АЛГЕБРА

для потока «Прикладная математика и информатика»

Четвёртый модуль 2020 – 2021 уч. года

ЛЕКЦИЯ 1

Г.М. Полотовский
(polotovsky@gmail.com)

7 апреля 2021 г.

Что такое алгебра?

В школе: это то, что не геометрия (и не физкультура,….)

В математике: раздел математики, который изучает

Правила преобразования Формул («**буквенное исчисление**»)

Многочлены, их свойства, задача о корнях многочленов («**алгебра многочленов**»)

Системы линейных уравнений, линейные пространства («**линейная алгебра**»)

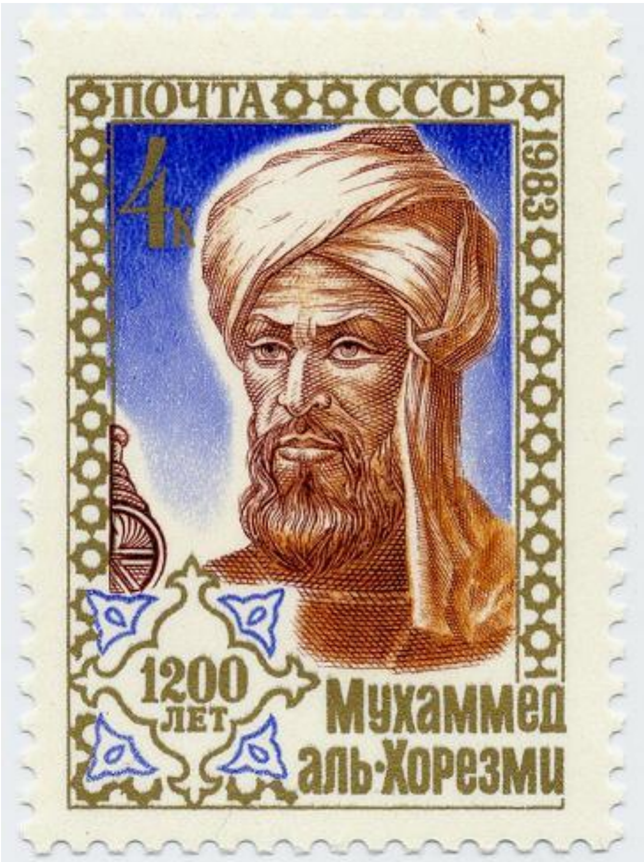
Множества и с заданными на них операциями = алгебраические структуры («**абстрактная алгебра**»)

Алгебра – термин из абстрактной алгебры, обозначающий алгебраическую структуру конкретного вида

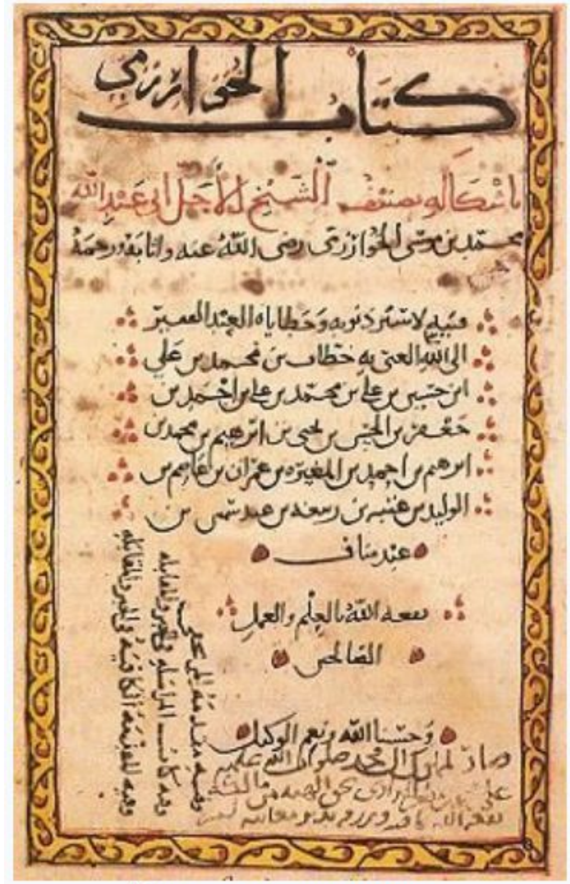
Происхождение слова «алгебра»

«Китаб **аль-джебр** ва-ль-мукабала»

(Книга восполнения и противопоставления)



Аль Хорезми, ок.779 - 850



Первая страница книги

Мухаммед ибн Муса абу Абдалла (*абу Джафар*) **аль Хорезми** аль Маджуси аль Кутрубули

§ 1. Группы: основные определения, примеры.

Определение 1. Говорят, что на множестве M задана *бинарная операция* $*$, если любой упорядоченной паре $\langle a, b\rangle$ элементов $a, b \in M$ поставлен в соответствие некоторый элемент из M. Другими словами, бинарная операция на М – это отображение
$*: M \times M \to M$. Результат применения операции $*$ к паре $\langle a, b\rangle$ обозначается $a * b$, т. е.
$*: \langle a, b\rangle \mapsto a * b$.

Примеры.

1. Пусть М – множество натуральных чисел. Тогда в качестве бинарных алгебраических операций на М можно рассматривать операции сложения и умножения натуральных чисел. Операции вычитания и деления не являются бинарной алгебраической операцией на М, так как не для всяких двух натуральных чисел их разность (частное) является натуральным числом.

2. Пусть М – множество целых чисел. Здесь операция вычитания уже будет являться бинарной алгебраической операцией, так как разность целых чисел является целым числом.

3. Пусть M – множество точек на плоскости. Зададим на M бинарную алгебраическую операцию, поставив в соответствие каждой паре точек середину отрезка, соединяющего эти точки.

Определение 2. Операция $*$: $M \times M \to M$ называется *ассоциативной*, если для любых $a, b, c \in M$ выполняется $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Примеры.

1) Пусть M – множество целых чисел. Операции сложения и умножения на M являются ассоциативными. Операция вычитания не является ассоциативной, так как равенство $(a-b)-c = a-(b-c)$ выполняется не для всех a, b, c из M.

2) Пусть M – множество положительных действительных чисел. Зададим на M алгебраическую операцию следующим образом: $a * b = a^b$ для любых a, b из M. Очевидно, операция $*$ не является ассоциативной.

3) Пусть A – произвольное множество, M – множество отображений из A в A, $\circ$ - операция композиции на M. Операция $\circ$ является ассоциативной.

Для четырёх элементов, взятых в фиксированном порядке, имеется пять способов расстановки скобок, показывающих порядок выполнения операции $*$:

1) $((a_1 * a_2) * a_3) * a_4$, 2) $(a_1 * a_2) * (a_3 * a_4)$,

3) $(a_1 * (a_2 * a_3)) * a_4$, 4) $a_1 * (a_2 * (a_3 * a_4))$,

5) $a_1 * ((a_2 * a_3) * a_4)$.

Из определения 2 легко следует, что если * ассоциативна,то каждое из выражений 2) – 5) совпадает с 1).

Теорема 1.1. (об обобщенной ассоциативности).

Если бинарная операция $*$ *на* M *ассоциативна, то результат ее последовательного применения к* n *элементам множества М не зависит от расстановки скобок.*

Доказательство (индукция по количеству n элементов, участвующих в последовательном применении операции).

База индукции $n=3$: утверждение теоремы совпадает со свойством ассоциативности.

Предположение индукции: пусть утверждение теоремы верно для любого числа элементов, большего 3 и меньшего n.

Докажем, что утверждение теоремы верно для числа элементов, равного n.

Любой вариант расстановки скобок имеет вид $(a_1 * \cdots * a_k) * (a_{k+1} * \cdots * a_n)$ для некоторого $1 \le k \le n-1$. Скобки внутри не расставлены, так как в произведениях $a_1 * \cdots * a_k$ и $a_{k+1} * \cdots * a_n$ количество сомножителей строго меньше n и по предположению индукции расстановка скобок в них несущественна.

Будем приводить любой вариант расстановки скобок к левонормированному варианту: $(\cdots((a_1 * a_2) * a_3) \cdots * a_{n-1}) * a_n$.

Возможны два варианта:

1) $k=n-1$ и $(a_1*\cdots*a_k)*(a_{k+1}*\cdots*a_n)=(a_1*\cdots*a_{n-1})*a_n$. По предположению индукции в произведении $a_1*\cdots*a_{n-1}$ результат не зависит от расстановки скобок и мы можем расставить их левонормированным образом: $(\cdots((a_1*a_2)*a_3)\cdots)*a_{n-1}$. Тогда $(a_1*\cdots*a_{n-1})*a_n=(\cdots((a_1*a_2)*a_3)\cdots)*a_{n-1})*a_n$.

2) $k<n-1$. Тогда

$\underbrace{(a_1*\cdots*a_k)}_{1}*(\underbrace{a_{k+1}*\cdots*a_{n-1}}_{2}*\underbrace{a_n}_{3})=((\underbrace{a_1*\cdots*a_k}_{1})*(\underbrace{a_{k+1}*\cdots*a_{n-1}}_{2}))*\underbrace{a_n}_{3}$ и мы свели все к случаю 1). ■

Теорема 1.1. позволяет для любого элемента $a\in M$ и любого натурального n определить n***-ю степень*** a: $a^n=\underbrace{a*\cdots*a}_{n}$.

Если операция в M обозначалась +, то говорят не о степени, а о ***кратном*** элемента a: $na=\underbrace{a+\cdots+a}$.

Свойства.

1) $a^n*a^m=a^{n+m}$ $\qquad na+ma=(n+m)a$;

2) $\left(a^n\right)^m=a^{n\,m}$ $\qquad m(na)=(mn)a$

Определение 3. (*Алгебраическая группа*).

Теорема 1.2. *В любой группе нейтральный элемент единственный.*
В любой группе обратный элемент единственный для каждого элемента группы.

Доказательство.

Пусть e_1, e_2 – два нейтральных элемента. Рассмотрим произведение: $e_1 * e_2$. Так как e_1 – нейтральный элемент, то $e_1 * e_2 = e_2$. Аналогично, так как e_2 – нейтральный элемент, то $e_1 * e_2 = e_1$. Следовательно, $e_1 = e_2$.

Пусть g_1^{-1}, g_2^{-1} – два обратных элемента для элемента g. Рассмотрим произведение $g_1^{-1}*g*g_2^{-1}$ (так как мы рассматриваем группу, то операция $*$ ассоциативна, и скобки можно расставить любым образом). Так как g_1^{-1} – обратный к g, то $g_1^{-1}*g*g_2^{-1}=(g_1^{-1}*g)*g_2^{-1}=e*g_2^{-1}=g_2^{-1}$. Аналогично, так как g_2^{-1} – обратный к g, то $g_1^{-1}*g*g_2^{-1}=g_1^{-1}*(g*g_2^{-1})=g_1^{-1}*e=g_1^{-1}$. Следовательно, $g_1^{-1}=g_2^{-1}$. ■

Теорема 1.3. $(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})^{-1}=\boldsymbol{b}^{-1}*\boldsymbol{a}^{-1}$.

Доказательство.

$$(a*b)*(a*b)^{-1}=a*b*b^{-1}*a^{-1}=a*(b*b^{-1})*a^{-1}=a*e*a^{-1}=a*a^{-1}=e.$$ ■

Примеры.

1) Группами (коммутативными) являются множества целых, рациональных, вещественных, комплексных чисел с операцией сложения.

2) Группами (коммутативными) являются множества Q^*, R^* и C^* (множество рациональных чисел без 0, множество вещественных чисел без 0, множество комплексных чисел без 0) с операцией умножения.

3) Множество $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ матриц порядка $n\times m$ с действительными коэффициентами является группой (коммутативной) по сложению. Множество $GL_n(\mathbb{R})$ квадратных матриц одного порядка с действительными коэффициентами и определителем, отличным от 0, является группой (некоммутативной) по умножению и называется полной линейной группой. Множество $SL_n(\mathbb{R})$ матриц с определителем равным 1, является группой (некоммутативной) по умножению и называется специальной линейной группой.

4) Рассмотрим множество G, состоящее из одного элемента e, с операцией $*$: $e*e=e$. Очевидно, G является абелевой группой.

5) Рассмотрим множество $G=\{-1,1\}$ с операцией умножения: $1*(-1)=(-1)*1=-1,\ \ (-1)*(-1)=1*1=1$. Очевидно, G является группой из 2 элементов: есть ассоциативность, 1 является нейтральным элементом, $1^{-1}=1,\ \ (-1)^{-1}=-1$.

6) Множество S_n подстановок n-ой степени является группой (некоммутативной) относительно операции умножения подстановок и называется симметрической группой n-ой степени

Группа надевания носка

«Группа надевания носка» — это группа, элементами которой являются следующие четыре манипуляции с носком: «О» — оставьте носок в покое; «Д» — переоденьте носок на другую ногу; «В» — выверните носок и наденьте его на ту же ногу; «$\text{В}_\text{Д}$» — выверните носок и наденьте его на другую ногу.

Операцией «$\circ$» в группе объявляется композиция указанных манипуляций. Таблицу Кэли (рис. 1) для этой операции составить нетрудно, но ещё лучше делать это с помощью вспомогательного рисунка (рис. 2).

$\circ$	О	Д	В	$\text{В}_\text{Д}$
О	О	Д	В	$\text{В}_\text{Д}$
Д	Д	О	$\text{В}_\text{Д}$	В
В	В	$\text{В}_\text{Д}$	О	Д
$\text{В}_\text{Д}$	$\text{В}_\text{Д}$	В	Д	О

Рис. 1

После этого уместно рассмотреть другой пример: группу симметрий прямоугольника. Обозначив элементы этой группы символами «O» — оставить прямоугольник в покое, R_X и R_Y — переворачивания на 180° относительно горизонтальной и вертикальной осей прямоугольника соответственно, R_O — отражение относительно центра прямоугольника, а операцию композиции этих отражений — символом «$*$», составим таблицу Кэли для этой группы (рис. 3). Удобной демонстрационной моделью для объяснения заполнения этой таблицы служила в своё время стандартная перфокарта, поскольку срезанный уголок позволял следить за движением прямоугольника. Теперь изготовить прямоугольник со срезанным уголком придётся самостоятельно.

$*$	O	R_X	R_Y	R_O
O	O	R_X	R_Y	R_O
R_X	R_X	O	R_O	R_Y
R_Y	R_Y	R_O	O	R_X
R_O	R_O	R_Y	R_X	O

Рис. 3

Наконец, третий полезный пример — группа действий солдата по строевым командам С = «смирно», П = «направо», Л = «налево» и К = «кругом». Таблица Кэли для композиции «☆» действий по этим командам показана на рис. 4. Ясно, что для наглядности следует покомандовать выбранным студентом.

☆	С	П	Л	К
С	С	П	Л	К
П	П	К	С	Л
Л	Л	С	К	П
К	К	Л	П	С

Рис. 4