2.1 Гидростатическое давление и его свойство

2.2 Дифференциальные уравнения равновесия жидкости

Гидравлика

Раздел 2. Гидростатика

2.3 Поверхность равного давления

2.4 Формы свободной поверхности жидкости

Иркутск 2016 г

2.1 Гидростатическое давление и его свойство

Гидростатика — *раздел физики сплошных сред, изучающий равновесие жидкостей, в частности, в поле тяжести.*

Отметим следующий факт: в покоящейся жидкости возможен лишь один вид напряжений – напряжение сжатия, т.е. **гидростатическое давление.**

Свойства гидростатического давления в жидкости:

1. *На внешней поверхности жидкости гидростатическое давление всегда направлено по нормали внутрь рассматриваемого объема жидкости.*

2. *В любой точке внутри жидкости гидростатическое давление по всем направлениям одинаково, т.е. давление не зависит от угла наклона площадки, на которую оно действует в данной точке.*

2.1 Гидростатическое давление и его свойство

Составим уравнение равновесия выделенного объема жидкости вдоль оси OX

$$p_x \frac{1}{2} d_y d_z - p_n dS\cos(n,x) + \frac{1}{6} d_x d_y d_z \rho X = 0$$

сила давления вдоль оси X

массовая сила, действующая на тетраэдр вдоль оси OX

Разделим это уравнение почленно на площадь $\frac{1}{2} d_y d_z$, которая представляет собой проекцию наклонной грани dS на плоскость yOz. В итоге будем иметь:

$$p_x - p_n + \frac{1}{3} d_x X = 0$$

При стремлении размеров тетраэдра к нулю последний член уравнения, содержащий множитель dx, будет также стремиться к нулю, а давления p_x и p_n будут оставаться конечными величинами.

Следовательно, в пределе

$$p_x - p_n = 0, \quad p_x = p_n$$

Аналогичные равенства получим для давлений p_y и p_z вдоль соответствующих осей Oy и Oz после таких же рассуждений

А, следовательно

$$p_x = p_y = p_z = p_n$$

что требовалось доказать.

$p_{x(Y,Z)}$ – гидростатическое давление. Все эти давления направлены по нормалям к соответствующим площадкам.

2.2 Дифференциальные уравнения равновесия жидкости

В разных точках давление p имеет неодинаковое значение, т.е. $p = p(x, y, z)$. *Основная задача гидростатики – исследование распределения давления в жидкости и на границах между жидкостью и различными поверхностями.*

Рассмотрим равновесие массы жидкости в объеме элементарного прямоугольного параллелепипеда.

Давление в соответствующих точках граней, нормальных к оси x, например, в точках N и M видно, разнятся на одинаковую величину, равную

$$p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}dx$$

Разность сил давления

На выделенный параллелепипед будут действовать массовые силы и разности давления. Поэтому уравнения равновесия параллелепипеда в направлении трех координатных осей запишутся в следующем виде:

Масса параллелепипеда

Площадь грани

$$X\rho dxdydz - \frac{\partial p}{\partial x}dxdydz = 0;$$

$$Y\rho dxdydz - \frac{\partial p}{\partial y}dxdydz = 0;$$

$$Z\rho dxdydz - \frac{\partial p}{\partial z}dxdydz = 0.$$

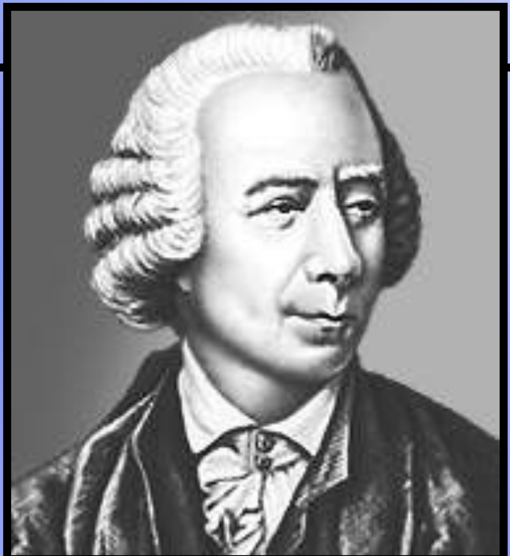
$$\frac{1}{\rho dxdydz}$$

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Получим уравнения равновесия жидкости или систему уравнений Л. Эйлера



2.3 Поверхность равного давления

Поверхность, во всех точках которой давление одинаково, называется *поверхностью уровня* или *поверхностью равного давления*. На положение уровня свободной поверхности влияют силы тяжести и инерции.

Найдем величину равного давления *P* по трем частным производным. При P=const *dP=0* и, следовательно, уравнение поверхности жидкости равного давления имеет вид

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

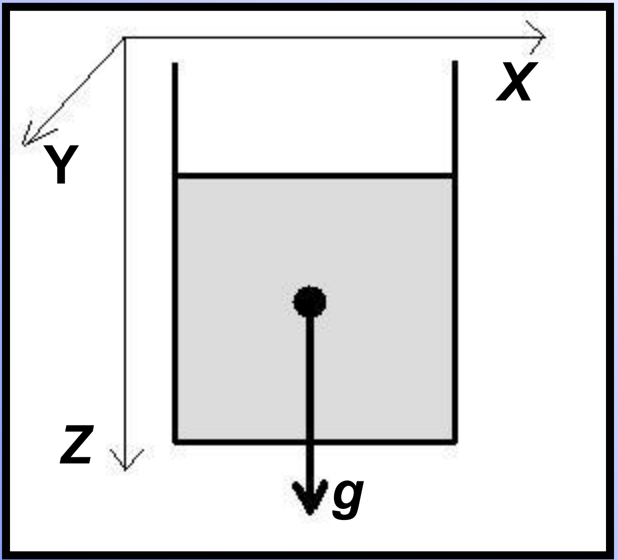
Это уравнение называется уравнением ***поверхности жидкости равного или постоянного давления***

Поверхность все точки которой имеют одинаковый потенциал *U*, называется *эквипотенциальной поверхностью*.

$$dU = 0;\ U = const$$

2.3 Поверхность равного давления

Если жидкость находится под действием силы тяжести и ось *Z* направлена вниз ($X = 0;\ Y = 0;\ Z = g$)



$$dU = gdz$$

2.4 Формы свободной поверхности жидкости

При неравномерном или непрямолинейном движении на частицы жидкости кроме силы тяжести действуют еще и силы инерции, причем если они постоянны по времени, то жидкость принимает новое положение равновесия. Такое равновесие жидкости называется *относительным покоем*.

Рассмотрим два примера такого относительного покоя.

2.4 Формы свободной поверхности жидкости

1. определим поверхности уровня в жидкости, находящейся в цистерне, которая движется по горизонтальному пути с постоянным ускорением *a*

К каждой частице жидкости массы *m* приложены сила тяжести *G* и сила инерции P_u. Равнодействующая *R* этих сил направлена к вертикали под углом *α*

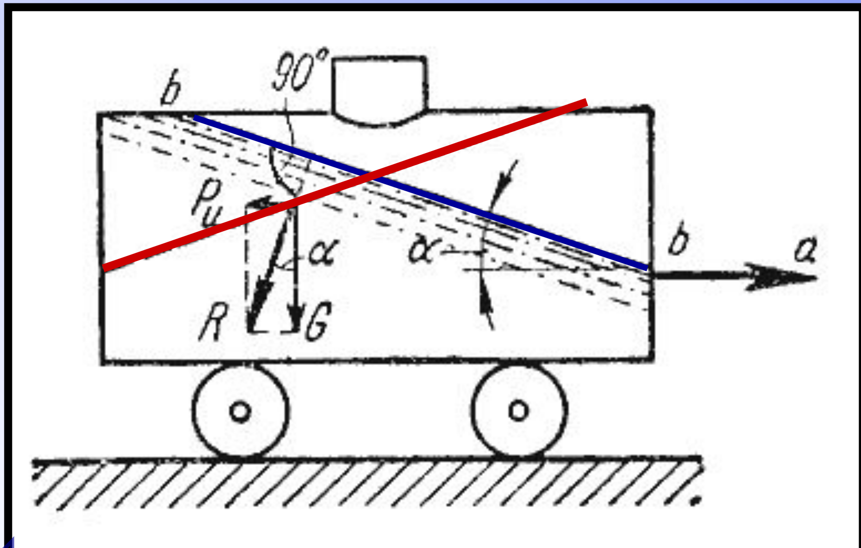
$$R = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2}$$

сила тяжести G

сила инерции Pu

$$tg\,\alpha = \frac{a}{g}$$

Так как свободная поверхность должна быть нормальна к указанной равнодействующей, то она в данном случае представит собой уже не горизонтальную плоскость, а наклонную, составляющую угол α с горизонтом.



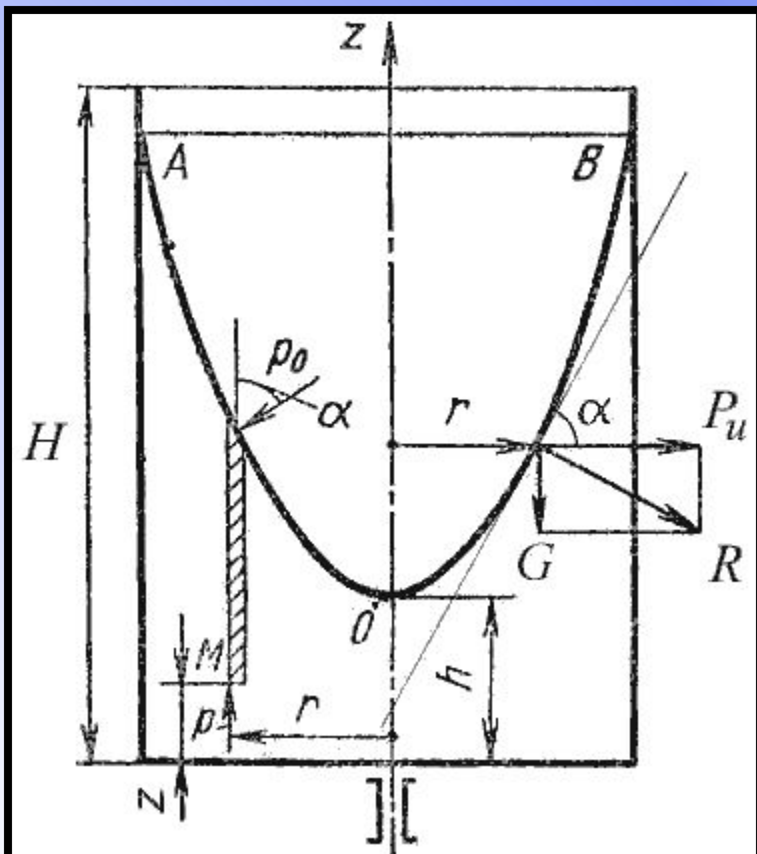
Учитывая, что величина этого угла зависит только от ускорений, приходим к выводу, что положение свободной поверхности не будет зависеть от рода находящейся в цистерне жидкости.

Если бы движение цистерны равнозамедленным, то наклон свободной поверхности обратился бы в другую сторону

2.4 Формы свободной поверхности жидкости

2. рассмотрим случай относительного покоя жидкости во вращающихся сосудах

На любую частицу жидкости действуют массовые силы: сила тяжести *G = mg* и центробежная сила $P_ц = m\omega 2r$, где *r* - расстояние частицы от оси вращения, а *ω* - угловая скорость вращения сосуда.



Поверхность жидкости представляет собой параболоид вращения.

Из чертежа находим

$$tg\,\alpha = \frac{P_ц}{G} = \frac{m\omega^2 r}{mg}$$

$$tg\,\alpha = \frac{dz}{dr}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\omega^2 r}{g} = \frac{dz}{dr}$$

$$dz = \frac{\omega^2}{g} r\,dr$$

$$z = h + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

2.1 Гидростатическое давление и его свойство

2.2 Дифференциальные уравнения равновесия жидкости

2.3 Поверхность равного давления

2.4 Формы свободной поверхности жидкости