Тема: Фильтр Калмана.

Кафедра Радиоэлектроники.

Преподаватель:
Лазаренко
Сергей Валерьевич.

Учебные вопросы:

1. Формулировка задачи фильтрации.
2. Уравнение фильтра Калмана.
3. Пример построения фильтра Калмана.

1. Формулировка задачи фильтрации.

При синтезе фильтра Калмана предполагают, что полезный сигнал *s(t)* генерируется из белого шума с помощью так называемого формирующего фильтра в соответствии с алгоритмом

$$\frac{ds(t)}{dt} = F(t)s(t) + G(t)u(t) \qquad (1)$$

Где *u(t)* - белый шум, спектральная плотность которого равна *Q(t)* (шум формирования);

*F(t)*и G*(t)* - заданные коэффициенты.

Уравнение (1) называют уравнением формирующего фильтра.

Например, дифференциальное уравнение, описывающее формирующий фильтр, имеет вид

$$\frac{d^2 s}{d\,t^2} + a_1 \frac{ds}{d\,t} + a_1 s = b_0\, u \qquad (2)$$

Введем обозначения $s = s_1 \qquad \frac{ds}{d\,t} = s_2$

Тогда вместо уравнения (2) можно записать систему

$$\frac{ds_1}{dt} = 0 \cdot s_1 + 1 \cdot s_2 + 0 \cdot 0$$

$$\frac{ds_2}{dt} = -a_0 \cdot s_1 - a_1 \cdot s_2 + b_0 \cdot u$$

Перепишем эту систему в векторной форме

$$\begin{bmatrix} \dfrac{ds_1}{dt} \\ \dfrac{ds_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$

Обозначим $\dfrac{d\bar{s}}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{ds_1}{dt} \\ \dfrac{ds_2}{dt} \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_0 \end{bmatrix}$, $\bar{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$, $\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$

При этом уравнение (2) преобразовалось в выражение (1) в векторной форме

$$\frac{d\,\bar{s}}{d\,t} = F\,\bar{s} + G\,\bar{u} \qquad (3)$$

В процессе распространения сигнала от передатчика к приемнику он подвергается воздействию шума, поэтому принимаемый сигнал описывается соотношением

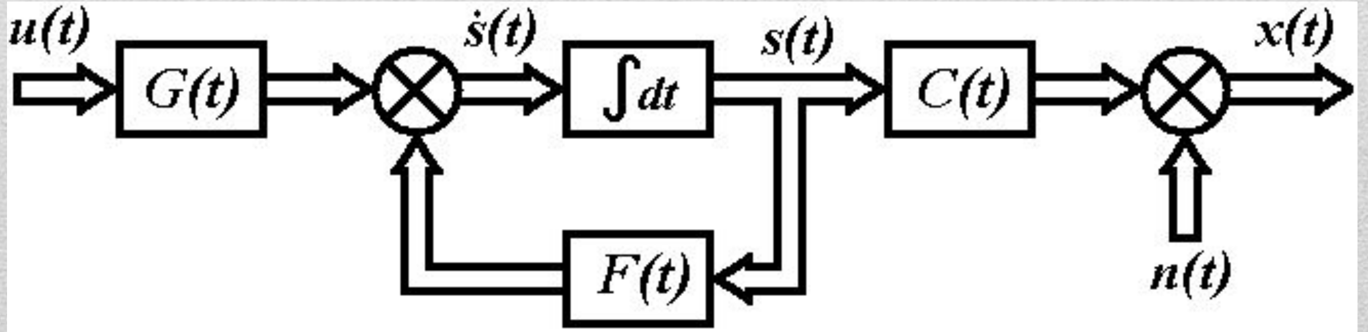
$$x(t) = C(t)s(t) + n(t) \qquad (4)$$

Где *n(t)* - белый шум, спектральная плотность которого равна *R(t)* (шум измерения);

C(t)- заданный коэффициент.

Также величины *n(t)* и *R(t)* могут быть вектором и матрицей соответственно.

Уравнение (4) называют уравнением наблюдения.

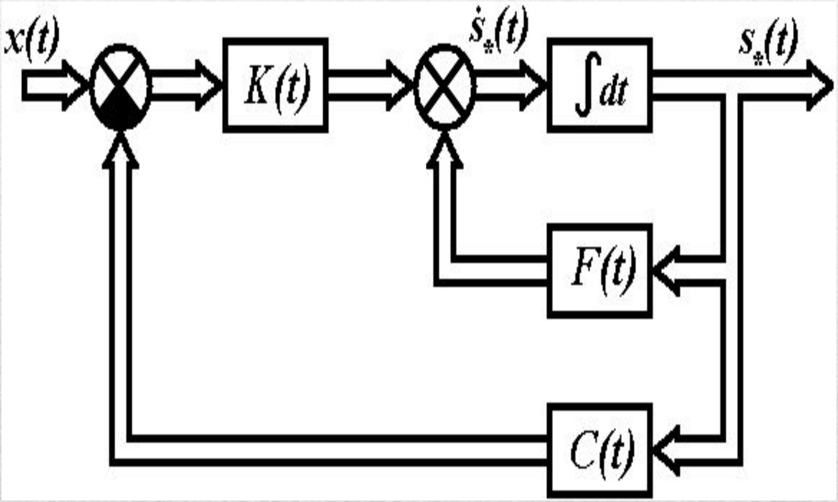


2.Уравнение фильтра Калмана.

Получить уравнение фильтра Калмана можно из уравнения Винера-Хопфа в векторной форме. Опуская громоздкие выкладки, запишем это уравнение.

$$\frac{ds_*(t)}{dt} = F(t)s_*(t) + K(t)\left[x(t) - C(t)\cdot s_*(t)\right] \qquad (5)$$

Здесь $s_*(t)$ - оптимальная оценка полезного сигнала, $K(t)$ - коэффициент передачи (усиления) фильтра.



Коэффициента усиления $K(t)$ фильтра

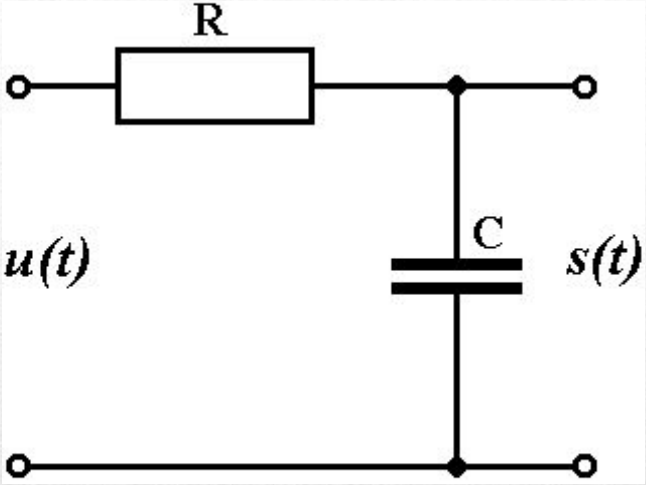
$$\left.\begin{aligned} &K = \varepsilon\cdot C^T\cdot R^{-1} \\ &\frac{d\varepsilon}{dt} = F\varepsilon + \varepsilon F - \varepsilon C^T R^{-1} C\varepsilon + GQG^T \end{aligned}\right\} (6)$$

В этих уравнениях ε - матрица ошибок:

$$\varepsilon = M\left[\{s(t) - s_*(t)\}\{s(t) - s_*(t)\}^T\right]$$

3. Пример построения фильтра Калмана.

На вход фильтра поступает напряжение *u(t)* в виде белого шума, спектральная плотность мощности которого постоянна и равна *Q*. С учетом этого, считая выходным сигналом напряжение на конденсаторе, имеем



$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{T}u(t) - \frac{1}{T}s(t) \qquad (7)$$

где $T=CR$ - постоянная времени цепи.
Сравнивая выражения (7) и (1), делаем вывод, что

$$F = -\frac{1}{T} \qquad G = \frac{1}{T}$$

Полагая в выражении (4) $C=1$, запишем уравнение наблюдения

$$x(t) = s(t) + n(t) \qquad (8)$$

где $n(t)$ - белый шум, спектральная плотность мощности которого также постоянна и равна R.

Уравнение фильтрации при этом будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{ds_*(t)}{dt} = -\frac{1}{T}s_*(t) + K(t)\left[x(t) - s_*(t)\right]$$

где $K(t) = \dfrac{\varepsilon}{R}$

Дисперсионное уравнение приведется к виду

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\frac{2}{T}\varepsilon(t) - \frac{1}{R}\varepsilon^2(t) + \frac{Q}{T^2}$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение, которое может быть решено с использованием современных вычислительных средств.