СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Определение 1. Если каждое возможное значение **СВ** определяется одним числом, то **СВ** называется одномерной.

Например, положение точки на числовой прямой определяется одним числом – координатой $\boldsymbol{x}$. Текущая успеваемость (месячный рейтинг) студента по одному предмету – одномерная СВ. А текущая успеваемость студента по всем дисциплинам – **n**–мерная СВ, где **n** – число дисциплин.

Определение 2. Если каждое возможное значение **СВ** определяется **n** числами, то **СВ** называется

n–мерной **СВ** или **системой n случайных величин**.

Например, положение точки на плоскости определяется двумя числами – $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

Двумерная **СВ** обозначается (**X, Y**), а **n**- мерная **СВ** обозначается $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Рассмотрим систему двух дискретных СВ (**X, Y**).

Пусть СВ X принимает **n** значений $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, а СВ Y принимает **m** значений $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m$.

Через $\mathbf{p}_{ij}$ обозначим вероятность того, что СВ X примет значение $\boldsymbol{x}_i$, а СВ Y примет значение $\boldsymbol{y}_j$. $(\boldsymbol{i} = \overline{1,n}; \boldsymbol{j} = \overline{1,m})$.

Тогда закон распределения системы двух случайных величин (**X, Y**) задается матрицей распределения, представленной в виде таблицы:

X \ Y	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m
$\boldsymbol{x}_1$	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	p_{1m}
$\boldsymbol{x}_2$	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…	p_{2m}
…	…	…	…	…	…	…
$\boldsymbol{x}_i$	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…	p_{im}
…	…	…	…	…	…	…
$\boldsymbol{x}_n$	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nj}	…	p_{nm}

Здесь $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$.

Так как все возможные комбинации $\{ X = x_i, Y = y_j \}$, ($\boldsymbol{i} = \overline{1,n}$; $\boldsymbol{j} = \overline{1,m}$) образуют полную группу событий, то

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \,.}$$

Зная матрицу распределения системы двух СВ, можно найти ЗР каждой из них в отдельности.

События $\{ X = x_i, Y = y_j \}$ являются несовместными, поэтому

$$P(X = x_i) = p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{ij} + \ldots + p_{im} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \; -$$

суммирование по ***i***-й строке .

$$P(Y = y_j) = p_{1j} + p_{2j} + \ldots + p_{ij} + \ldots + p_{nj} = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{n} p_{ij} \; -$$

суммирование по ***j***-му столбцу.

Пример. Имеется портфель акций, состоящий из двух типов акций, отличающихся по ожидаемым нормам прибыли. Матрица распределения норм прибыли имеет вид:

		Глубокий спад	Рост	Мощный подъем
	Y X	0	0,2	0,5
Глубокий спад	0,1	0,1	0	0,2
Рост	0,2	0	0,3	0
Мощный подъем	0,4	0,1	0,3	0

Найти ЗР каждой СВ.

$x_1=0,1$: $P_{x1} = p_{11} + p_{12} + p_{13} = 0,1 + 0 + 0,2 = 0,3;$

$x_2 = 0,2$: $P_{x2} = p_{21} + p_{22} + p_{23} = 0 + 0,3 + 0 = 0,3;$

$x_3 = 0,4$: $P_{x3} = p_{31} + p_{32} + p_{33} = 0,1 + 0,3 + 0 = 0,4$

ЗР СВ X:

X	0,1	0,2	0,4
P	0,3	0,3	0,4

$y_1 = 0$: $P_{y1} = p_{11} + p_{21} + p_{31} = 0,1 + 0 + 0,1 = 0,2;$

$y_2 = 0,2$: $P_{y2} = p_{12} + p_{22} + p_{32} = 0 + 0,3 + 0,3 = 0,6;$

$y_3 = 0,5$: $P_{y3} = p_{13} + p_{23} + p_{33} = 0,2 + 0 + 0 = 0,2$

ЗР СВ Y:

Y	0	0,2	0,5
P	0,2	0,6	0,2

Числовые характеристики системы двух СВ

Числовыми характеристиками системы двух СВ являются **начальные и центральные моменты** различных порядков.

Определение 1. Начальным моментом порядка **k + s** называется математическое ожидание произведения $X^k Y^s$

$$\boxed{\nu_{k,s} = M(X^k Y^s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i^k y_j^s p_{ij}}$$

Определение 2. Центральным моментом порядка **k + s** называется

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_{k,s} &= M((X - M(X))^k (Y - M(Y))^s) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - M(X))^k (y_j - M(Y))^s p_{ij}\end{aligned}}$$

Рассмотрим начальные и центральные моменты первого и второго порядков, где порядок – это **k + s .**

$$\nu_{10} = M(X^1 Y^0) = M(X)$$

$$\nu_{01} = M(X^0 Y^1) = M(Y)$$

$$\mu_{10} = M(X - M(X)) = 0$$

$$\mu_{01} = M(Y - M(Y)) = 0$$

$$\mu_{20} = M(X - M(X))^2 = D(X)$$

$$\mu_{02} = M(Y - M(Y))^2 = D(Y)$$

$$\mu_{11} = M((X - M(X))(Y - M(Y)))$$

Определение 3. Центральный момент μ_{11} называется **ковариацией** или **корреляционным моментом** и вычисляется по формуле:

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - M(X))(y_j - M(Y))p_{ij}}$$

Свойства ковариации

1) $\operatorname{cov}(X, X) = M((X - M(X))(X - M(X))) =$

$= M(X - M(X))^2 = D(X);$

2) можно представить:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y);$$

3) Если X и Y – не зависимы, то cov (X, Y) = 0.

Определение 4. **Коэффициентом корреляции** называется отношение

$$\boxed{r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}}$$

Если $r_{xy} \neq 0$ то СВ X и Y коррелированны, т. е. связаны корреляционной зависимостью.

Если же $r_{xy} = 0$, то СВ X и Y не коррелированны.

Из условия, что СВ X и Y коррелированны, следует, что они зависимы, но из зависимости X и Y не следует, что они коррелированны,так как кроме корреляционной существуют еще и другие виды зависимости.

Если $\left|r_{xy}\right| \approx 1$, то связь между X и Y – тесная, а если $\left|r_{xy}\right| << 1$, т. е. $\left|r_{xy}\right|$ близок к 0, то связь между X и Y – слабая.

Вернемся к примеру о портфеле акций и дадим экономический смысл начальным и центральным моментам первого и второго порядков.

M(X) и M(Y) – ожидаемые нормы прибыли по двум типам акций.

D(X) или $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ – степень разброса норм прибыли первого типа акций, следовательно, степень риска инвестиционного проекта X.

D(Y) или $\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}$ показывает степень риска инвестиционного проекта Y.

cov (X, Y) показывает:

1) вариацию норм прибыли по двум типам акций;

2) тенденцию движения двух типов акций вверх и вниз.

Если cov (X, Y) > 0 и достаточно большая, то обе группы акций двигаются одинаково: обе вверх или обе вниз, следовательно, при покупке этих акций есть риск разориться.

Если cov (X, Y) < 0 и достаточно большая, то одни акции идут вверх, а другие вниз, или, наоборот, следовательно, такой портфель акций достаточно стабилен.

Пример (продолжение). Вычислим начальные и центральные моменты:

$$\nu_{10} = M(X^1 Y^0) = M(X),$$

$$\nu_{01} = M(X^0 Y^1) = M(Y),$$

$$\mu_{20} = M(X - M(X))^2 = D(X),$$

$$\mu_{02} = M(Y - M(Y))^2 = D(Y),$$

$$\mu_{11} = M((X - M(X))(Y - M(Y))) = \operatorname{cov}(X, Y),$$

коэффициент корреляции r_{xy}.

$$\nu_{10} = \mathrm{M(X)} = 0{,}1*0{,}3 + 0{,}2*0{,}3 + 0{,}4*0{,}4 = 0{,}25;$$

$$\nu_{01} = \mathrm{M(Y)} = 0*0{,}2 + 0{,}2*0{,}6 + 0{,}5*0{,}2 = 0{,}22;$$

$$\mu_{20} = \mathrm{D(X)} = 0{,}1^2 * 0{,}3 + 0{,}2^2 * 0{,}3 + 0{,}4^2 * 0{,}4 - (0{,}25)^2$$

$$= 0{,}0165;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}0165} = 0{,}12845;$$

$$\mu_{02} = D(Y) = 0^2 * 0{,}2 + 0{,}2^2 * 0{,}6 + 0{,}5^2 * 0{,}2 - (0.22)^2 =$$

$$= 0{,}0256;$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{0{,}0256} = 0{,}16;$$

$$\mu_{11} = \operatorname{cov}(X,Y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j p_{ij} - M(X)M(Y) =$$

$$= 0.1*0*0.1 + 0.1*0.2*0 + 0.1*0.5*0.2 + 0.2*0*0 +$$

$$+ 0.2*0.2*0.3 + 0.2*0.5*0 + 0.4*0*0.1 + 0.4*0.2*0.3 +$$

$$+ 0.4*0.5*0 - 0.25*0.22 = - 0.009;$$

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-0{,}009}{0{,}12845*0{,}16} = -0{,}438.$$

Так как cov (X, Y) < 0, то одни акции идут вверх, а другие вниз, но cov (X, Y) мала, кроме того $|r_{xy}| \ll 1$, поэтому СВ X и Y коррелированны, но связь между ними слабая. Такой портфель акций не слишком стабилен.

Определение. Условным законом распределения одной из СВ, входящих в систему (X,Y), называется ЗР СВ Y при условии, что $X = x_i$ или ЗР СВ X при условии, что $Y = y_j$.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий

P(AB) = P(A)*P(B/A).

Отсюда

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Аналогично:

$$\boxed{P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)},}$$

$$\boxed{P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}.}$$

Например,

$$P(Y = y_2 / X = x_1) = \frac{P_{12}}{P_{x1}} = \frac{0}{0,3} = 0,$$

$$P(X = x_3 / Y = y_2) = \frac{P_{32}}{P_{y2}} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5.$$

Найдем условные законы распределения и условные математические ожидания.

При X = $x_1 = 0{,}1$

$$P(Y = y_j / X = x_1) = \frac{P_{1j}}{P_{x1}} = \frac{P_{1j}}{0{,}3}.$$

Тогда условный закон распределения СВ Y при $x_1 = 0{,}1$ будет:

Y	0	0,2	0,5
$P(Y = y_j / X = x_1)$	$\frac{0{,}1}{0{,}3}$	$\frac{0}{0{,}3}$	$\frac{0{,}2}{0{,}3}$

Математическое ожидание:

$$M(Y / X = x_1) = 0 * \frac{1}{3} + 0{,}2 * 0 + 0{,}5 * \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

При $X = x_2 = 0,2$

$$P(Y = y_j / X = x_2) = \frac{P_{2j}}{P_{x2}} = \frac{P_{2j}}{0,3}$$

Y	0	0,2	0,5
$P(Y = y_j / X = x_2)$	$\frac{0}{0,3}$	$\frac{0,3}{0,3}$	$\frac{0}{0,3}$

$$M(Y / X = 0,2) = 0 * 0 + 0,2 * 1 + 0,5 * 0 = 0,2.$$

При $X = x_3 = 0{,}4$

$$P(Y = y_j / X = x_3) = \frac{P_{3j}}{P_{x3}} = \frac{P_{3j}}{0{,}4}.$$

Y	0	0,2	0,5
$P(Y = y_j / X = x_3)$	$\frac{0{,}1}{0{,}4}$	$\frac{0{,}3}{0{,}4}$	$\frac{0}{0{,}4}$

$$M(Y / X = 0{,}4) = 0 * \frac{1}{4} + 0{,}2 * \frac{3}{4} + 0{,}5 * 0 = 0{,}15.$$

При $Y = y_1 = 0$

$$P(X = x_i / Y = y_1) = \frac{P_{i1}}{P_{y1}} = \frac{P_{i1}}{0,2}.$$

X	0,1	0,2	0,4
$P(X = x_i / Y = y_1)$	$\frac{0,1}{0,2}$	$\frac{0}{0,2}$	$\frac{0,1}{0,2}$

$$\text{M(X/Y=0)} = 0,1 * \frac{1}{2} + 0,2 * 0 + 0,4 * \frac{1}{2} = 0,25.$$

и т. д.

Определение. Случайные величины X и Y, образующие систему, называются **независимыми**, если З.Р. одной из них не зависит от того, какое значение приняла другая С. В.

Необходимым и достаточным условием независимости дискретных С.В. X и Y является равенство:

$$\boxed{P_{ij} = P_{xi} * P_{yj}}$$

(i = 1, … , n; j = 1, … , m).

В нашем примере $P_{11} = 0{,}1$, $P_{x1} = 0{,}3$, $P_{y1} = 0{,}2$.

Проверим, выполняется ли условие независимости для С. В. X и Y.

$$P_{x1} * P_{y1} = 0,3 * 0,2 = 0,06 \neq P_{11}.$$

Следовательно, С. В. X и Y зависимы.