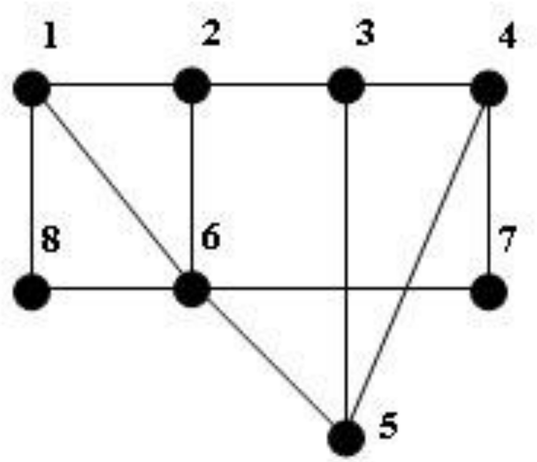
Независимые множества, клики, вершинные покрытия.

Независимое множество вершин (или *внутренне устойчивое множество*) есть множество вершин графа G, такое, что любые две вершины в нем не смежны (т.е. никакая пара вершин не соединена ребром).

Независимое множество вершин называется *максимальным*, если к нему нельзя добавить ни одной вершины так, чтобы оно осталось независимым.



Независимые множества: {8,7,2,5}, {1,3,7}, {2,4,8}, {6,4}, {6,3}, {1,4}, {7,5}, {7,5,1}, {3,7,8}, {2,5}, {2,8}…

Максимальные независимые множества: {8,7,2,5}, {1,3,7}, {2,4,8}, {6,4}, {6,3}, {1,4}, {7,5,1}, {3,7,8}.

Наибольшим называется независимое множество, содержащее наибольшее количество элементов.

Наибольшее независимое множество: {8,7,2,5}.

Число вершин в наибольшем независимом множестве графа называется *числом независимости графа*.

Алгоритм поиска наибольшего независимого множества

Вход: G=(V, A) - неориентированный граф, представленный матрицей смежности.

Выход: S – наибольшее независимое множество, m - число независимости графа.

Алгоритм ПОИСК(v):

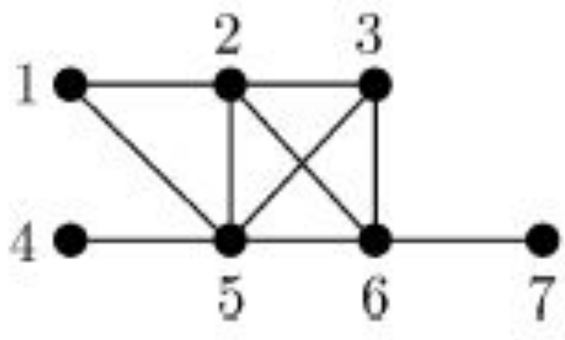
1. Поместить v в список S += v;
2. ЕСЛИ S независимо
3. ТО
4. {
5. m=|S|;
6. Исключаем v из множества T -= v;
7. ПОИСК(w $\in$ T);
8. }
9. ИНАЧЕ исключаем v из множества S -= v;

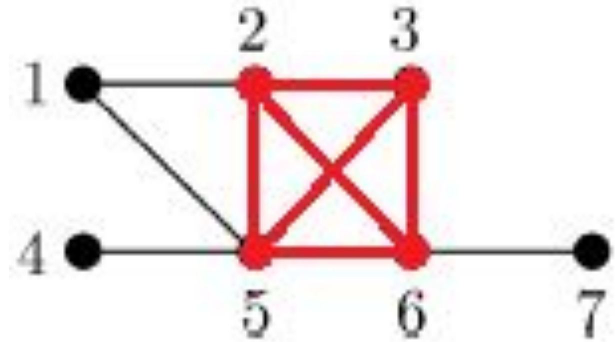
Алгоритм ПНМВ

1. S={}; T=V; m=0;
2. ПОКА T != $\varnothing$ для всех v $\in$ T
3. {
4. ПОИСК(v);
5. }

Наибольшее независимое множество можно построить, используя поиск с возвратами. На каждом шаге добавляем вершину в независимое множество, если оно теряет свойство независимости то возвращаемся на шаг назад и пробуем добавить другую вершину. Повторяем, пока не исчерпаются все варианты изменения множества.

Кликой в графе называется подмножество вершин, каждые две из которых соединены ребром графа, т.е. это полный подграф первоначального графа.





Максимальная клика - это клика, которая не может быть включением других смежных вершин.

Наибольшая клика - это клика максимального размера для данного графа.

Число вершин в клике наибольшего размера называется *кликовым числом графа*.

Алгоритм Брона - Кербоша – один из эффективных вариантов поиска клик.

Алгоритм основан на том, что клика в графе является его максимальным по включению полным подграфом. На каждом шаге, начиная с одной вершины в уже построенный полный подграф, добавляется вершина из множества кандидатов. При этом при переборе вершины, которые заведомо не приведут к построению клики отбрасываются.

Алгоритм Брона - Кербоша

Вход: G=(V, A) - неориентированный граф.

Выход: CL – клика.

Процедура ПОИСК(cand, notcand)

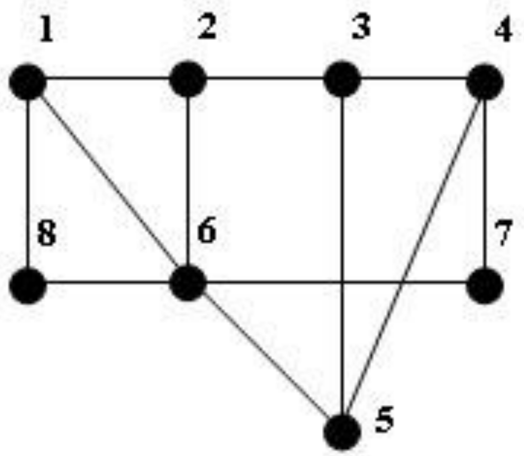
1. ПОКА cand != ∅ И notcand не содержит вершины, соединенной со всеми вершинами из cand
2. Выбираем v из cand и добавляем её в CL += v;
3. newcand = cand - все вершины, не соединенные с v;
4. newnotcand = notcand - все вершины, не соединенные с v;
5. ЕСЛИ newcand != ∅ и notcand != ∅ ТО
6. ВЫХОД*;*
7. ИНАЧЕ ПОИСК(newcand, notcand)
8. CL -= v; cand -= v; notcand += v.

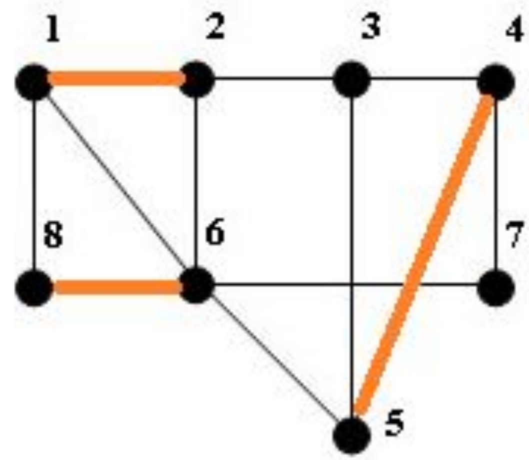
Алгоритм АБК

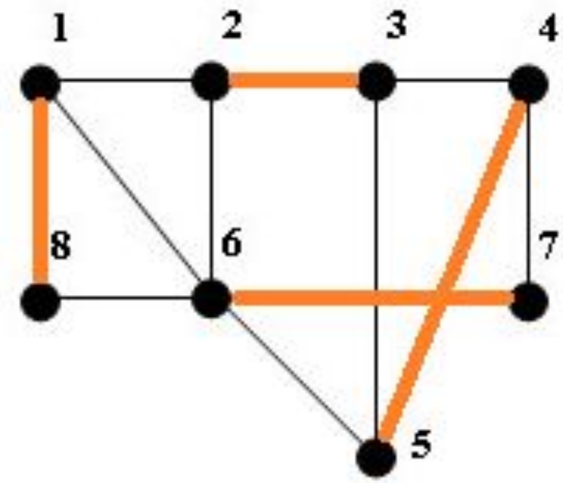
1. CL={}; cand=V; notcand = {}; newcand = {}; newnotcand = {};
2. ПОИСК (cand, notcand)

Паросочетание или *независимое множество рёбер* в графе — это набор попарно несмежных рёбер.

Максимальное паросочетание — это паросочетание к которому невозможно добавить ни одно ребро, которое бы являлось несмежным ко всем рёбрам паросочетания.



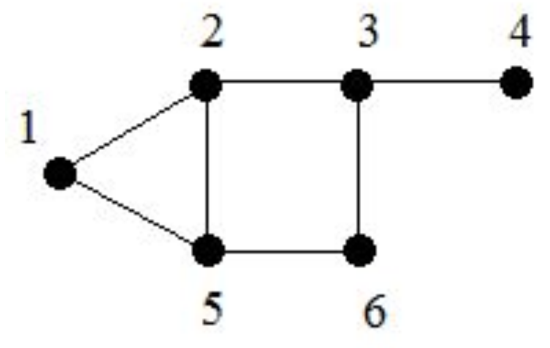


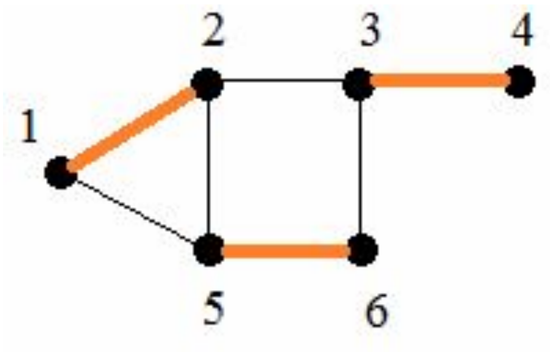


Наибольшее паросочетание — это паросочетание, которое содержит максимальное количество рёбер.

Число паросочетания — это число рёбер в наибольшем паросочетании.

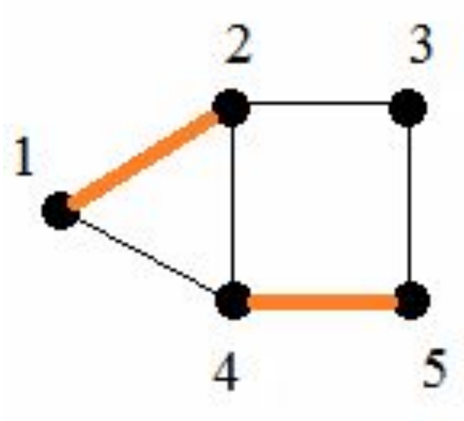
Совершенным паросочетанием называется паросочетание, в котором участвуют все вершины графа.





Любое совершенное паросочетание является наибольшим и максимальным.

Почти совершенным паросочетанием называется паросочетание, в котором не участвует ровно одна вершина. Это характерно для нечётного числа вершин графа.

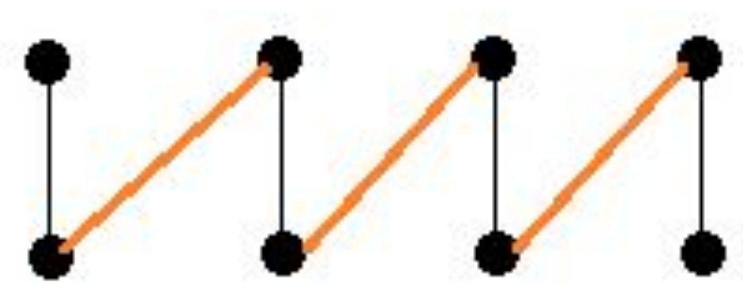


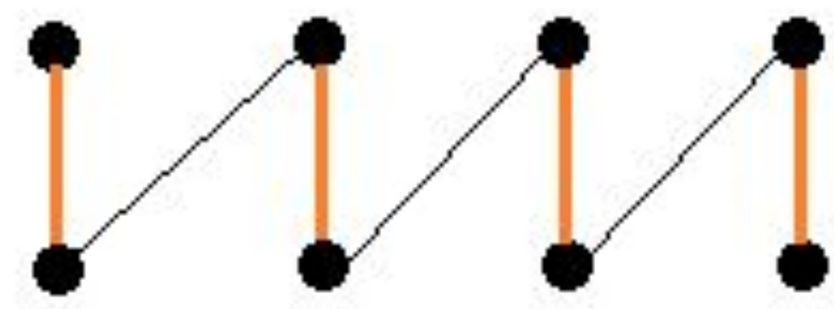
Цепью длины *k* называется некоторый простой путь (т.е. не содержащий повторяющихся вершин или рёбер), содержащий *k* рёбер.

Чередующейся цепью называется цепь, в которой рёбра поочередно принадлежат/не принадлежат паросочетанию.

Увеличивающей цепью называется чередующаяся цепь, у которой начальная и конечная вершины не принадлежат паросочетанию.

Теорема Бержа
Паросочетание является максимальным тогда и только тогда, когда не существует увеличивающих относительно него цепей.





Вход: G=(V, A) - неориентированный граф, представленный матрицей смежности g[i][j].

Выход: matching[v] - массив с номерами вершин максимального паросочетания.

Алгоритм ПОГ(v)

```
ЕСЛИ (NUM[v] ==0)
        ВОЗВРАТИТЬ false
used[v] = true
ДЛЯ всех i ИЗ g[i][j].
        ЕСЛИ(matching[i] == -1 или dfs(matching[i]==0))
                matching[i] = v
                ВОЗВРАТИТЬ true
ВОЗВРАТИТЬ false
```

Алгоритм ПНП(v):

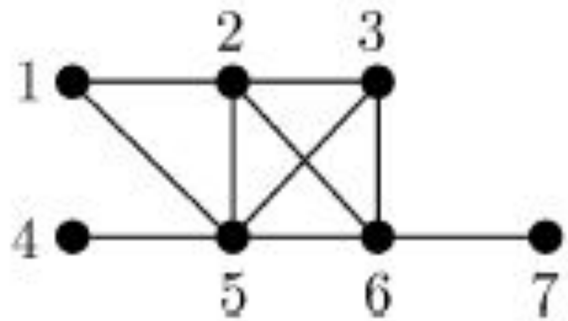
```
ДЛЯ всех  v matching[v] = -1;
NOMER = NOMER + 1;
ДЛЯ всех i ИЗ g[i][j]
        used[i] = false
        ПОГ(i)
```

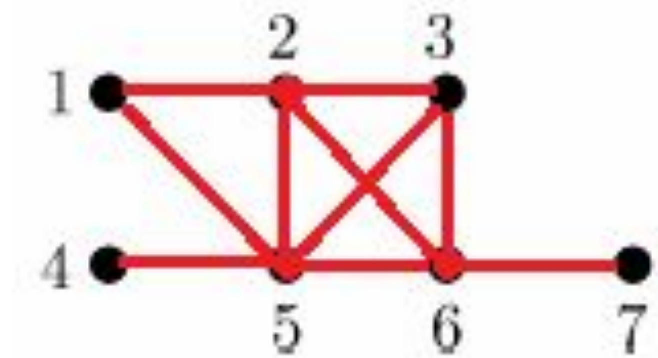
Алгоритм Куна – предназначен для поиска наибольшего паросочетания и основан на применении теоремы Бержа. Смысл его в следующем: возьмём пустое паросочетание, и пока в графе находится увеличивающая цепь, выполняем чередование паросочетания вдоль этой цепи. Повторяем процесс поиска увеличивающей цепи и чередования до момента, пока увеличивающей цепи найти не удастся. Увеличивающая цепь ищется с помощью <u>обхода в глубину</u> из каждой вершины.

Ребро и вершина *покрывают* друг друга, если они инцидентны.

Вершинное покрытие графа - это такое множество вершин, что каждое ребро графа инцидентно хотя бы одной из этих вершин (т.е. множество вершин, покрывающих все рёбра в графе).

Наименьшее число вершин в вершинном покрытии графа называется *числом вершинного покрытия* графа.

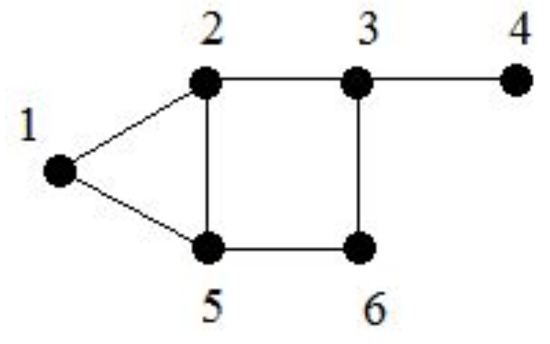


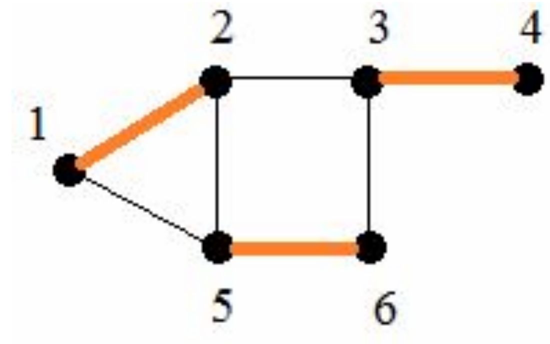


Дополнение минимального вершинного покрытия является максимальным независимым множеством.

Дополнение графа (*обратный граф*) — граф, имеющий то же множество вершин, что и исходный, но в котором две несовпадающие вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в исходном.

Множество ребер, покрывающих все вершины, называется *реберным покрытием*





Минимальное рёберное покрытие — это рёберное покрытие наименьшего размера.

Число рёбер в минимальном рёберном покрытии графа называется *числом рёберного покрытия*.

Наименьшее рёберное покрытие можно найти путём нахождения максимального паросочетания с последующим добавлением рёбер с помощью жадного алгоритма для покрытия оставшихся вершин.

Если максимальное паросочетание является совершенным паросочетанием, то нет необходимости в дополнительных рёбрах.