КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. КИНЕМАТИКА

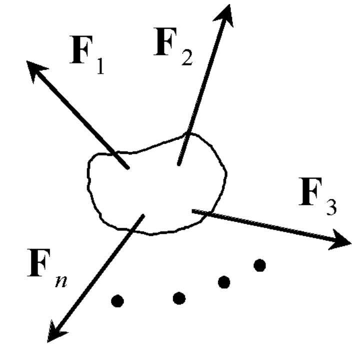
ЛЕКЦИЯ 1

План лекции

- **Введение**
- **Способы задания движения**
- **Скорость**
- **Ускорение**
- **Частные случаи движения**
- **Заключение**

Введение

Мы изучили первый раздел курса ТМ - *СТАТИКУ*.



Основной результат

$$ТЕЛО, СИЛЫ: \ (\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_1) \Rightarrow$$

$$(\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_1) \approx 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0, \ \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0\left(\vec{F}_k\right) = 0$$

Если уравнения равновесия не выполнены, то тело будет двигаться!
Каким образом?
Ответ на этот вопрос будет дан в третьей части курса – в динамике.
Вторая часть курса – кинематика, нужна для того, чтобы разобраться с самим движением.
Причины движения (т.е. СИЛЫ) нас в кинематике интересовать не будут!

КИНЕМАТИКА

наука, изучающая движение тел без учета действующих на них сил.

Задачи кинематики:

1. Научиться задавать движение тел
2. По заданным законам движения тел определять их кинематические характеристики (скорость, ускорение, …)

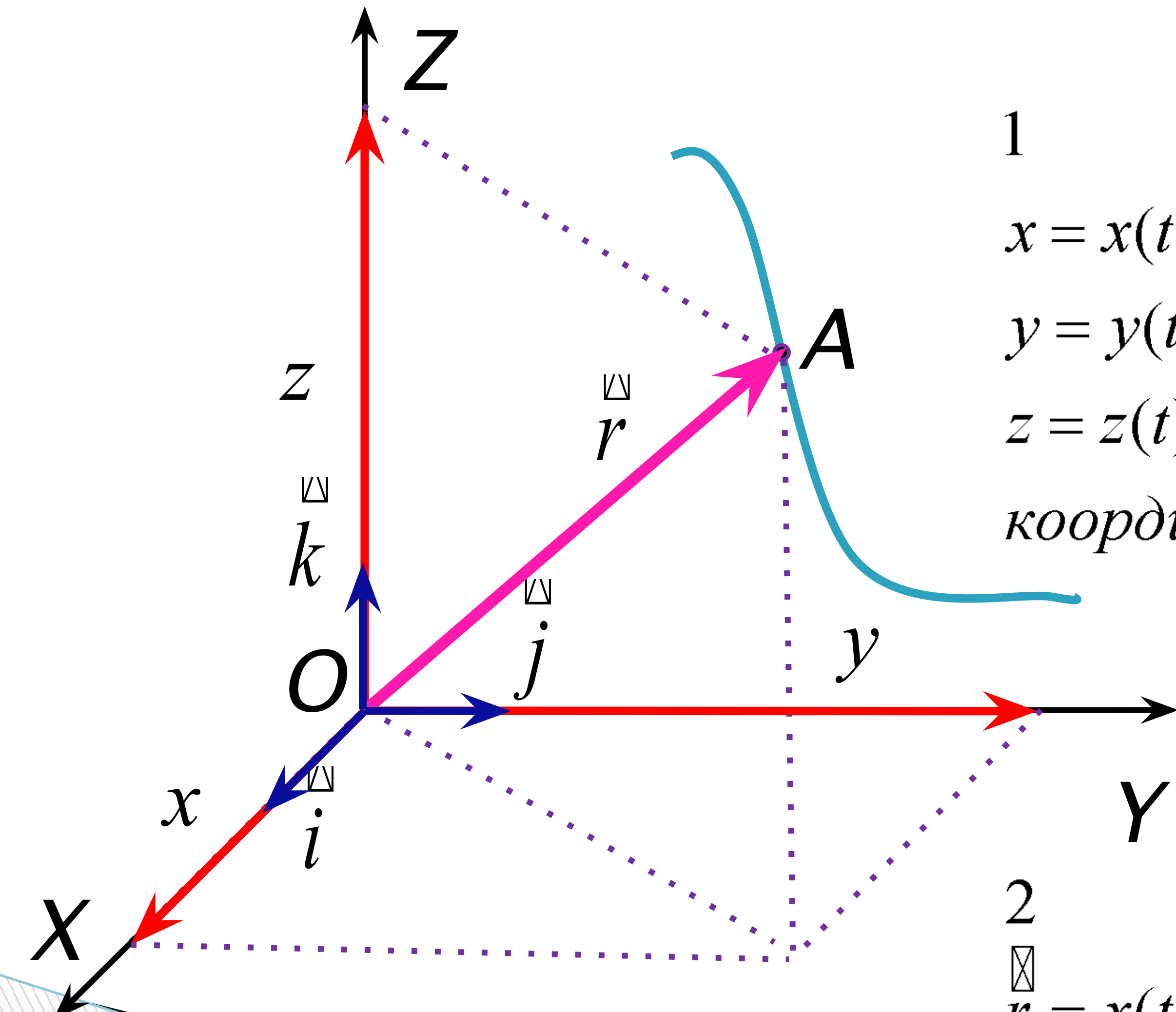
Замечание. **Есть еще и обратная задача - по заданным кинематическим характеристикам тела определять закон его движения.**

Решать эти задачи мы начнем с простейшего тела – **материальной точки**.

Цель лекции: изучить кинематику точки.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

В прямоугольной декартовой системе Oxyz



1

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

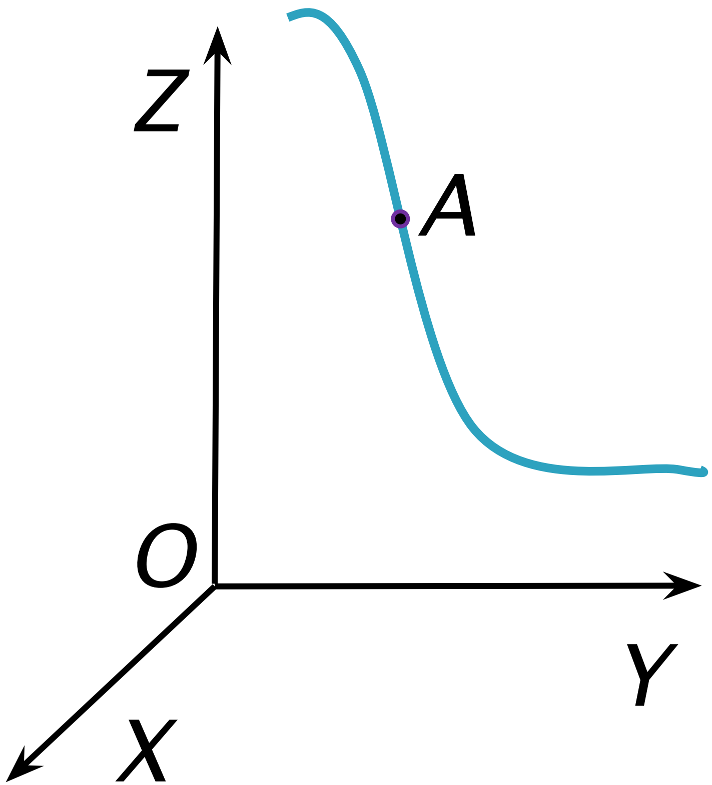
координатный способ

2

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t) - \text{векторный способ}$$

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ



Траектория точки – геометрическое место положений, занимаемых ею при движении

Замечание. Не путать с другим «определением»: траектория – это линия, по которой движется точка. Траекторией может быть лишь часть этой линии!!!

Уравнения траектории

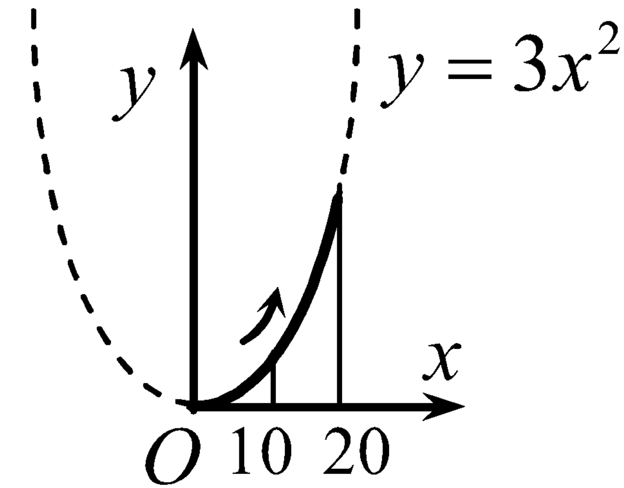
$$f_1(x, y, z) = 0$$

$$f_2(x, y, z) = 0$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ТОЧКИ

Пример. *Точка двигалась в плоскости Oxy в течение 10 секунд. Определить ее траекторию, если*

$$x(t) = 2t; \;\; y(t) = 12t^2$$



Решение. Заданные уравнения определяют траекторию в параметрическом виде. Для получения явного вида $y=y(x)$ исключим параметр t. Получим:

$$t = x/2 \Rightarrow y = 3x^2. \quad t \in [0,10] \Rightarrow x \in [0,20]$$

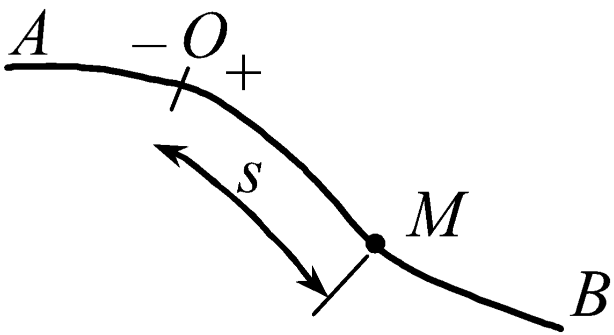
Ответ:

Траектория – часть параболы

$$y = 3x^2, x \in [0,20]$$

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

В естественной системе



Пусть линия *AB*, по которой движется точка, известна. Тогда положение точки *M* на линии можно определить введя естественную координату *s*.

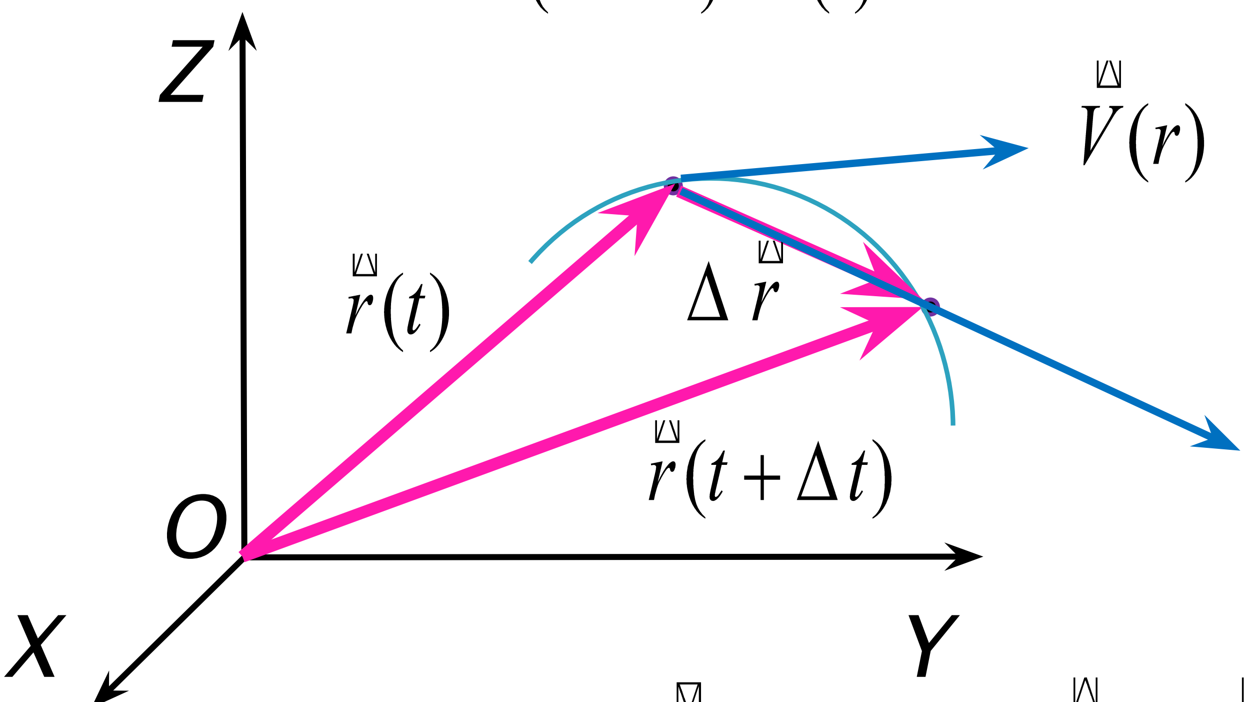
$$s = \overset{\smile}{OM}; \quad s = s(t)$$

Такой способ задания движения называется *естественным*.

1. Уравнения траектории
2. Начало отсчета
3. Положительное направление
4. Закон движения $s(t)$

СКОРОСТЬ ТОЧКИ

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)$$



$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{V}(r) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Вектор скорости точки
направлен по касательной к ее траектории

СКОРОСТЬ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

$$\vec{V}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z\right)=\vec{i}\frac{dx}{dt}+\vec{j}\frac{dy}{dt}+\vec{k}\frac{dz}{dt}$$

$$\vec{V}(t)=\vec{i}v_x+\vec{j}v_y+\vec{k}v_z$$

$$V_x=\dot{x}$$

$$V_y=\dot{y}$$

$$V_z=\dot{z}$$

$$\Rightarrow \quad V=\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

СКОРОСТЬ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ. ПРИМЕР

Движение точки задано уравнением $\vec{r} = 2\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)\vec{i} + 2\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)\vec{j}$

Определить уравнение траектории и скорость точки при t = 1с.

$$x(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right), \qquad y(t) = 2\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$

уравнение траектории (окружность)

СКОРОСТЬ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ. ПРИМЕР

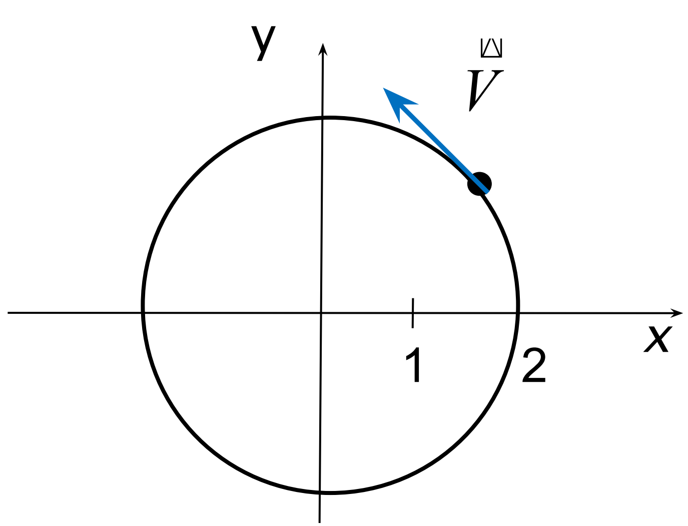
Движение точки задано уравнением $\vec{r} = 2\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\vec{i} + 2\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\vec{j}$

Определить уравнение траектории и скорость точки при $t = 1$с.

$$V_x = \dot{x} = -\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right), \qquad V_y = \dot{y} = \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

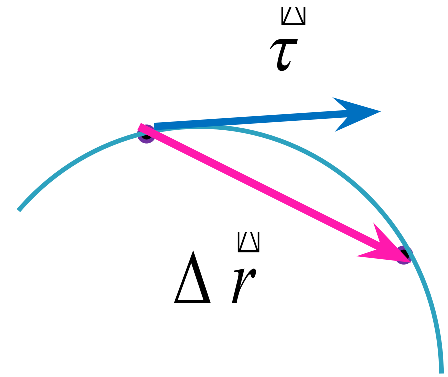
$$V_x(1) = -0{,}52\,м/с \qquad V_y(1) = 0{,}91\,м/с$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 1{,}1\,м/с$$



СКОРОСТЬ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

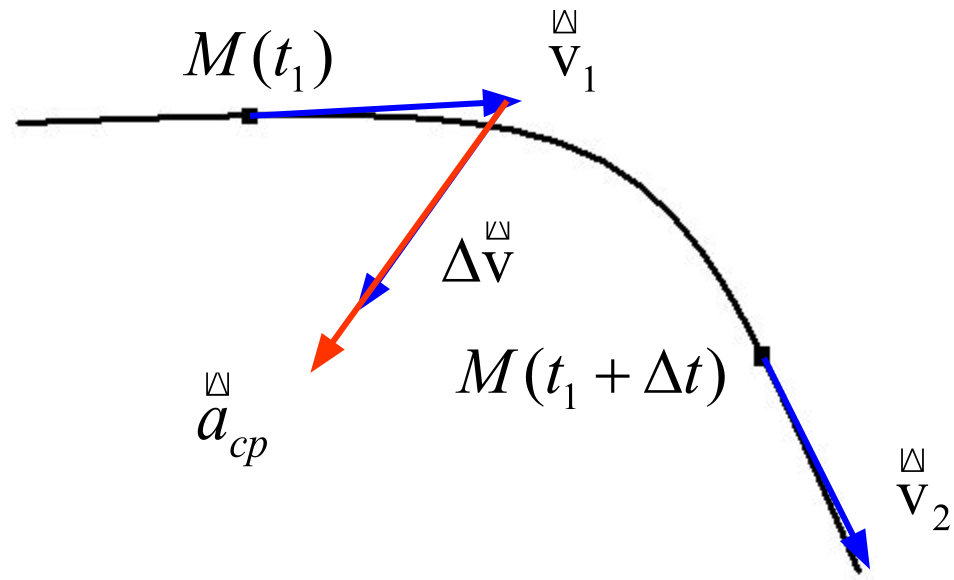
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = \dot{s}\vec{\tau} \qquad \vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$



$$V(t) = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

Вектор скорости точки направлен по касательной к ее траектории

УСКОРЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ



$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

приращение вектора скорости за время *Δt*

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

среднее ускорение – изменение скорости за единицу времени

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ВЕКТОРНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2}$$

ускорение в данный момент времени t

Ускорение точки — это векторная величина, характеризующая быстроту изменения ее скорости и равная первой производной от скорости или второй производной от радиус-вектора по времени

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

в декартовой системе координат

вектор скорости $\longrightarrow$ $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

вектор ускорения $\longrightarrow$ $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

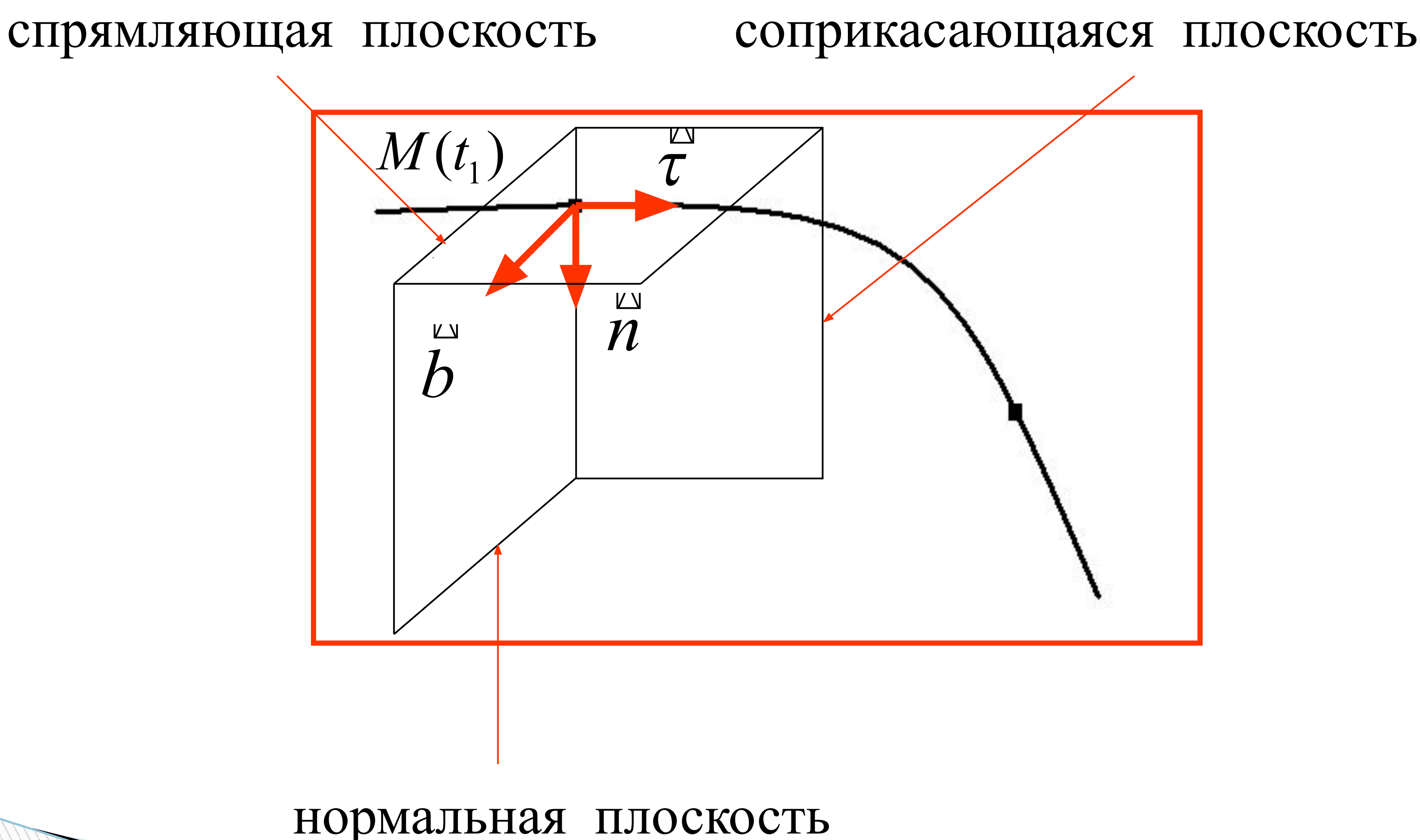
$$a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}_x \vec{i} + \dot{v}_y \vec{j} + \dot{v}_z \vec{k}$$

$$\Downarrow$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \qquad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \qquad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

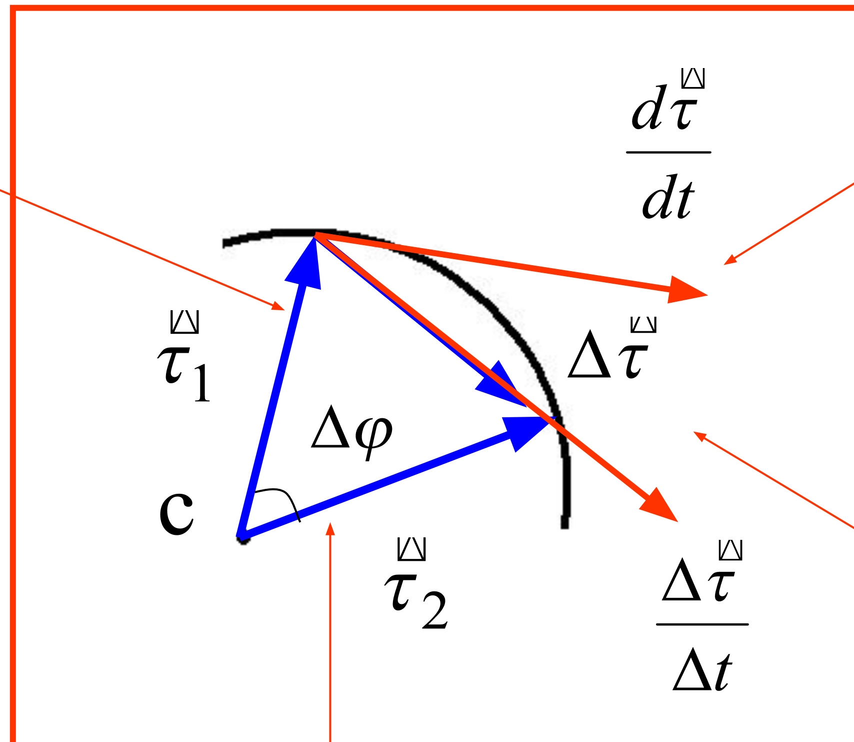
УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ



УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{\tau}) = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Момент времени t



$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} \perp \vec{v}$$

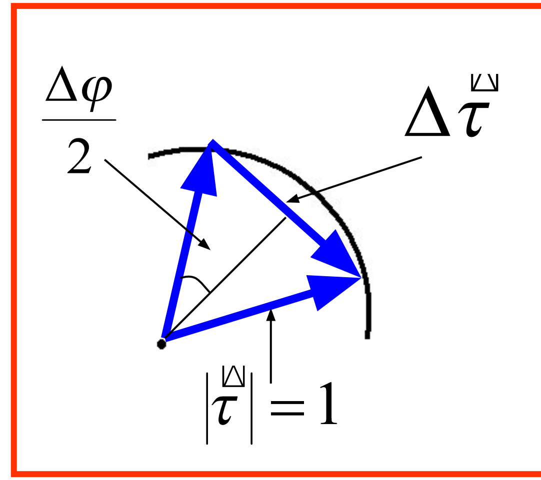
$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| \cdot \vec{n}$$

$$\Delta\vec{\tau} = \vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1$$

Момент времени

$t+\Delta t$

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ



$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}\right|$$

При малых $\Delta\varphi$ $\rightarrow$ $\sin(\Delta\varphi/2) \cong \Delta\varphi/2$

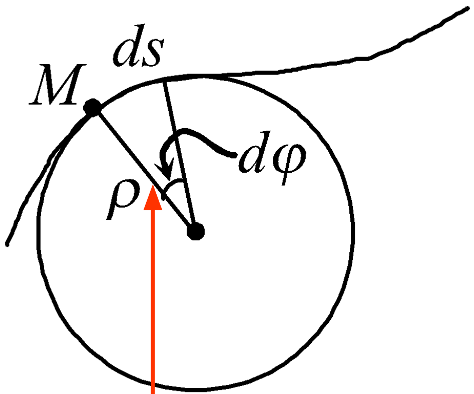
$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{2\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \dot{\varphi}$$

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt} \rightarrow \vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\dot{\varphi}\vec{n} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Касательное ускорение

Нормальное ускорение

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ



Радиус кривизны траектории

$$\dot{s}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{s}\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}^2\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{\mathrm{v}^2}{\rho}$$

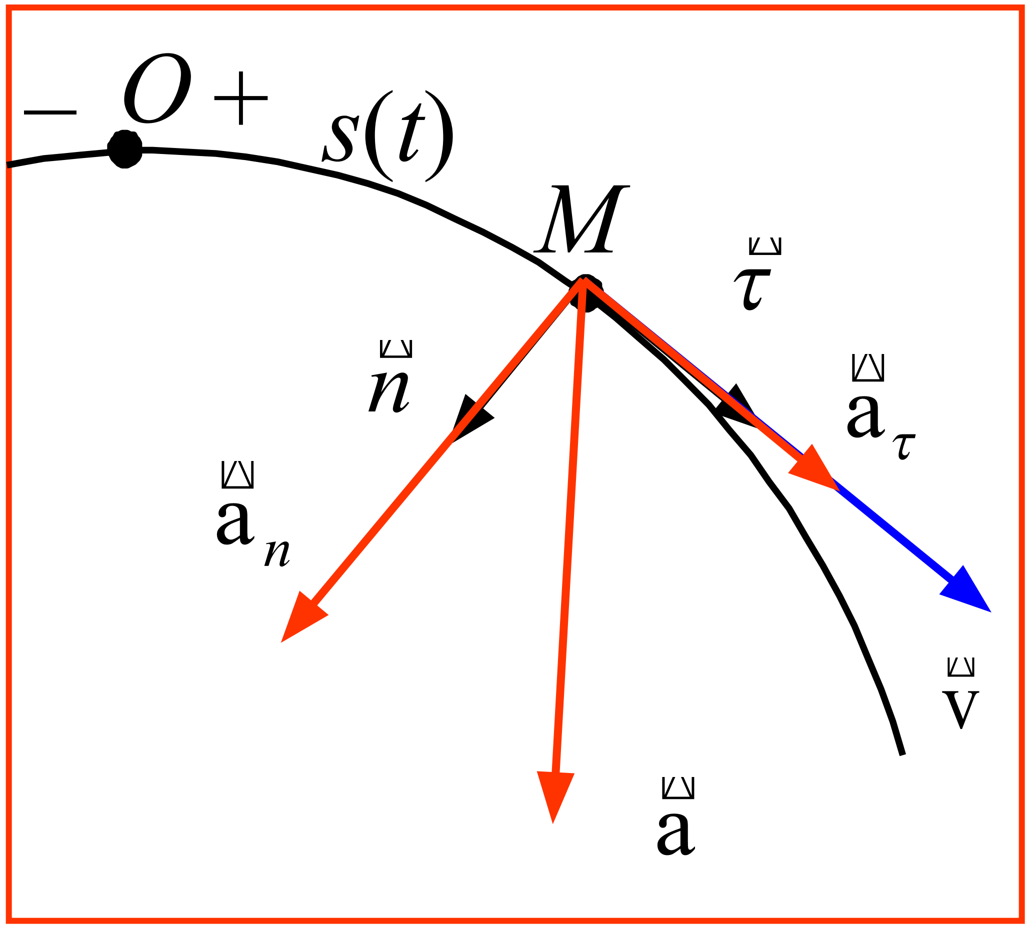
угловая скорость вектора $\vec{\tau}$

$$\dot{\varphi} = \omega$$

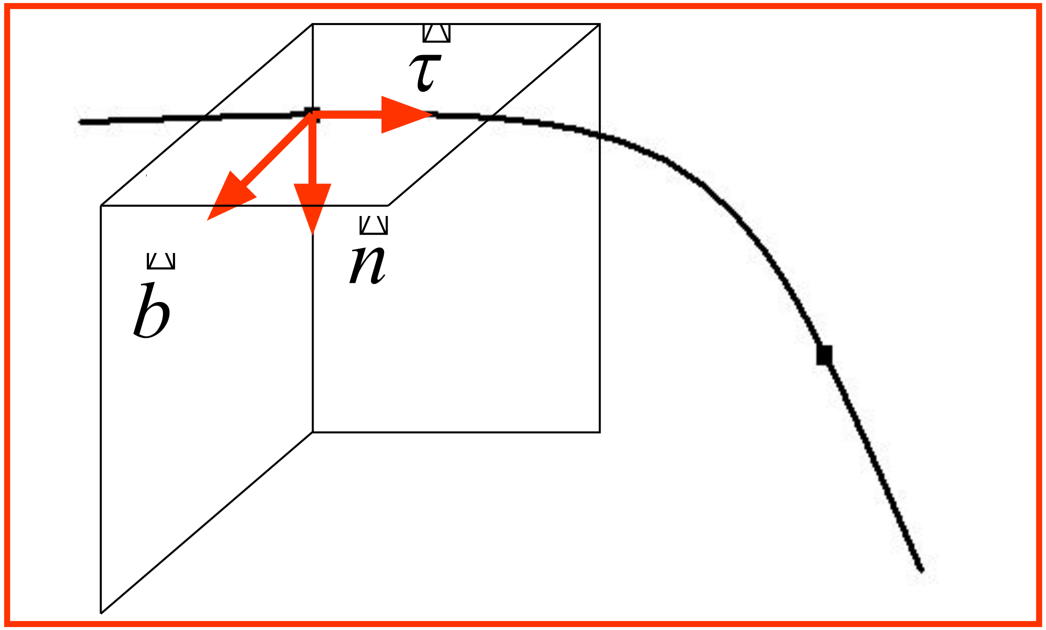
$$ds = \rho d\varphi \;\rightarrow\; \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho} \qquad \dot{s}\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{v}^2}{\rho} \;\rightarrow\; \omega = \frac{\mathrm{v}}{\rho} \;\rightarrow\; a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{\rho} = \omega^2\rho$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \dot{\mathrm{v}}\vec{\tau} + \omega^2\rho\vec{n}} \qquad \boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}$$

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ



ПРОЕКЦИИ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ НА ОСИ ЕСТЕСТВЕННОГО ТРЕХГРАННИКА



$$\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_\tau \vec{\tau} + \mathrm{v}_n \vec{n} + \mathrm{v}_b \vec{b} \qquad \vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} + a_b \vec{b}$$

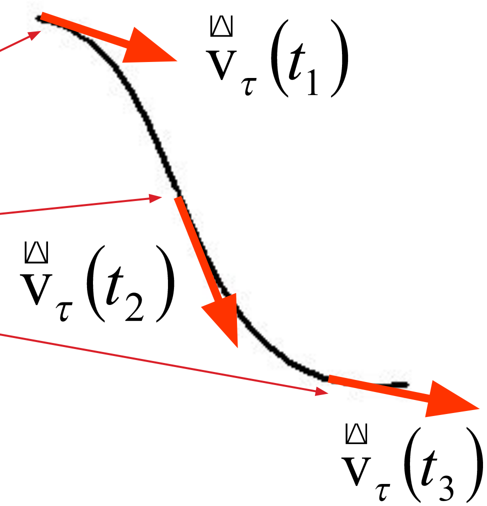
$$\mathrm{v}_\tau = \dot{s} \qquad \mathrm{v}_n = 0 \qquad \mathrm{v}_b = 0$$

$$a_\tau = \ddot{s} \qquad a_n = \dot{s}^2 / \rho \qquad a_b = 0$$

ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

$$\left|\vec{a}_\tau\right| = 0 \rightarrow \left|\vec{\mathrm{v}}_\tau\right| = const$$

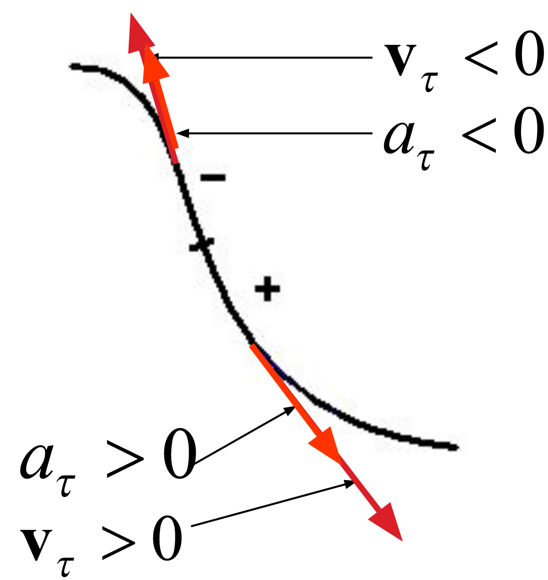
$$\mathrm{v}_\tau(t_1) = \mathrm{v}_\tau(t_2) = \mathrm{v}_\tau(t_3)$$



Такое движение называется равномерным

Равнопеременное движение $\left|\vec{a}_\tau\right| = const$

Ускоренное движения:	$\vec{\mathbf{v}}_\tau \cdot \vec{a}_\tau > 0$
Замедленное движения:	$\vec{\mathbf{v}}_\tau \cdot \vec{a}_\tau < 0$



ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое центр параллельных сил?
2. Что необходимо задать, чтобы описать движение материальной точки координатным методом? А векторным?
3. Что такое траектория точки?
4. Как определяется скорость точки при различных способах задания ее движения?
5. Что такое спрямляющая и соприкасающаяся и нормальная плоскости?
6. Как определить модуль нормального и тангенциального ускорений?
7. Куда направлены векторы скорости, нормального и тангенциального ускорений?
8. При каком движении равно нулю нормальное ускорение? Тангенциальное?

НА СЛЕДУЮЩЕЙ ЛЕКЦИИ

ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ **ТЕЛА**