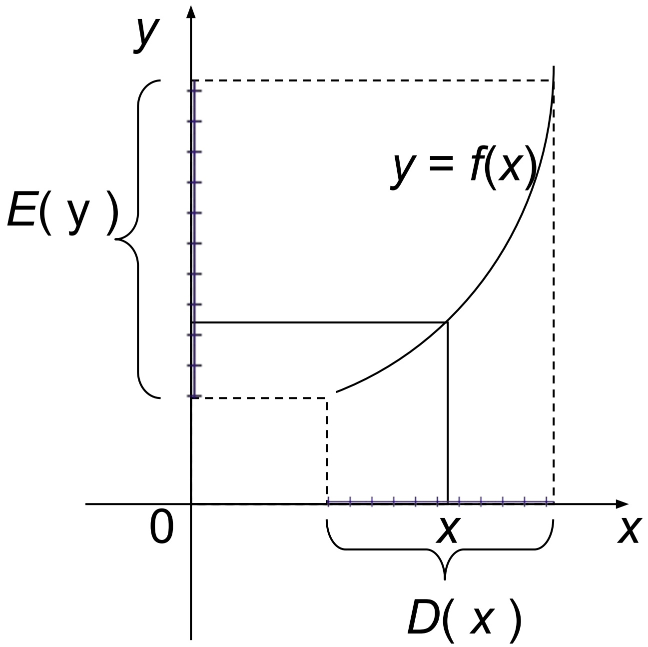
Тема 3.2 Взаимно обратные функции



Взаимно обратные функции

Если каждому значению *x* из некоторого множества действительных чисел поставлено в соответствие по определённому правилу *f* число *y*, то, говорят, что на этом множестве определена **функция.**



x – независимая переменная или аргумент;

D(x) – область определения функции;

y – зависимая переменная;

E(y) - областью значений функции.

Прямая **Задача.**

***y* = *f* (*x*), *y* - ?**

Найти значение *y* при заданном значении *x*.

Дано: у = 2х + 3

Найти: у (5)

Решение:

у (5) = 2 · 5 + 3 = 13

Ответ: у (5) = 13

Обратная **Задача.**

***y* = *f* (*x*), *x* - ?**

Найти значение *x* при заданном значении *y*.

Дано: у = 2х + 3, у (х) = 42

Найти: х

Решение:

42 = 2х + 3

2х = 39

х = 19,5

Ответ: у (19,5) = 42

Дано: $v(t) = v_0 - gt$

Найти: ***t – ?***

Решение:

$$v_0 - gt = v;$$

$$gt = v_0 - v;$$

$$t = \frac{v_0 - v}{g};$$ т.е. $$t(v) = \frac{v_0 - v}{g}$$

t(v) – обратная функция к v(t)

Итак, v(t) – обратимая функция

Если функция $y = f(x)$ принимает каждое свое значение y только при одном значении x, то эту функцию называют **обратимой.**

Обратимые функции	**Необратимые функции**
	$y = x^2$ $x = \sqrt{y}$ $x = -\sqrt{y}$

- Пусть $y = f(x)$ – обратимая функция.
  Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определенное число x из области определения, такое, что $f(x) = y$.
  Это соответствие определяет функцию x от y, которую

Дано: $y = \dfrac{1}{x-2}$

Найти функцию, обратную данной $y = f^{-1}(x)$.

Решение:

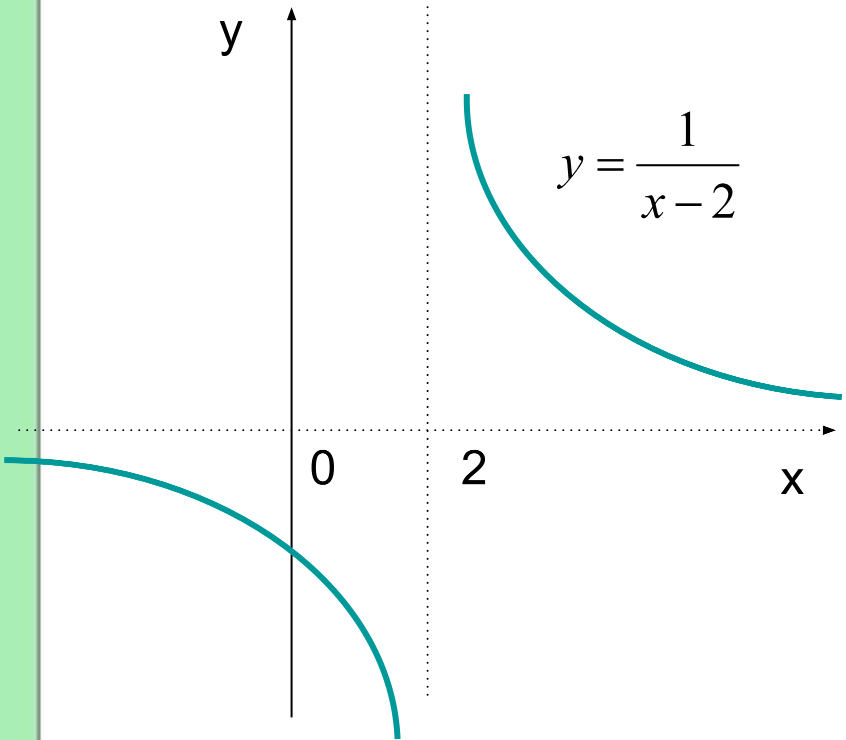
$$\frac{1}{x-2} = y$$

$$x - 2 = \frac{1}{y}$$

$$x = 2 + \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad y = 2 + \frac{1}{x}$$

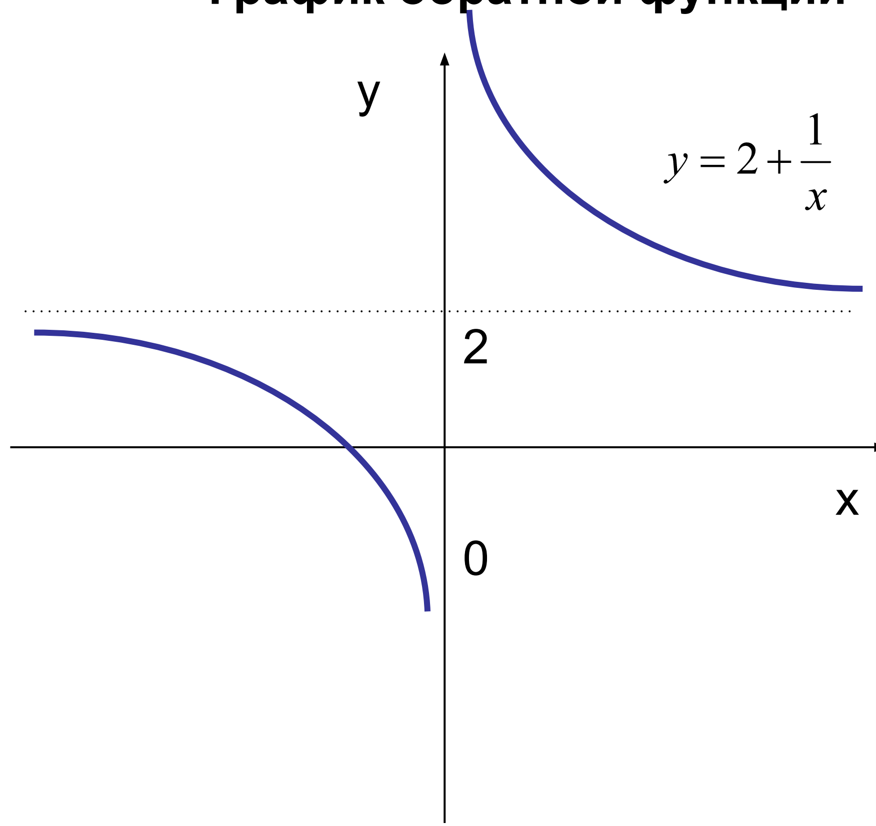
Ответ: $f^{-1}(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$

График данной функции



1. D(x)=(-∞;2)∪(2;+∞)
2. E(y)=(-∞;0)∪(0;+∞)

График обратной функции



1. D(x)=(-∞;0)∪(0;+∞)
2. E(y)=(-∞;2)∪(2;+∞)

Обратите внимание на то, что D(x) и E(y) у функций поменялись местами

Свойства обратных функций.

1. Область определения обратной функции f^{-1} совпадает с множеством значений исходной f, а множество значений обратной функции f^{-1} совпадает с областью определения исходной функции f:

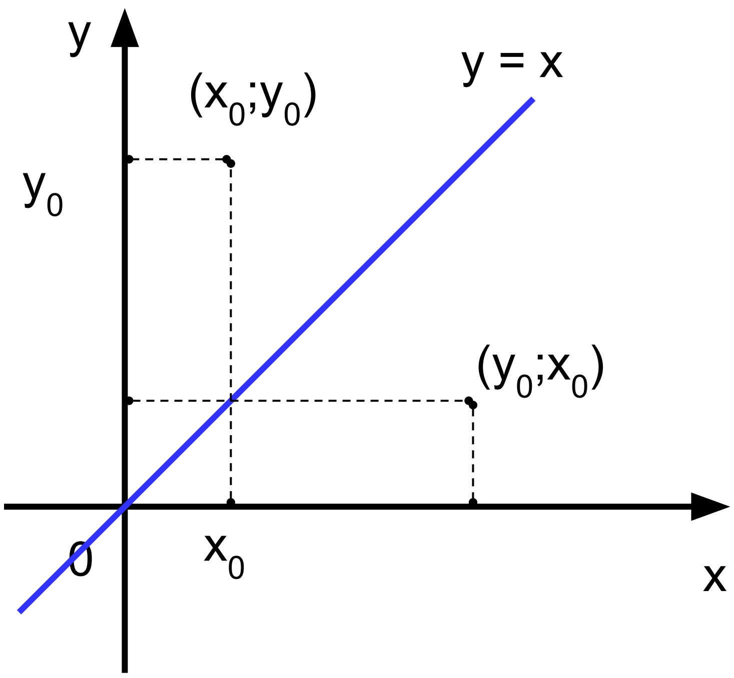
$$D(f^{-1}) = E(y),\ E(f^{-1}) = D(x).$$

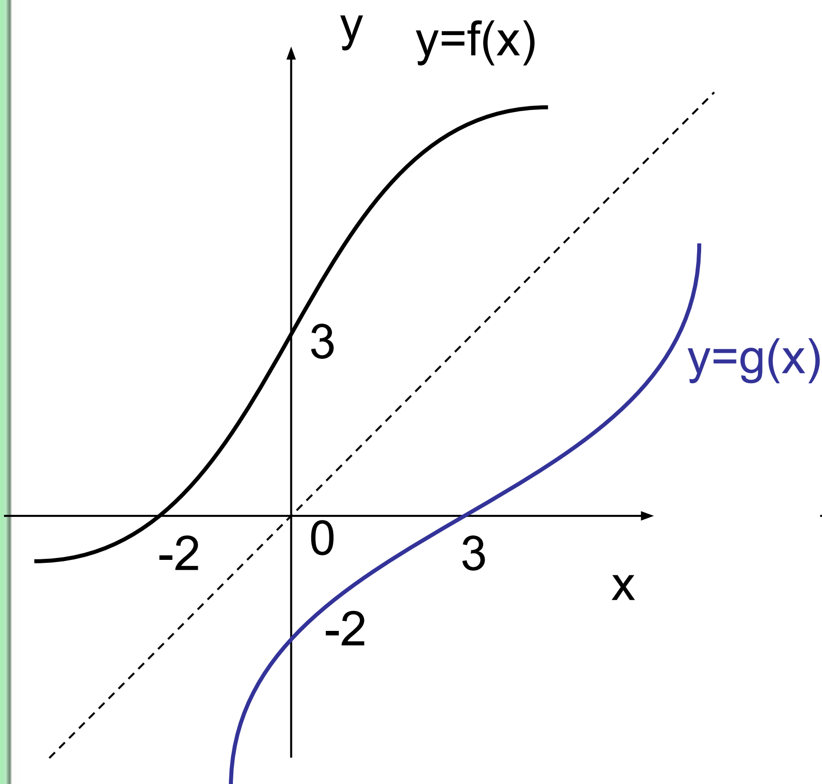
2. Монотонная функция является обратимой:

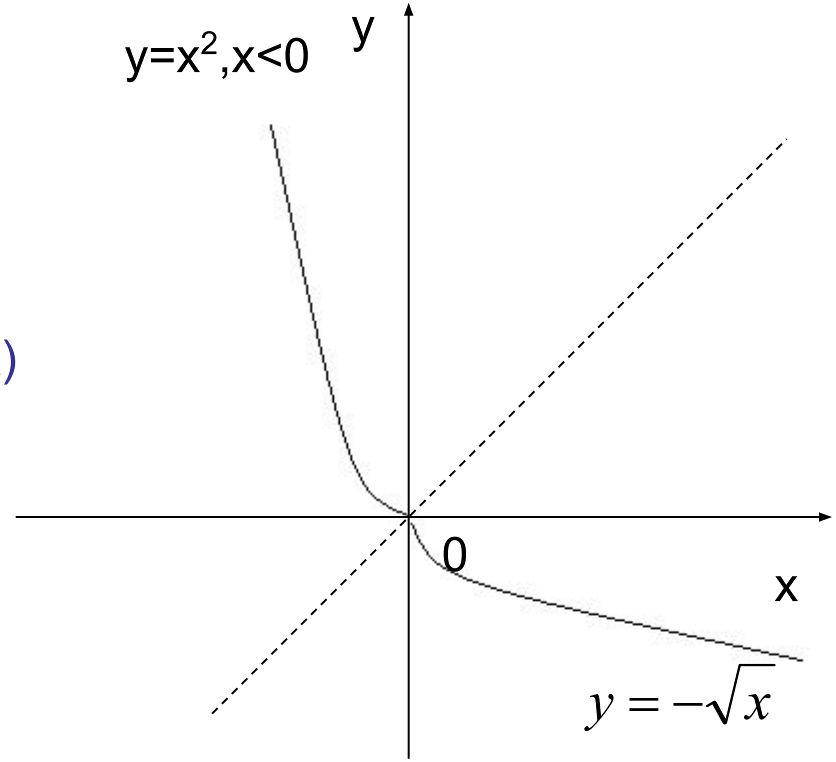
- если функция f возрастает, то обратная к ней функция f^{-1} также возрастает;
- если функция f убывает, то обратная к ней функция f^{-1} также убывает.

Свойства обратных функций.

3. Если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой y = x.







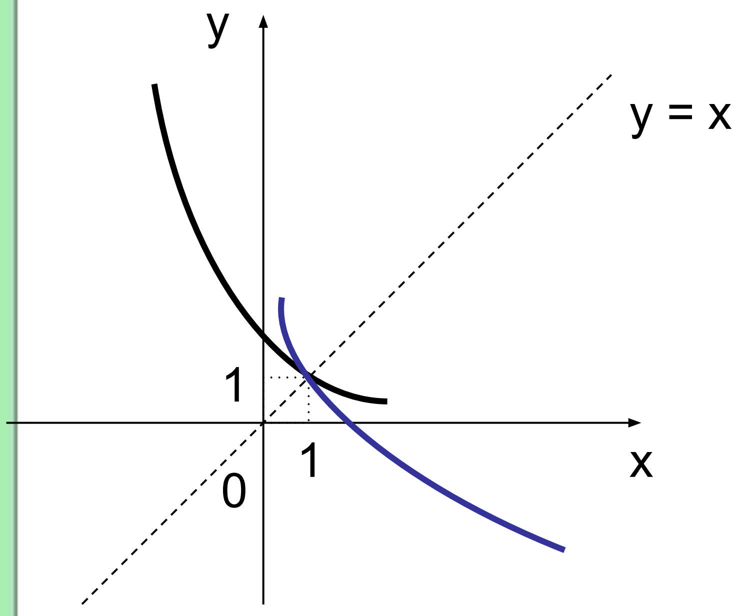
1. D(x)=R
2. E(y)=R
3. возрастающая

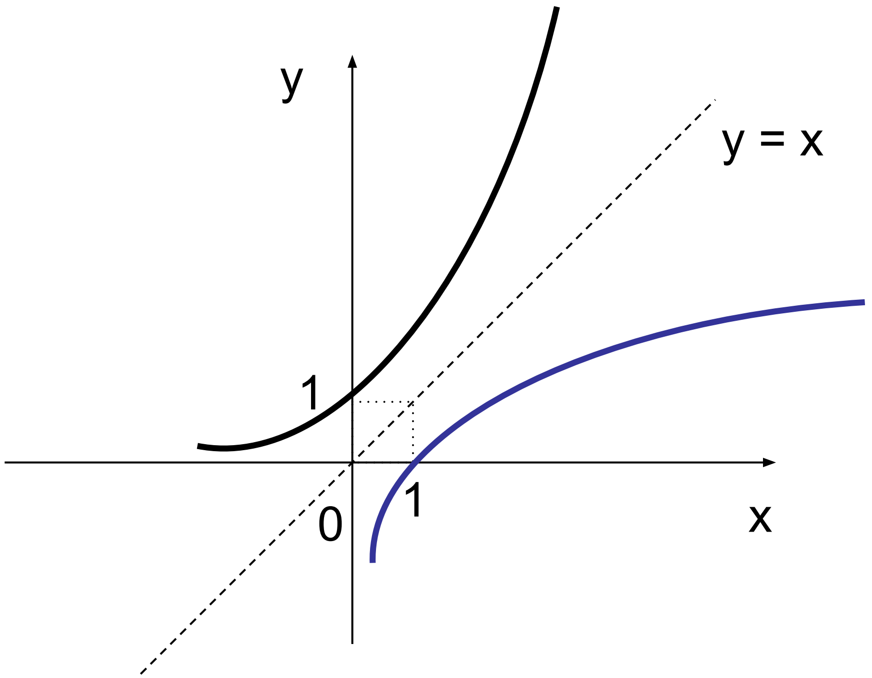
1. D(x)=R
2. E(y)=R
3. возрастающая

1. D(x)=(-∞;0]
2. E(y)=[0;+∞)
3. убывающая

1. D(x)=[0;+∞)
2. E(y)=(-∞;0]
3. убывающая

Графики взаимно-обратных фу





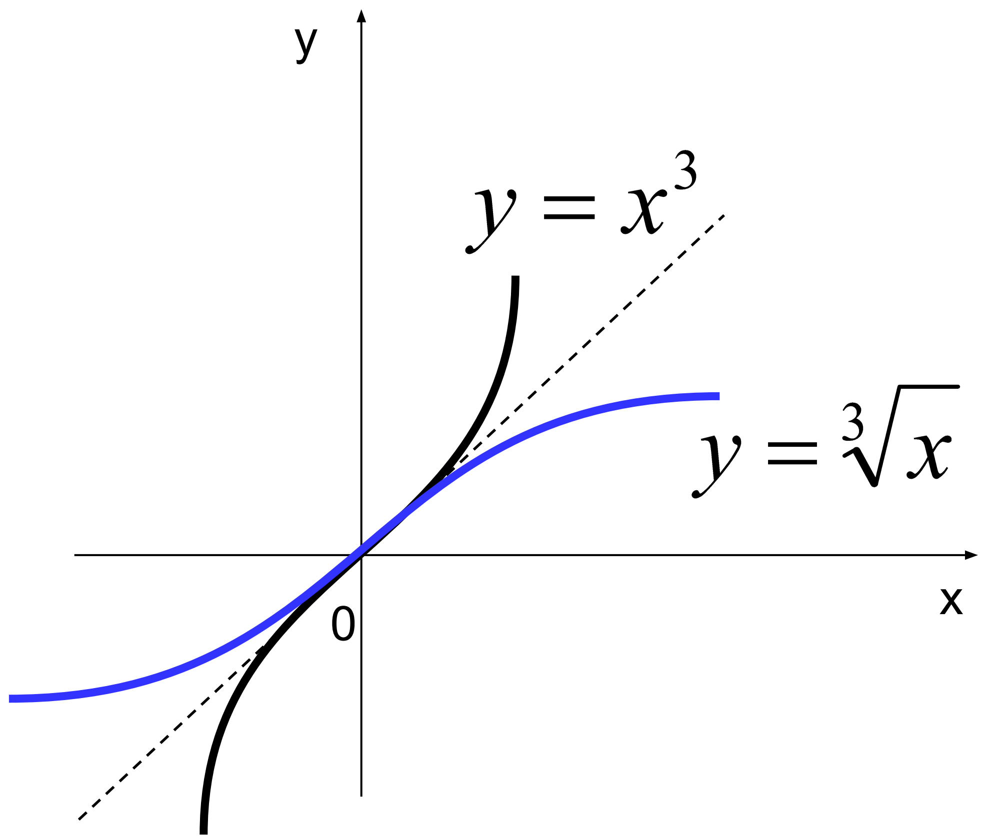
Построить график функции, обратной данной.

Дано: $y = x^3$

Построить функцию, обратную к данной.

Решение: $x^3 = y$

$$x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$$



Практический приём нахождения формулы функции, обратной к функции $y=f(x)$

Алгоритм

1. **Выяснить, будет ли функция $y = f(x)$ обратимой на всей области определения:** для этого достаточно выяснить, имеет ли уравнение $y = f(x)$ единственный корень относительно переменной x.
   Если нет, то попытаться выделить промежуток, где существует обратная функция (например, это может быть промежуток, где функция $y = f(x)$ возрастает или убывает).
2. **Из равенства $y = f(x)$ выразить x через y.**
3. **В полученной формуле ввести традиционные обозначения: аргумент обозначить через x, а функцию — через y.**

Пример

Найдите функцию, обратную к функции $y = 2x + 4$.

▶ Из равенства $y = 2x + 4$ можно однозначно выразить x через y:

$$x = \frac{1}{2}y - 2.$$

Эта формула задает обратную функцию, но в ней аргумент обозначен через y, а функция — через x.

Обозначим в полученной формуле аргумент через x, а функцию — через y.

Получаем функцию $y = \frac{1}{2}x - 2$, обратную к функции $y = 2x + 4$. ◁

Примеры решения задач

Найдите функцию, обратную к функции $y = \frac{1}{x-1}$.

Решение

▶ Область определения: $x \neq 1$. Тогда из равенства $y = \frac{1}{x-1}$ имеем

$$xy - y = 1,\ xy = y + 1,\ x = \frac{y+1}{y}.$$

Обозначим аргумент через x, а функцию — через y и получим функцию $y = \frac{x+1}{x}$, обратную к заданной. ◁

Комментарий

На всей области определения ($x \neq 1$) заданная функция обратима, поскольку из уравнения $y = \frac{1}{x-1}$ можно однозначно выразить x через y ($y \neq 0$ в области значений заданной функции). Полученная формула $x = \frac{y+1}{y}$ задает обратную функцию, но в ней аргумент обозначен через y, а функция — через x. Изменяя обозначения на традиционные, получаем окончательный результат.

Выполнить задания

№1 по цифрами 1) - 3)
№2 по цифрами 1) - 3)

1. Запишите формулу, которая задает функцию $y = g(x)$, обратную к заданной. Укажите область определения и множество значений функции $g(x)$:

1°) $y = 3x - 6$; 2°) $y = -3x - 6$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 5) $y = \sqrt{x}$.

2. На одном рисунке постройте графики данной функции и функции, обратной к данной:

1°) $y = 2x$; 2°) $y = x - 2$; 3) $y = -\frac{1}{x}$; 4*) $y = \frac{1}{x-1}$; 5*) $y = \sqrt{x+1}$.