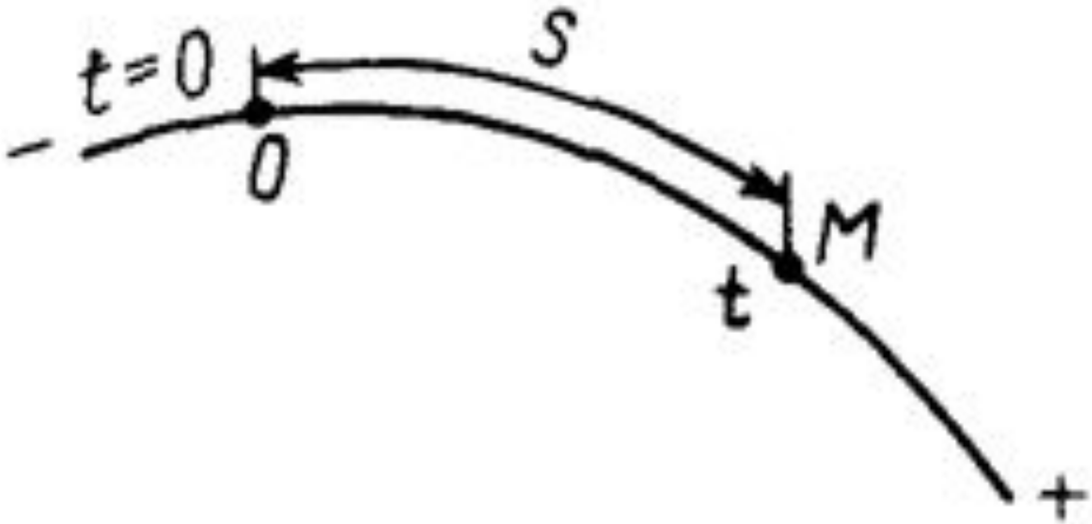
Лекция 10

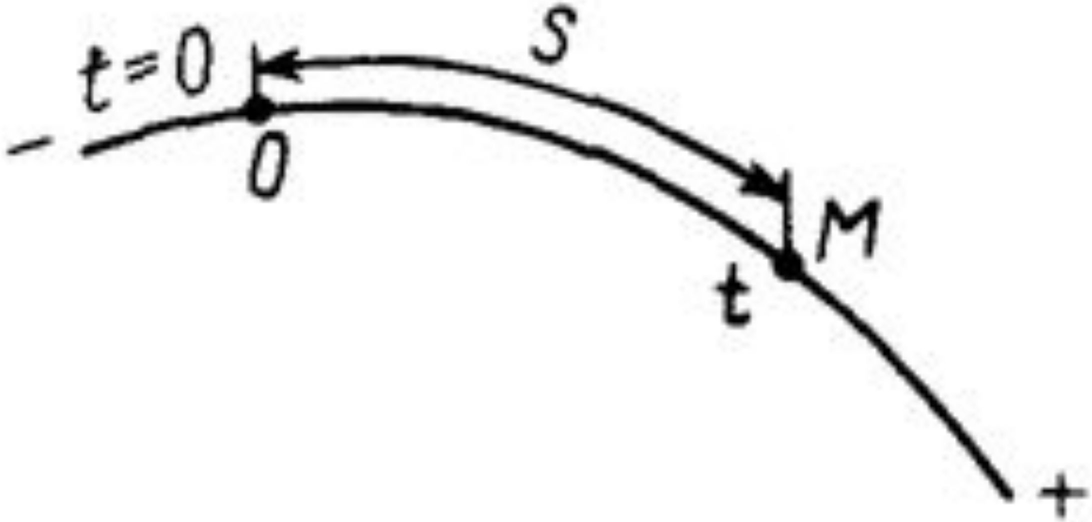
Кинематика точки. Естественный способ описания движения точки

При естественном способе задания движения задаются:
-траектория
-закон движения точки вдоль траектории

При естественном способе задания движения задаются:
-траектория
-закон движения точки вдоль траектории



При естественном способе задания движения задаются:
-траектория
-закон движения точки вдоль траектории



$$s = f(t)$$

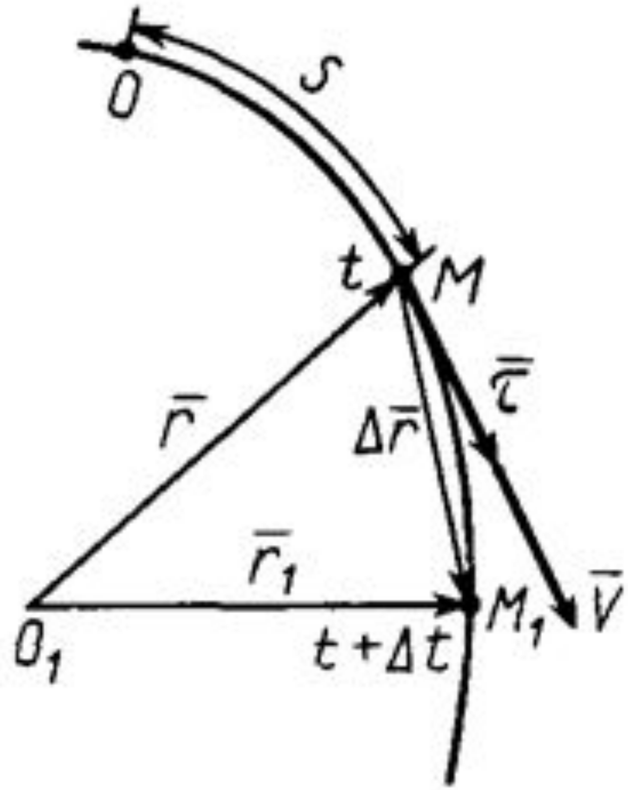
От задания движения в декартовых координатах можно перейти к его заданию естественным способом

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t).$$

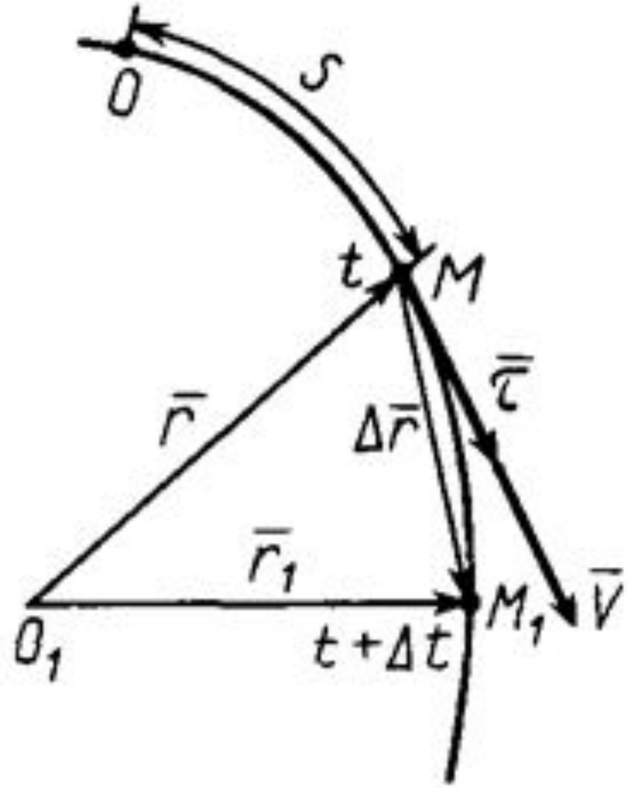
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$s = \int_o^t \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_o^t \sqrt{\left(f_1'(t)\right)^2 + \left(f_2'(t)\right)^2 + \left(f_3'(t)\right)^2}\,dt$$

Скорость точки при естественном способе задания движения

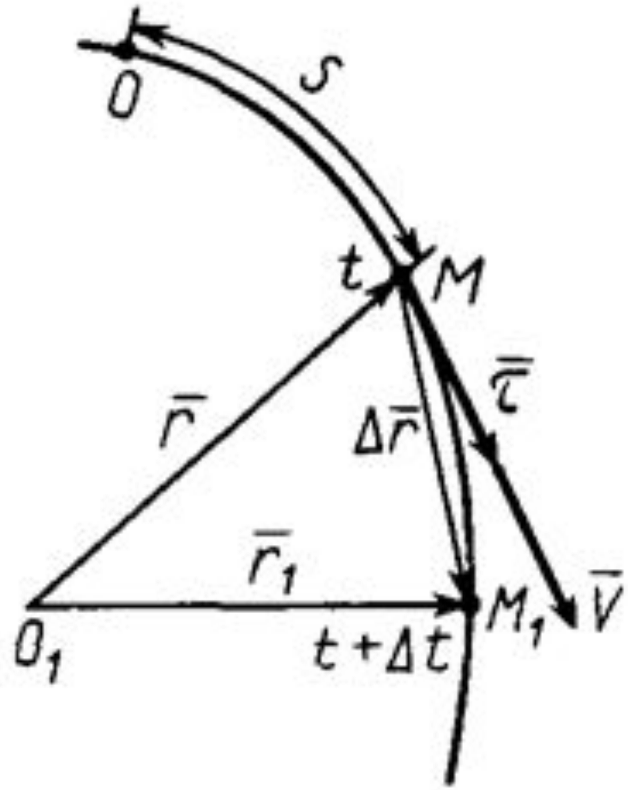


$$s = f(t)$$



$$s = f(t)$$

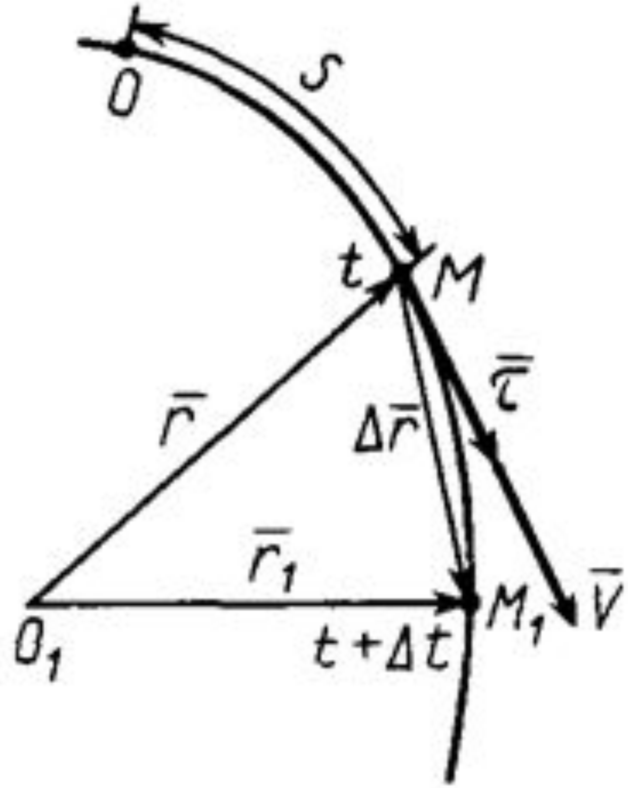
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\dot{s}$$



$$s = f(t)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\dot{s}$$

$$\vec{v} = \dot{s}\,\vec{\tau}$$



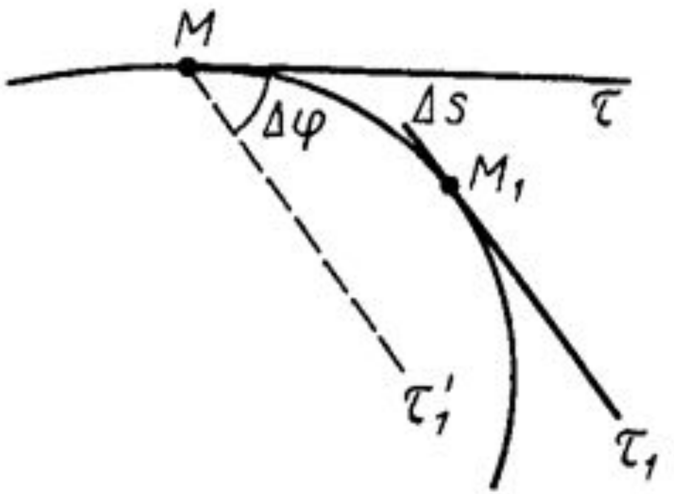
$$s = f(t)$$

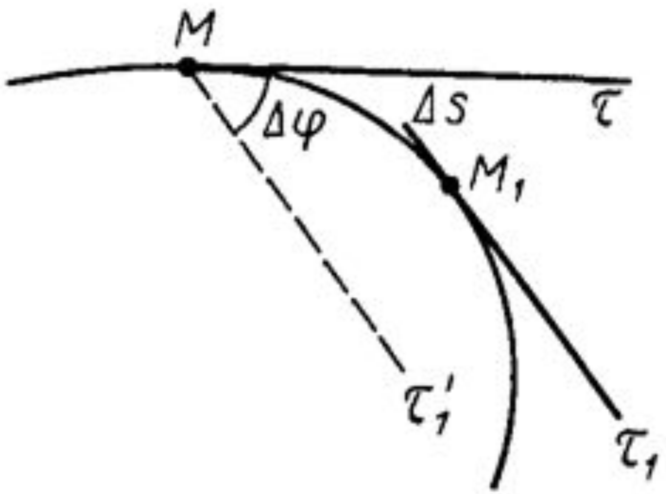
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\dot{s}$$

$$\vec{v} = \dot{s}\,\vec{\tau}$$

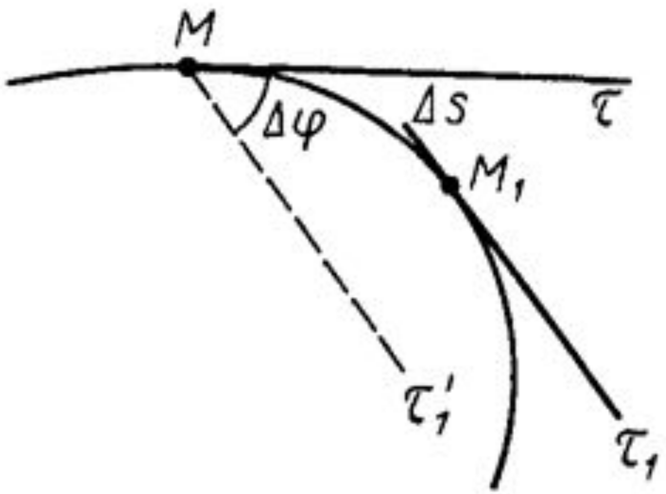
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Геометрические понятия. Дифференцирование единичного вектора. Радиус кривизны и соприкасающаяся плоскость


M
Δφ
Δs
τ
M₁
τ'₁
τ₁



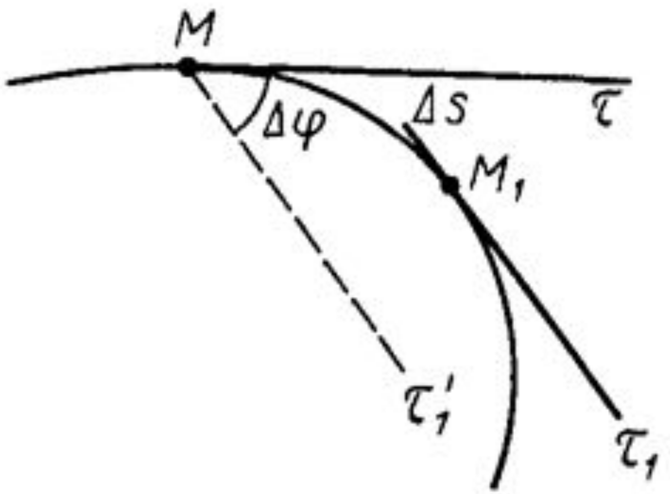
Δϕ - угол смежности



Δφ - угол смежности

k – кривизна

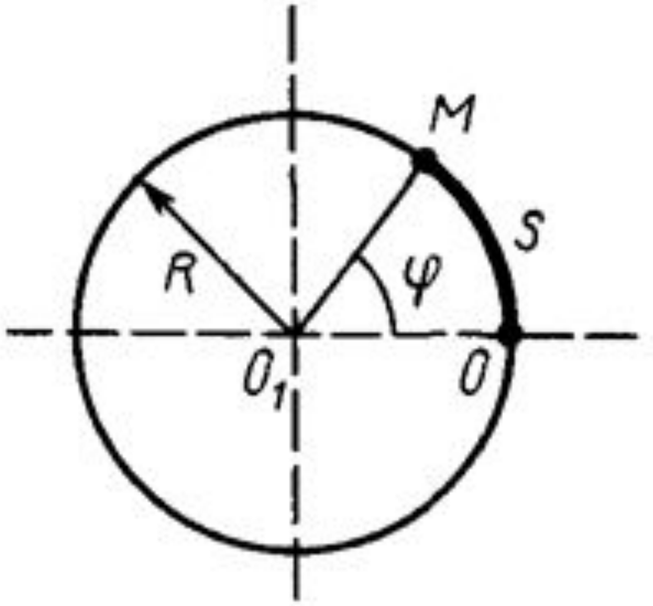
$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$



$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\varphi}.$$

ρ - радиус кривизны

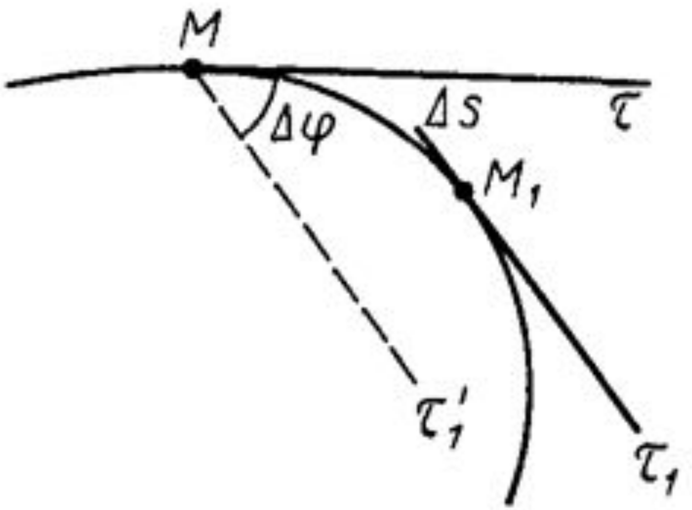
Пример



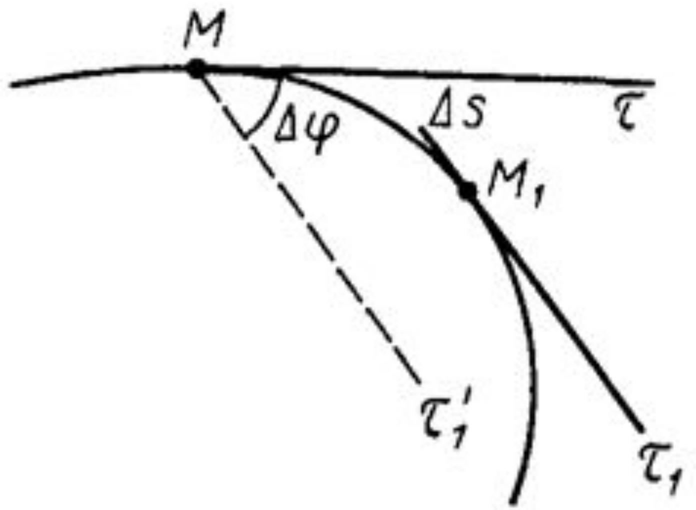
$$s = R\phi$$

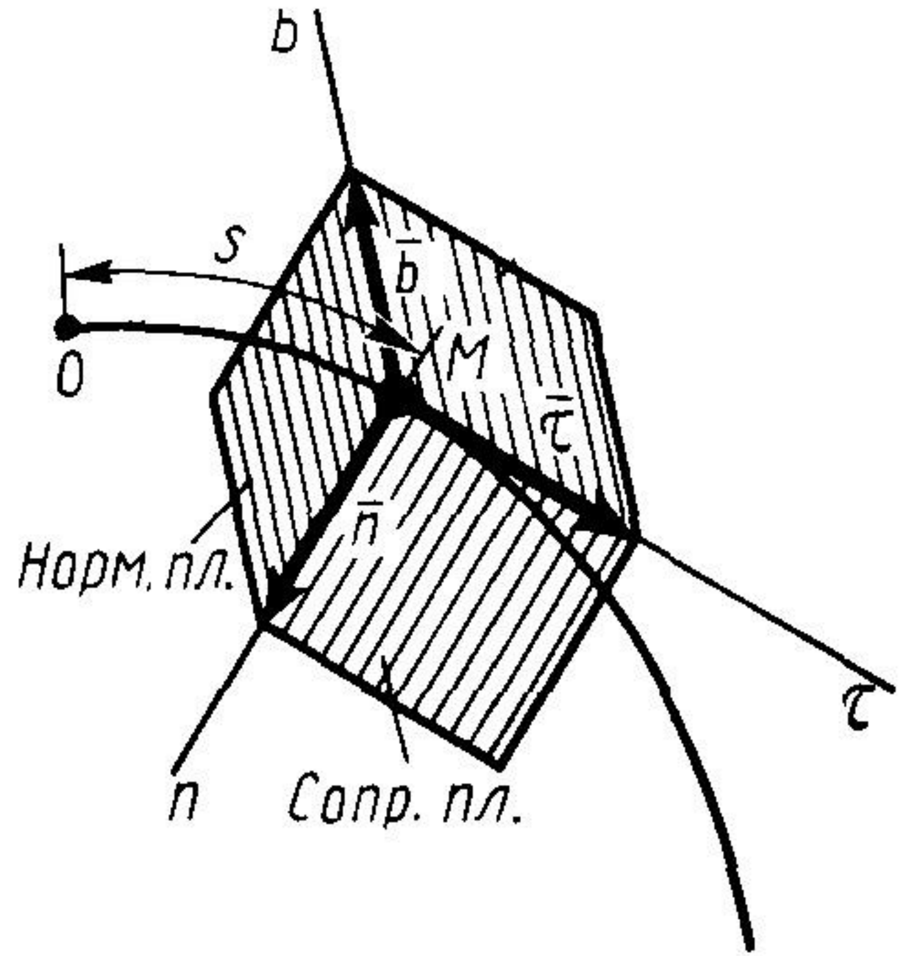
$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{d\left(R\varphi\right)}{d\varphi} = R.$$

Соприкасающаяся плоскость

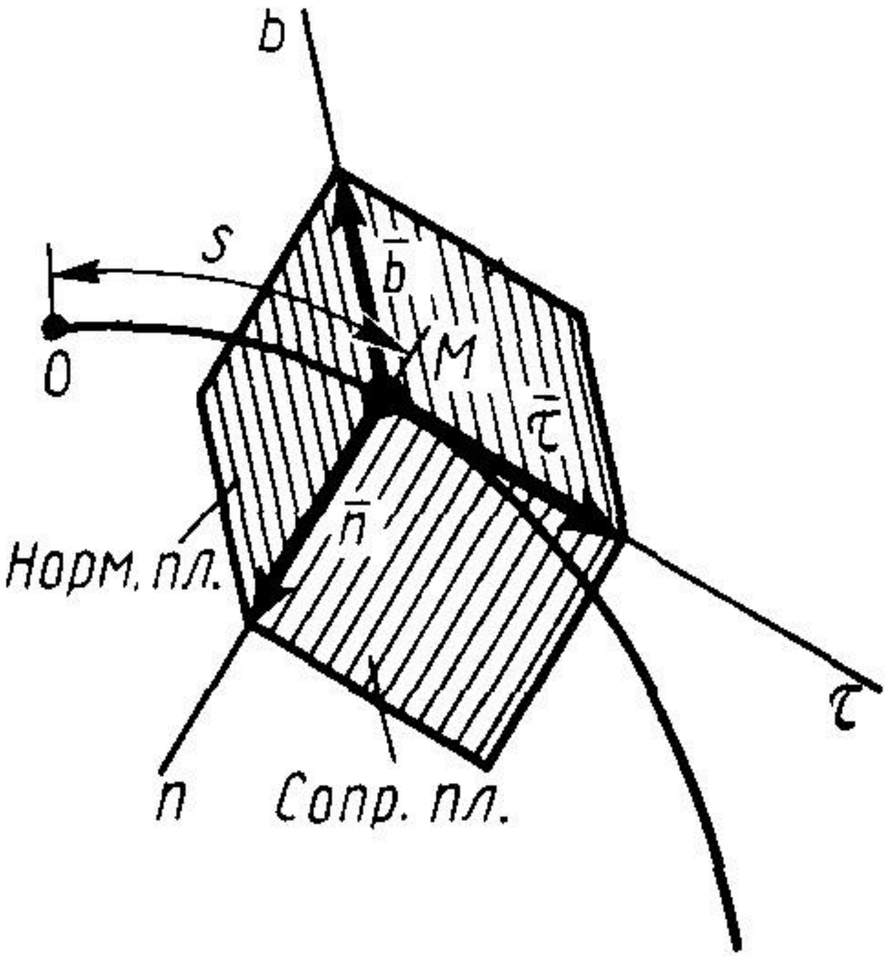


Соприкасающаяся плоскость

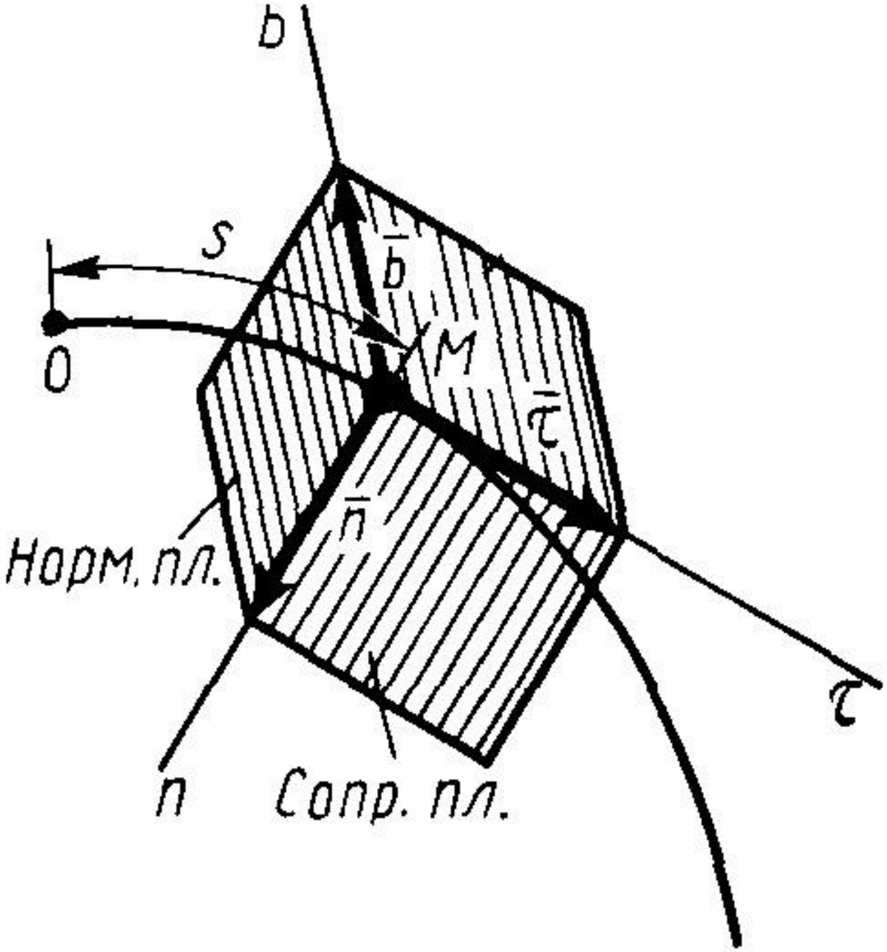




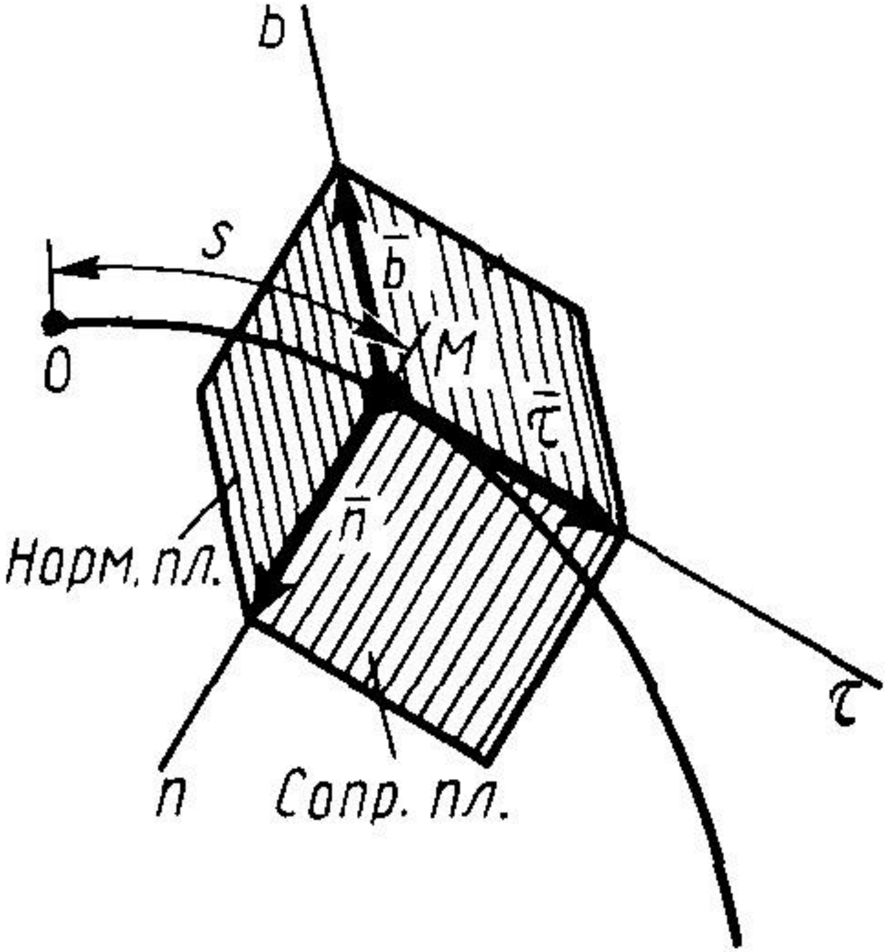
Естественный трехгранник



b
S
$\bar{b}$
M
O
$\bar{\tau}$
$\bar{n}$
Норм. пл.
τ
n
Сопр. пл.

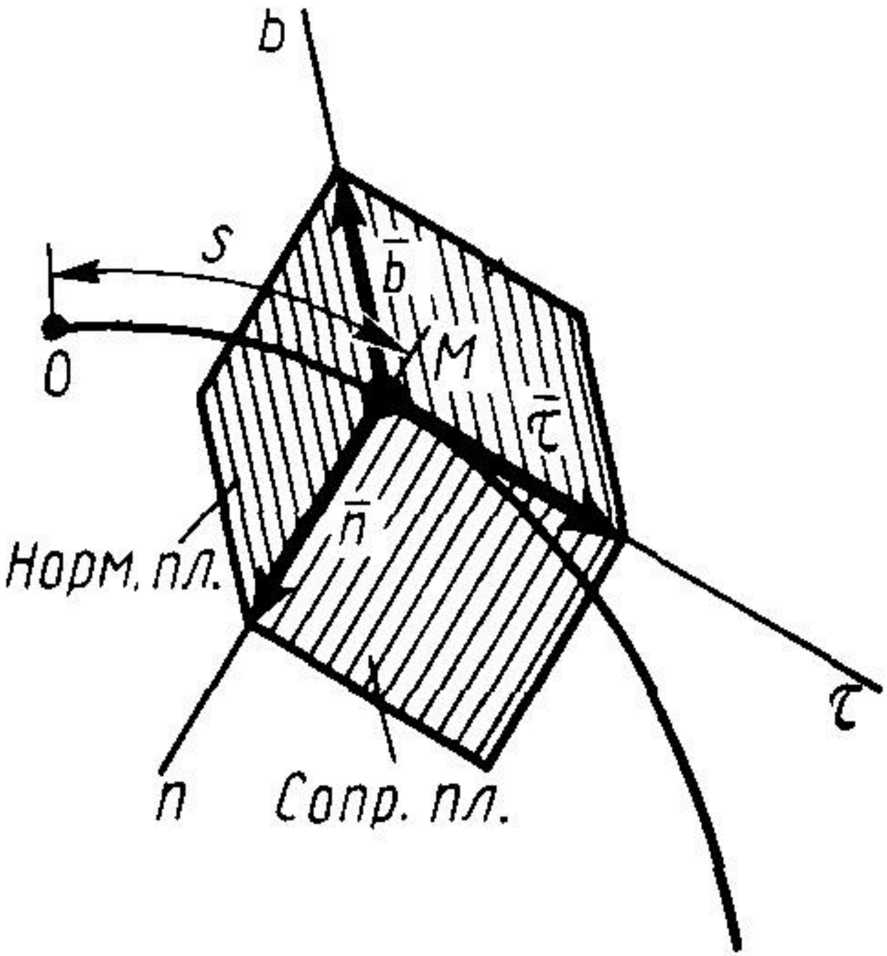


Mτ $\vec{\tau}$



$M\tau$ $\quad \vec{\tau}$

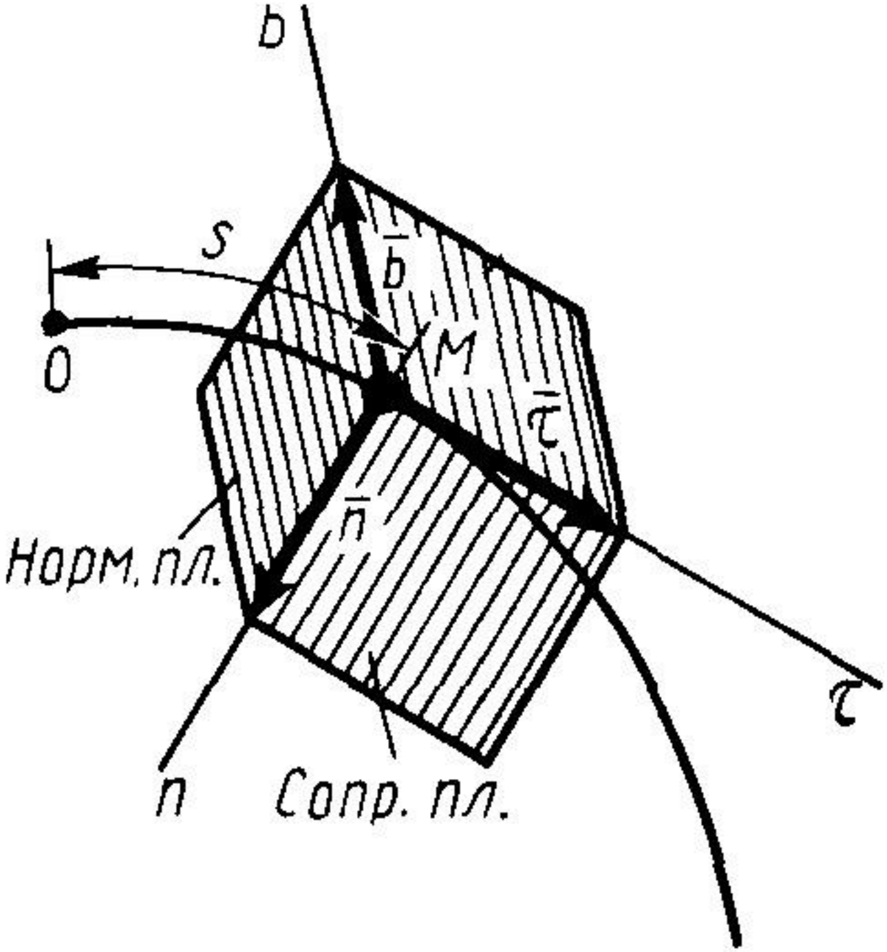
Mn $\quad \vec{n}$



Mτ $\vec{\tau}$

Mn $\vec{n}$

Mb $\vec{b}$



Mτ, *Mn*, *Mb*- естественные оси

$\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ - естественный трехгранник

Дифференцирование единичного вектора

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} \perp \vec{\tau}$$

$$d\vec{\tau}/dt \perp \vec{\tau}$$

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1.$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot \vec{\tau} + \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot \vec{\tau} = 0.$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| \vec{n}.$$

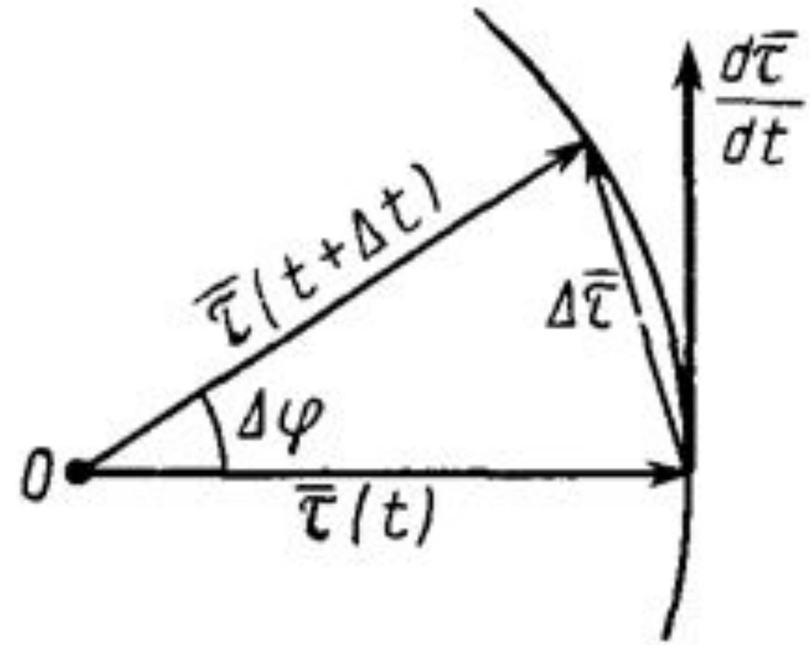
$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|\vec{n}.$$

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{|\Delta t|}.$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|\vec{n}.$$

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\left|\Delta\vec{\tau}\right|}{\left|\Delta t\right|}.$$

$$\left|\Delta\vec{\tau}\right| = 1\cdot\left|\Delta\varphi\right|,$$

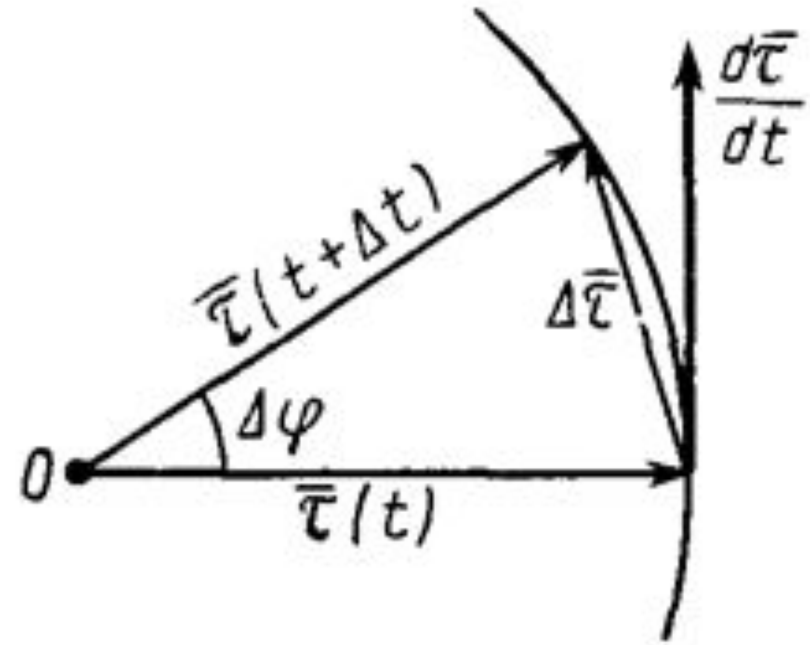


$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| \vec{n}.$$

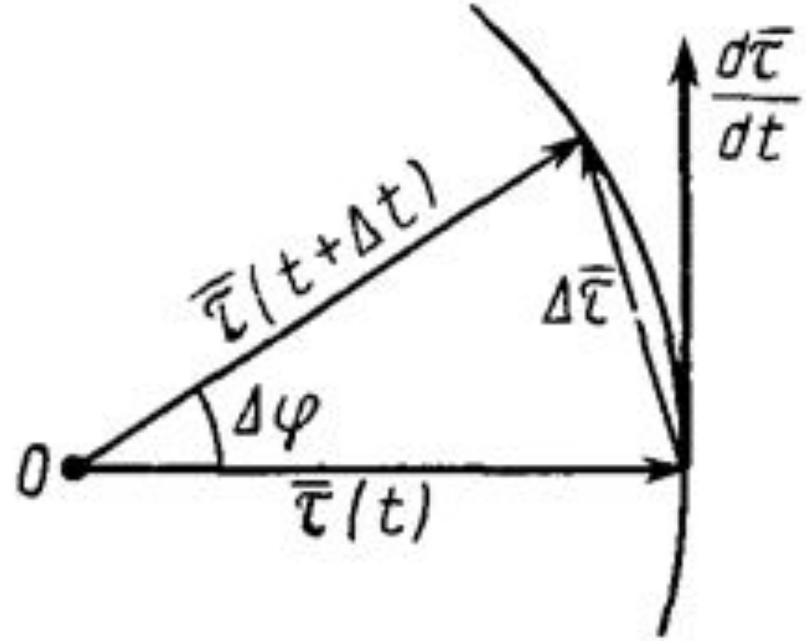
$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\Delta\vec{\tau}\right|}{\left|\Delta t\right|}.$$

$$\left|\Delta\vec{\tau}\right| = 1 \cdot \left|\Delta\varphi\right|,$$

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\Delta\vec{\tau}\right|}{\left|\Delta t\right|} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\Delta\varphi\right|}{\left|\Delta t\right|} = \frac{d\varphi}{dt}.$$



$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| \vec{n}.$$



$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\Delta\vec{\tau}\right|}{\left|\Delta t\right|}.$$

$$\left|\Delta\vec{\tau}\right| = 1 \cdot \left|\Delta\varphi\right|,$$

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\Delta\vec{\tau}\right|}{\left|\Delta t\right|} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\Delta\varphi\right|}{\left|\Delta t\right|} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| \vec{n} = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right| \left|\frac{ds}{dt}\right| \vec{n} = \frac{\left|\dot{s}\right|}{\rho} \vec{n}.$$

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = b\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|\vec{n},$$

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{b},$$

Ускорение точки при естественном способе задания движения

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau} = v_\tau \vec{\tau},$$

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau} = v_\tau \vec{\tau},$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}\vec{\tau}\right) = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n},$$

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau} = v_\tau \vec{\tau},$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}\vec{\tau}\right) = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n},$$

$$\vec{a}_\tau = \ddot{s}\vec{\tau} = \left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)\vec{\tau}$$

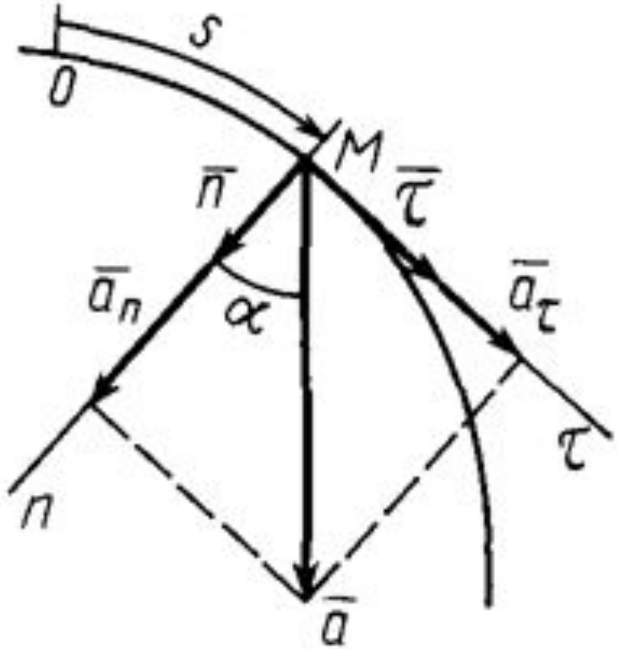
- касательная (тангенциальная) составляющая ускорения

$$\vec{a}_n = \left(\frac{v^2}{\rho}\right)\vec{n} = \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right)\vec{n}$$

- нормальная составляющая ускорения

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

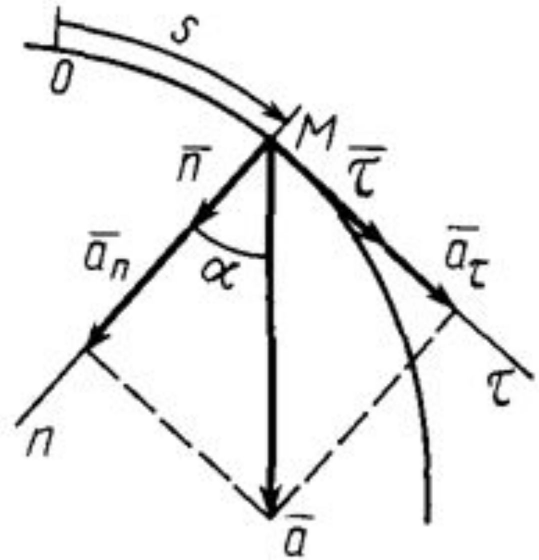
$$a_\tau = \ddot{s},\ a_n = \frac{v^2}{\rho},\ a_b = 0.$$



$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n}.$$

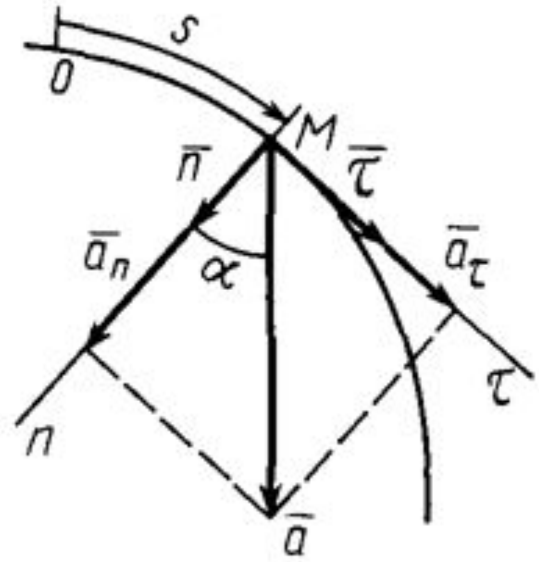
Касательное ускорение характеризует изменение вектора скорости по величине, нормальное - по направлению

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = a \cdot v \cdot \cos\alpha = a_\tau \cdot v,$$



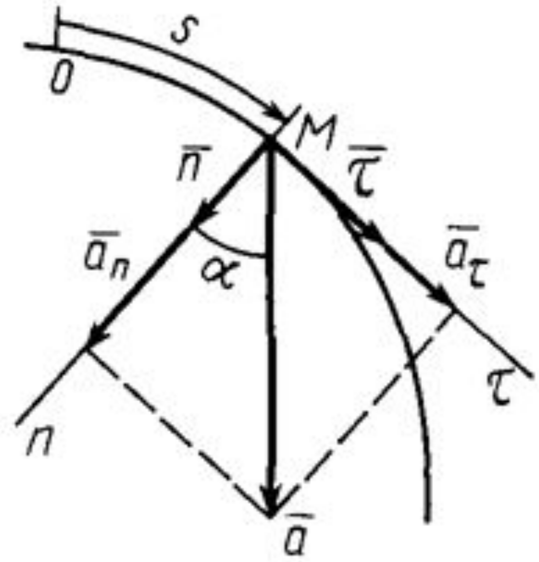
$$\vec{a}\cdot\vec{v} = a\cdot v\cdot\cos\alpha = a_\tau\cdot v,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{v} = v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z$$



$$\vec{a} \cdot \vec{v} = a \cdot v \cdot \cos\alpha = a_\tau \cdot v,$$

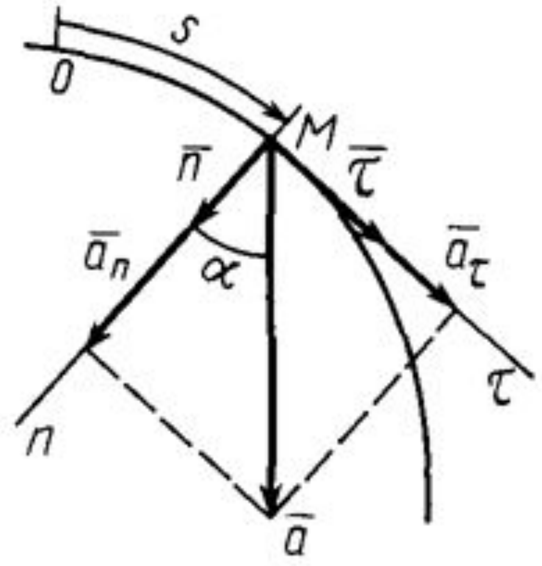
$$\vec{a} \cdot \vec{v} = v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z$$



$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{v}.$$

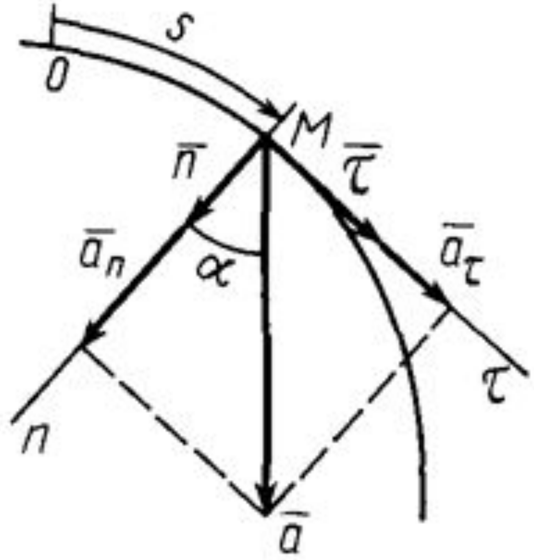
$$\left|\vec{a}\times\vec{v}\right| = a\cdot v\cdot\sin\alpha = a_n\cdot v$$

$$a_n = a\cdot\sin\alpha$$



$$\left|\vec{a}\times\vec{v}\right| = a\cdot v\cdot\sin\alpha = a_n\cdot v$$

$$a_n = a\cdot\sin\alpha$$

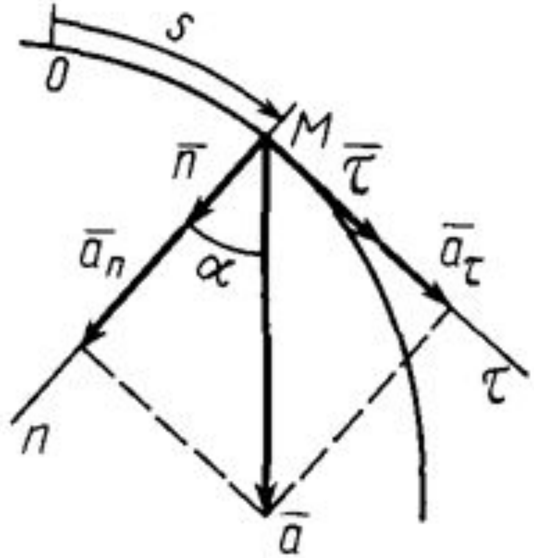


$$\left|\vec{a}\times\vec{v}\right| = \left|\vec{i}\left(a_y v_z - a_z v_y\right) - \vec{j}\left(a_x v_z - a_z v_x\right) + \vec{k}\left(a_x v_y - a_y v_x\right)\right| =$$

$$= \sqrt{\left(a_y v_z - a_z v_y\right)^2 + \left(a_x v_z - a_z v_x\right)^2 + \left(a_x v_y - a_y v_x\right)^2}$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{v}\right| = a\cdot v\cdot\sin\alpha = a_n\cdot v$$

$$a_n = a\cdot\sin\alpha$$



$$\left|\vec{a}\times\vec{v}\right| = \left|\vec{i}\left(a_y v_z - a_z v_y\right) - \vec{j}\left(a_x v_z - a_z v_x\right) + \vec{k}\left(a_x v_y - a_y v_x\right)\right| =$$

$$= \sqrt{\left(a_y v_z - a_z v_y\right)^2 + \left(a_x v_z - a_z v_x\right)^2 + \left(a_x v_y - a_y v_x\right)^2}$$

$$a_n\cdot v = \sqrt{\left(a_y v_z - a_z v_y\right)^2 + \left(a_x v_z - a_z v_x\right)^2 + \left(a_x v_y - a_y v_x\right)^2}$$

$$a_n = \frac{\sqrt{\left(a_y v_z - a_z v_y\right)^2 + \left(a_x v_z - a_z v_x\right)^2 + \left(a_x v_y - a_y v_x\right)^2}}{v}$$