ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.

ПЛАН УРОКА

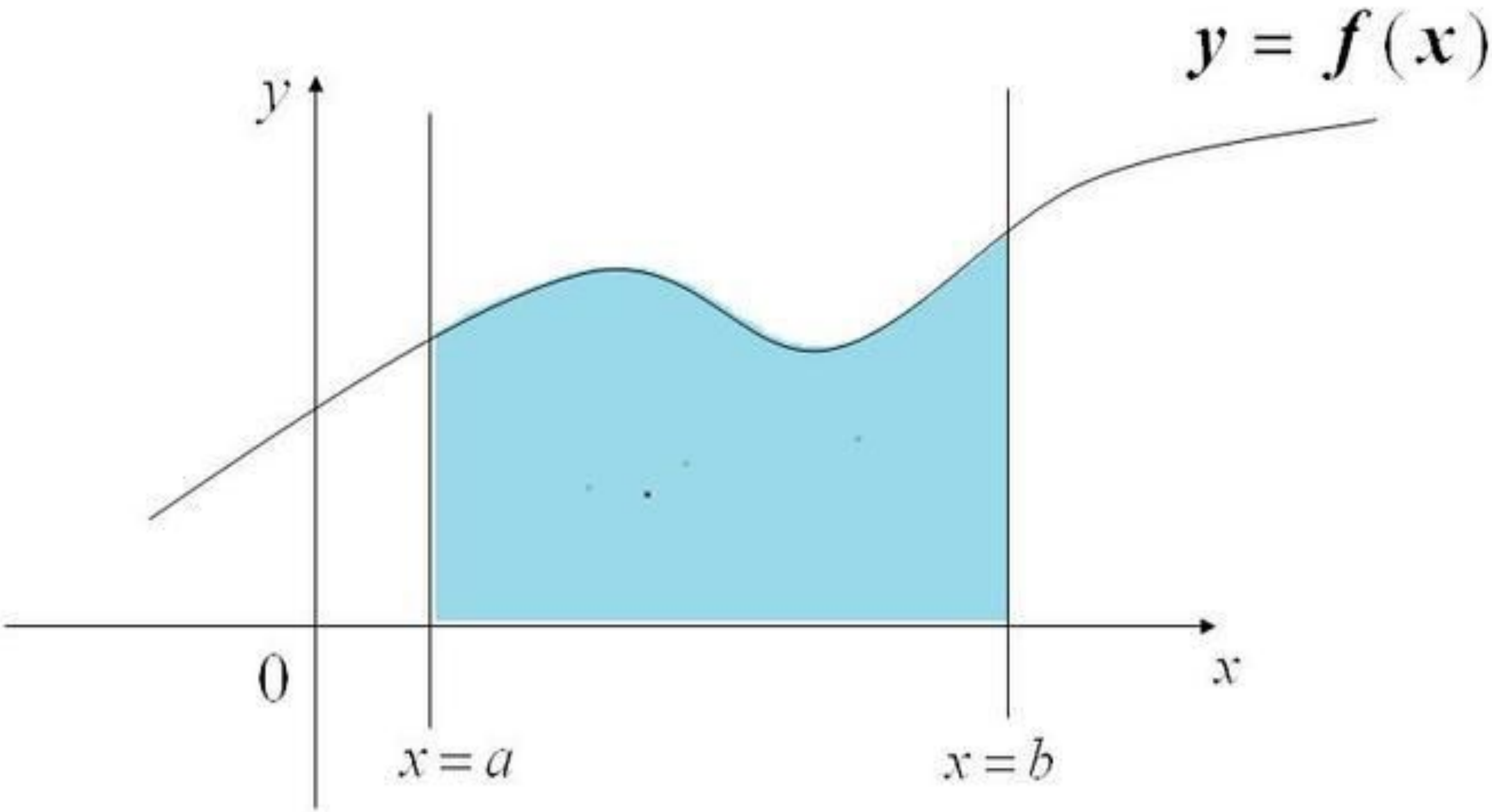
1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЁМОВ ТЕЛ ВРАЩЕНИЕ.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА В ФИЗИКЕ

Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

Криволинейная трапеция



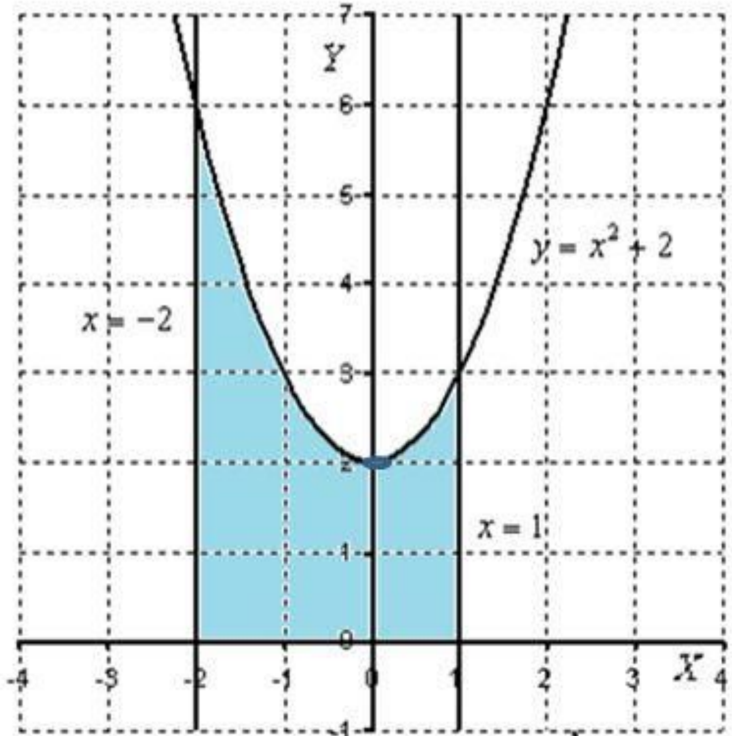
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Пример 1

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 2$$
$$y = 0$$
$$x = -2,$$
$$x = 1$$

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$



На отрезке $[-2;1]$ **график фукции** $y = x^2 + 2$ **расположен на осью** OX

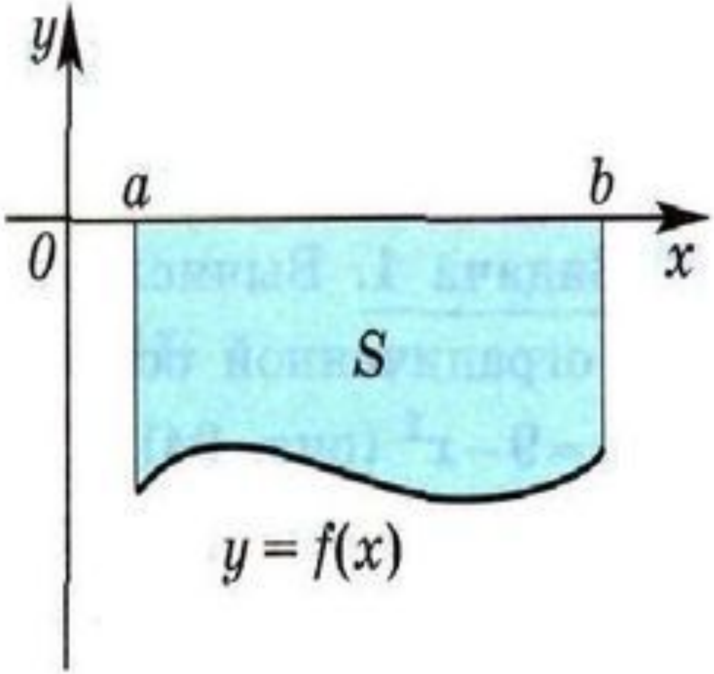
Закрашенная фигура криволинейная трапеция

$$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$S = \int_{-2}^{1}(x^2+2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9$$

Ответ: $S = 9$ $ед^2$

Искомая площадь фигуры равна площади фигуры, ***симметричной*** данной относительно оси Ох

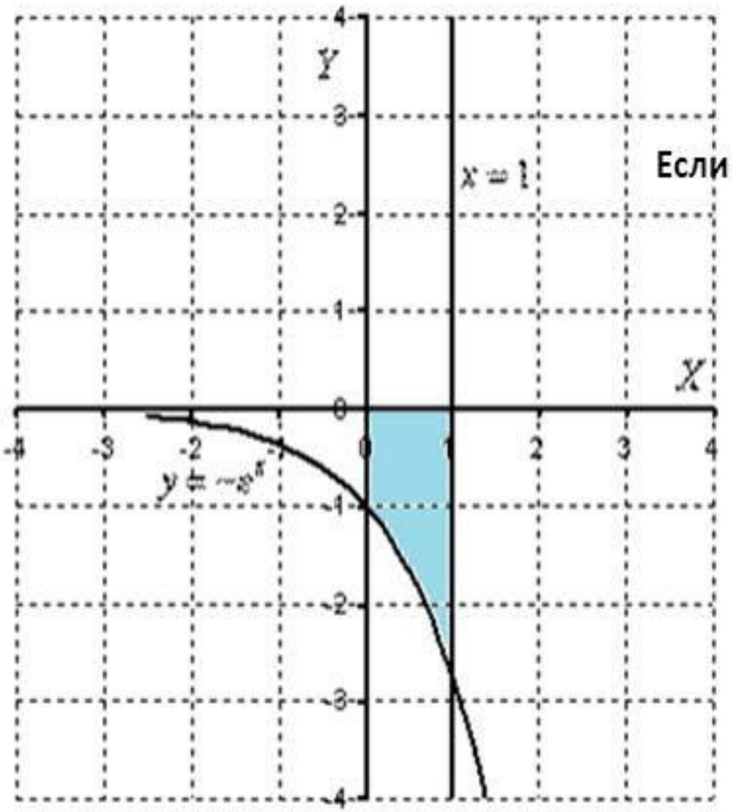


Если $f(x) \leq 0$ на отрезке $[a; \mathrm{b}]$, то площадь ***криволинейной трапеции*** равна

$$S = \int_a^b (-f(x))dx$$

Пример 3 2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-e^{x}$ и $x=1$



и координатными осями.

Решение: Выполним чертеж:

Если криволинейная трапеция полностью расположена под осью OX

, то её площадь можно найти по формуле:

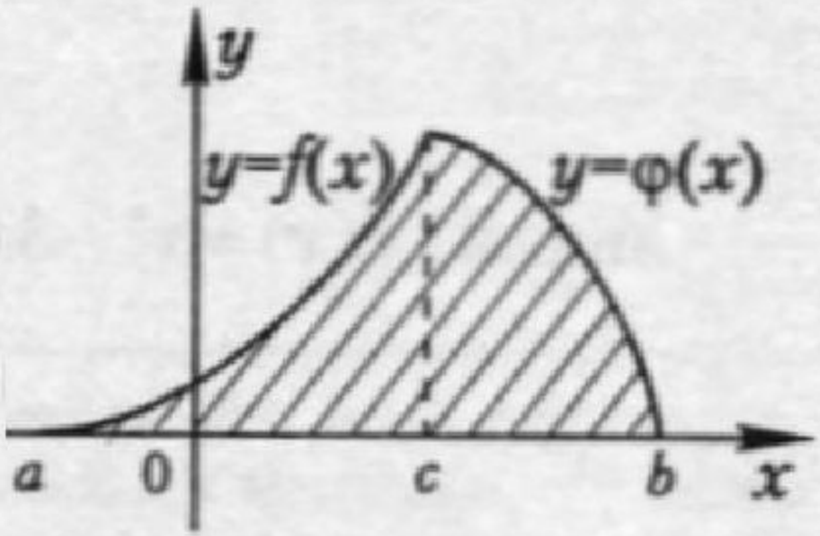
$$S=-\int_{a}^{b} f(x)dx$$

В данном случае:

$$S=-\int_{0}^{1}(-e^{x})dx=\int_{0}^{1}e^{x}dx=e^{x}\Big|_{0}^{1}=e^{1}-e^{0}=e-1$$

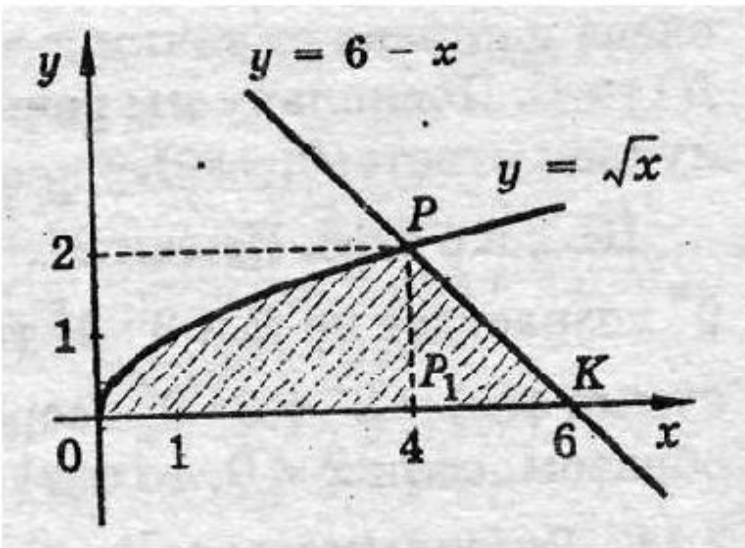
Ответ: $S=(e-1)\ ед^{2}\approx 1{,}72\ ед^{2}$

Площадь фигуры равна ***сумме*** площадей криволинейных трапеций



$$S = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b \varphi(x)\,dx .$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x, y = 0$



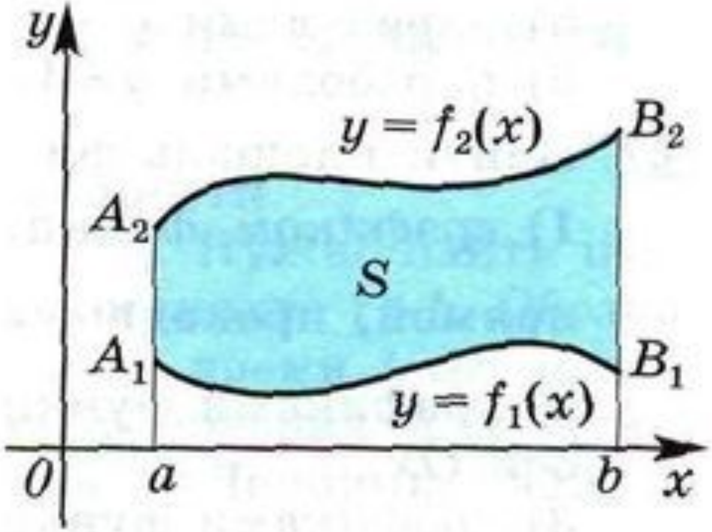
Решение. *Точки пересечения заданных линий*: O(0;0), K(6;0), P(4;2)

Фигура состоит из криволинейной трапеции и прямоугольного треугольника.

$$S_{\text{фигуры}} = S_{OPP_1} + S_{\Delta PP_1K}$$

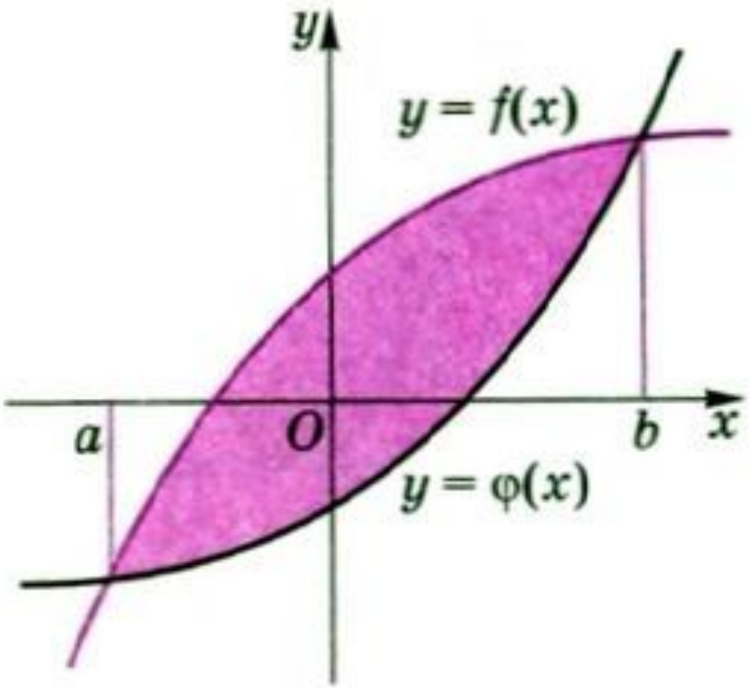
$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 7\frac{1}{3}$$

Площадь фигуры равна ***разност и*** площадей криволинейных трапеций



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

Площадь фигуры вычисляется как ***разность*** площадей криволинейных трапеций на отрезке $[a;b]$



Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$

непрерывны на отрезке $[a;b]$

и $f(x) > \varphi(x)$ *на* $(a;b)$, *то*

$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx$$

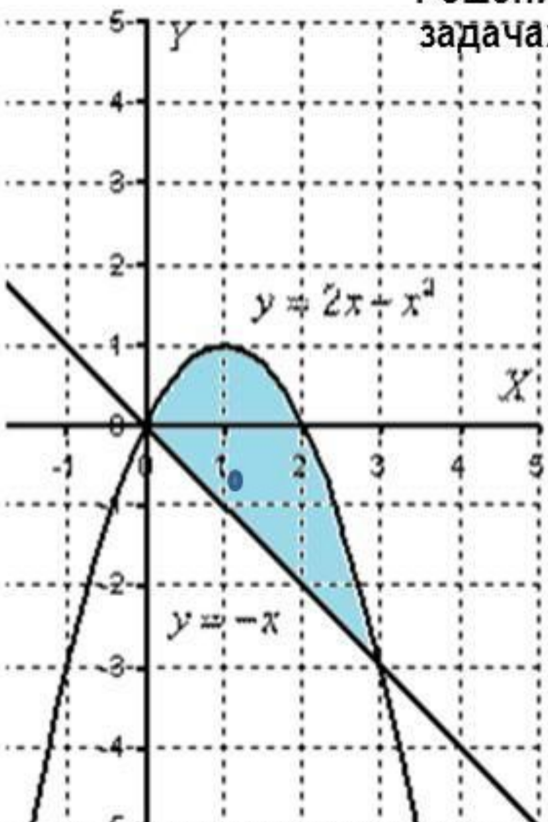
$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

Пример 4

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$y = 2x - x^2$, $y = -x$

Решение: Сначала нужно выполнить чертеж, при построении чертежа в задачах на площадь нас интересуют точки пересечения линий. Найдем точки пересечения параболы $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$



Аналитически. Решаем уравнение:

$$2x - x^2 = -x$$

$$3x - x^2 = 0$$

$$x(3 - x) = 0$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 3$$

Значит, нижний предел интегрирования $a = 0$, верхний предел интегрирования $b = 3$

: Если на отрезке $[a; b]$ некоторая непрерывная функция $f(x)$ больше либо равна некоторой непрерывной функции $g(x)$, то площадь соответствующей фигуры можно найти по формуле:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

на отрезке $[0;3]$ парабола располагается выше прямой, а поэтому из $2x - x^2$ необходимо вычесть $-x$

Искомая фигура ограничена параболой $y = 2x - x^2$ сверху и прямой $y = -x$ снизу. На отрезке $[0;3]$ $2x - x^2 \geq -x$ по соответствующей формуле:

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - 0 + 0$$

$$= \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2} \text{ кв.ед}$$

2

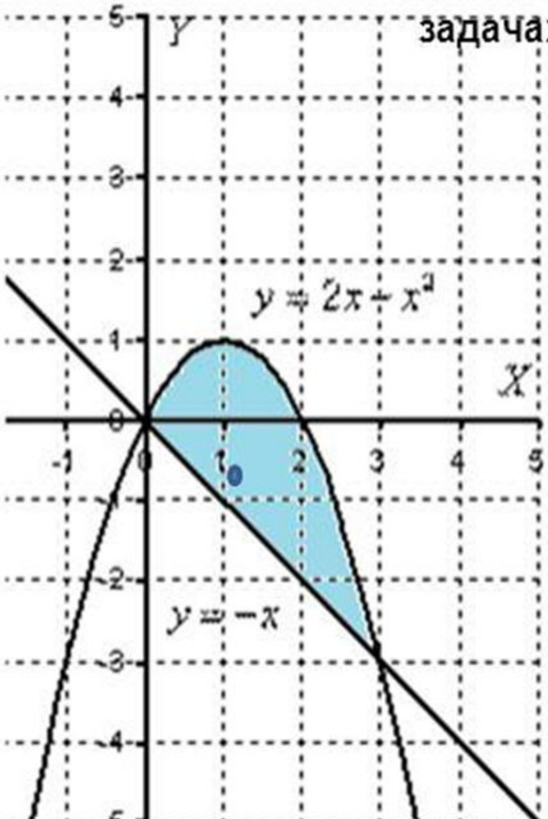
$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

Пример 4

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$y = 2x - x^2$, $y = -x$

Решение: Сначала нужно выполнить чертеж, при построении чертежа в задачах на площадь нас интересуют точки пересечения линий. Найдем точки пересечения параболы $y = 2x - x^2$ **и прямой** $y = -x$



Аналитически. Решаем уравнение:

$$2x - x^2 = -x$$

$$3x - x^2 = 0$$

$$x(3 - x) = 0$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 3$$

Значит, нижний предел интегрирования $a = 0$ **, верхний предел интегрирования** $b = 3$

: Если на отрезке $[a;b]$ **некоторая непрерывная функция** $f(x)$ **больше либо равна некоторой непрерывной функции** $g(x)$ **, то площадь соответствующей фигуры можно найти по формуле:**

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

на отрезке $[0;3]$ **парабола располагается выше прямой, а поэтому из** $2x - x^2$ **необходимо вычесть** $-x$

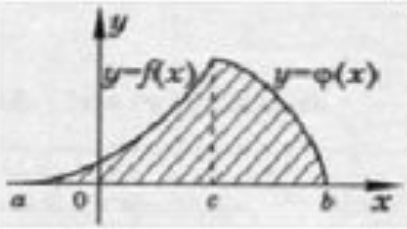
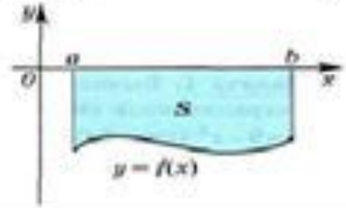
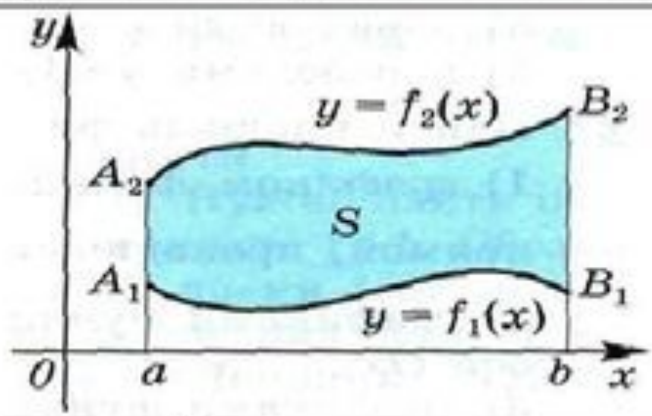
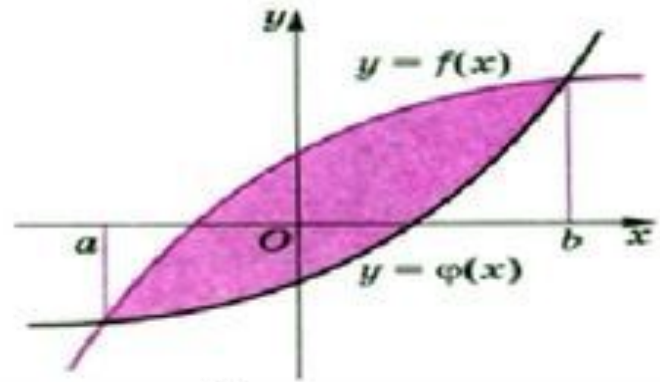
На отрезке $[0;3]$ $2x - x^2 \geq -x$

Искомая фигура ограничена параболой $y = 2x - x^2$ **сверху и прямой** $y = -x$ **снизу.**

, по соответствующей формуле:

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - 0 + 0 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

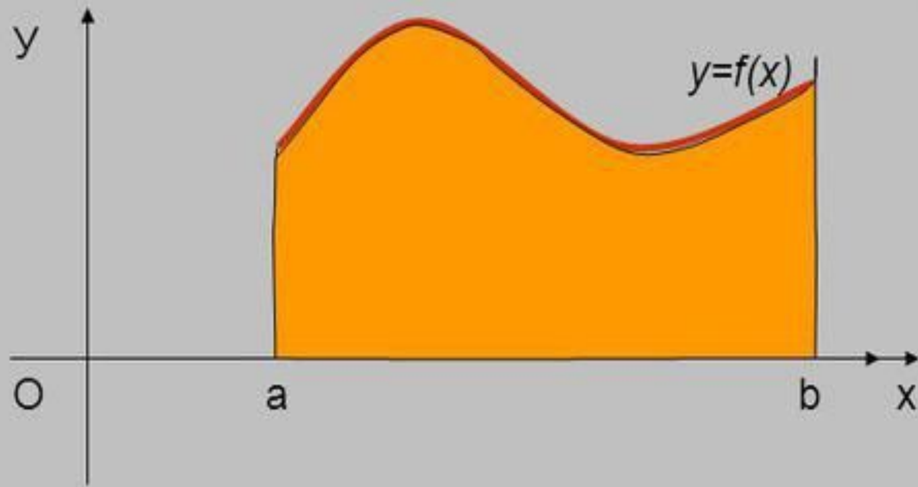
Ответ: $S = 4\frac{1}{2}$ ед^2

Нахождение площади фигуры, через площадь криволинейной трапеции	
 $S=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b \varphi(x)\,dx$.	 $S=\int_a^b (-f(x))dx$
	
$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$	$S=\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx$

Вычисление объемов тел вращения

Применение интеграла

Постановка задачи



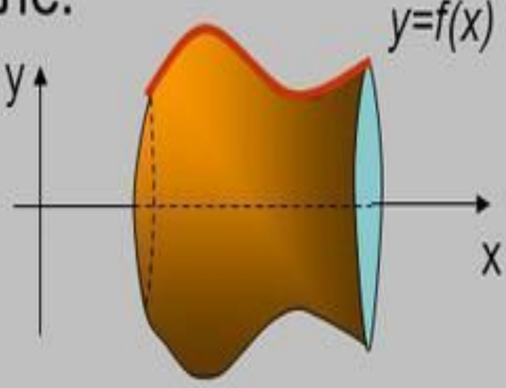
Пусть функция y = f(x) определена, неотрицательна и непрерывна на отрезке [a; b],
тогда график кривой *y=f(x)* на [a; b], ось OX, прямые x = a, x = b образуют криволинейную трапецию.

Рассмотрим тело, образованное вращением этой криволинейной трапеции вокруг оси OX и найдем его объем.

- Тогда объем тела вращения вокруг оси OX:

$$V=\int_a^b S(x)\partial x=\int_a^b \pi\cdot f^2(x)\partial x=\pi\int_a^b f^2(x)\partial x$$

- Если тело образовано вращением криволинейной трапеции, образованной функцией *y=f(x)* на отрезке [a;b],вокруг оси OX, то его объём можно найти по формуле:



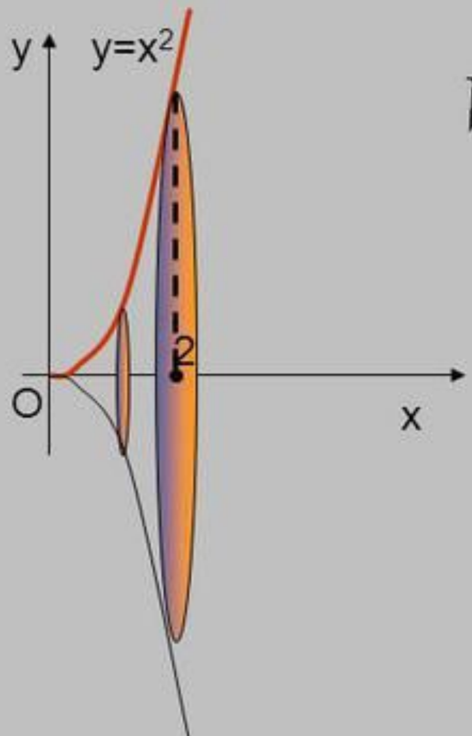
$$\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)\partial x}$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\partial x$$

Задача.

Пусть тело образовано вращением параболы $y=x^2$ на отрезке [0;2] вокруг оси ОХ.

Найдите объём тела вращения.



$$V = \int_0^2 S(x)\partial x = \int_0^2 \pi\cdot(x^2)^2\partial x =$$

$$= \pi\int_0^2 x^4\partial x = \pi\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2 = \frac{32\pi}{5}(\textit{куб.ед.})$$

Применение определённого интеграла в физике

Рассмотрим решение задачи на перемещение материальной точки

Предположим, что точка движется по прямой (по оси OX) и нам известна скорость этой точки. Перемещение точки по оси будем считать функцией времени: **$s=s(t)$.** Как **найти перемещение** точки за промежуток времени **$[t_1 ; t_2]$**?

Известно: $V(t) = S'(t)$

Тогда перемещение равно:

$$S = \int_{t1}^{t2} \upsilon(t)\,dt$$

$$S=\int_{t1}^{t2}\upsilon(t)dt$$

Рассмотрим пример:

Материальная точка движется со скоростью:

$$\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{t}) = \ \boldsymbol{3t^3+2t+1}$$

Вычислить перемещение за промежуток времени [1;2] секунды

$$S = \int_1^2 (3t^2 + 2t + 1)dt = (3\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^2}{2} + t)\Big|_1^2 =$$

$= (8+4+2) – (1+1+1) = 11$

Ответ: перемещение 11метров

Величины	Вычисление производной	Вычисление интеграла
A – работа; F – сила; N – мощность	$F(x) = A'(x);$ $N(t) = A'(t).$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx;$ $A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt.$
m – масса тонкого стержня; ρ – линейная плотность	$\rho(x) = m'(x).$	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx$
q – электрический заряд; I – сила тока	$I(t) = q'(t).$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$
S – перемещение; υ – скорость	$\upsilon(t) = S'(t).$	$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt$
Q – количество теплоты; c – теплоёмкость	$c(t) = Q'(t).$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$