ТЕМА ЛЕКЦИИ:

«ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

1. Неопределенный интеграл
2. Определенный интеграл

Обозначение неопределённого интеграла

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

где **f(x)** – подинтегральная функция,

f(x)dx – подинтегральное выражение (**дифференциал**),

с – постоянная интегрирования.

Неопределенный интеграл

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Определенный интеграл

Определенный интеграл

Определение.

Выражение $\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$, где

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется

интегральной суммой функции $f(x)$

на отрезке $[a,b]$.

Определенный интеграл

Определение.

Если существует конечный $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$, то этот предел называется определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$

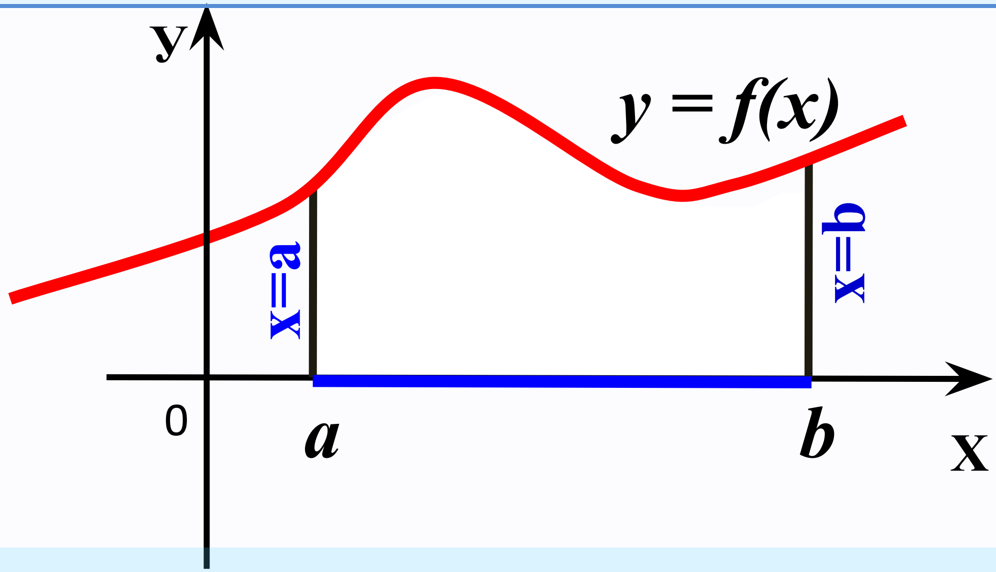
Обозначение определённого интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

где а, в – пределы интегрирования

Криволинейная трапеция

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке [a;b] знака функции f(x), прямыми x=a, x=b и отрезком [a;b].



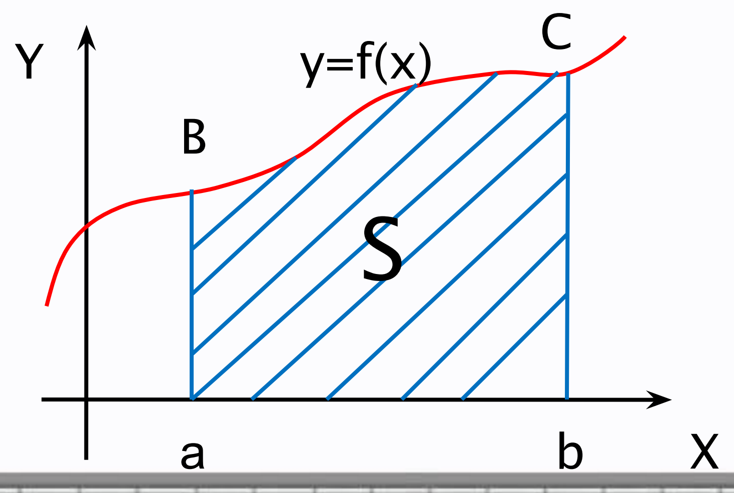
Отрезок **[a;b]** называют ***основанием*** этой криволинейной трапеции

Геометрический смысл определенного интеграла

Теорема:

Определенный интеграл от a до b функции f(x) равен площади S соответствующей криволинейной трапеции, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = S_{aBCb}$$



Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

2. $\int\limits_a^b dx = b - a$;

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

4. $\int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx$;

Свойства определенного интеграла

5. $\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$;

6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

7. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, если $f(x) \geq 0$.

Формула вычисления площади с помощью интеграла

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b] и пусть F(x) есть какая – либо её первообразная. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

формула Ньютона-Лейбница

ПРАКТИКА:

«ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

Пример

$$\int_{-3}^{2} 6x^2dx = \frac{6x^{2+1}}{2+1}\mathrm{I}_{-3}^{2} = \frac{6x^3}{3}\mathrm{I}_{-3}^{2} = 2x^3\mathrm{I}_{-3}^{2} =$$

$$= (2\cdot 2^3) - (2\cdot(-3)^3) = 16 - (-54) =$$

$$= 16 + 54 = 70$$

Пример

$$\int_0^4 (3x^2 + x)dx = \left(\frac{3x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{1+1}}{1+1}\right) = \left(\frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) = \left(x^3 + \frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= \left(4^3 + \frac{4^2}{2}\right) - \left(0^3 + \frac{0^2}{2}\right) = (64 + 8) - (0 + 0) = 72$$

Пример

$$\int_1^2 (6x^2 - 4x + 3)dx = (\frac{6x^{2+1}}{2+1} - \frac{4x^{1+1}}{1+1} + \frac{3x^{0+1}}{0+1}) = (2x^3 - 2x^2 + 3x) =$$

$$= (2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2) - (2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1) =$$

$$= (16 - 8 + 6) - (2 - 2 + 3) = 14 - 3 = 11$$

Задание 1: Вычислить интеграл

1) $\int_{0}^{2} 4x\,dx$

2) $\int_{-3}^{2} 6x^2\,dx$

3) $\int_{1}^{2} (7x-1)\,dx$

4) $\int_{-1}^{2} (x^2+3)\,dx$

5) $\int_{0}^{4} (3x^2+x)\,dx$

6) $\int_{0}^{3} 6x\,dx$

7) $\int_{-2}^{3} 3x^2\,dx$

8) $\int_{1}^{2} (5x+1)\,dx$

9) $\int_{-2}^{1} (x^2-3)\,dx$

10) $\int_{0}^{3} (3x^2-2x)\,dx$

Задание 1: Вычислить интеграл

1) $\int_{-3}^{0}(x^2+4x+6)dx$

2) $\int_{-4}^{-1}(2x^2-3x+2)dx$

3) $\int_{-1}^{1}(8x-25)dx$

4) $\int_{2}^{3}(6x^2-2x+5)dx$

5) $\int_{-2}^{1}(15x^4+6)dx$

6) $\int_{-7}^{3}2dx$

7) $\int_{-3}^{0}(x^2-6x+3)dx$

8) $\int_{-4}^{-1}(5x^2-3x+13)dx$

9) $\int_{-1}^{1}(6x+17)dx$

10) $\int_{2}^{3}(3x^2-4x+7)dx$

11) $\int_{-2}^{1}(18x^5+2)dx$

12) $\int_{-8}^{4}5dx$