Целевое программирование

Решение задач линейного программирования с несколькими конфликтующими целевыми функциями

Методы решения задач ЦП

Основа методов решения задач ЦП:

1. Преобразование исходной ЗЛП с несколькими ЦФ в ЗЛП с одной ЦФ
2. Решение преобразованной задачи – поиск эффективного («компромиссного») решения

Методы решения задач ЦП

Метод весовых коэффициентов

(ЦФ – взвешенная сумма исходных частных ЦФ)

Метод приоритетов

(на частные ЦФ – установка приоритетов в порядке их важности)

Методы – 1. дают «разные» оптимальные решения

2. применяются при решении задач с разными предпочтениями при принятии решений

Условие задачи ЦП

x_1 - количество единиц продукции I вида

x_2 - количество единиц продукции II вида

Общее количество производителей – не более 10

Количество потребителей на каждый вид продукции – 4 (I) и 8 (II)

Затраты на производство каждого вида продукции – 8 (I) и 24 (II)

Количество производителей на каждый вид продукции – 1 (I) и 2 (II)

Общее количество потребителей – не менее 45

Необходимость в производстве I-го вида продукции – не более 6 единиц

Выделено финансов на реализацию проекта – не более 100 у.е.

Задача: организовать производство – а) максимизировать количество потребителей;

Б) минимизировать затраты (уложиться в выделенное финансирование)

Математическая модель задачи

ЦФ 1 $4x_1 + 8x_2 \geq 45 \quad (\to \max)$

ЦФ 2 $8x_1 + 24x_2 \leq 100 \quad (\to \min)$

Система ограничений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

Варианты решения задачи ЦП

- 1. Преобразование целей исходной задачи в «гибкую» частную задачу, когда методом весовых коэффициентов или методом приоритетов оптимизируются «новые» ЦФ, указывающие на выполнение условий по исходным ЦФ-ограничениям
- 2. Оптимизация методом приоритетов исходных ЦФ

Преобразование целей исходной задачи в «гибкую» частную задачу

$$4x_1 + 8x_2 \geq 45 \quad (\to \max) \qquad \longrightarrow \qquad 4x_1 + 8x_2 + S_1^+ - S_1^- = 45$$

$$8x_1 + 24x_2 \leq 100 \quad (\to \min) \qquad \longrightarrow \qquad 8x_1 + 24x_2 + S_2^+ - S_2^- = 100$$

S_i^+ , S_i^- - **отклоняющие переменные (зависимы – одна из них базисная)**

S_i^+ , S_i^- - **указывают, выполняется или не выполняется ограничений (цель)**

Ограничение типа «$\leq$»: 1. $S_i^+ > 0$ - **ограничение выполняется**

2. $S_i^- > 0$ - **ограничение не выполняется**

Ограничение типа «$\geq$»: 1. $S_i^+ > 0$ - **ограничение не выполняется**

2. $S_i^- > 0$ - **ограничение выполняется**

Поиск решения – удовлетворение большему числу ограничений

$$4x_1 + 8x_2 + S_1^+ - S_1^- = 45 \qquad \longrightarrow \qquad \min S_1^+ = G_1$$ **(выполнение условия по количеству потребителей)**

$$8x_1 + 24x_2 + S_2^+ - S_2^- = 100 \qquad \longrightarrow \qquad \min S_2^- = G_2$$ **(выполнение условия по финансированию)**

Метод весовых коэффициентов (оптимизация «гибкой» задачи)

!Условие по охвату потребителей в 2 раза важнее условия по финансированию

$G_i \to \min \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{min}\, Z = \sum_{i=1}^{2} w_i \cdot G_i$ **где** $w_1 = 2 \quad w_2 = 1$

Условие решаемой задачи в канонической форме

ЦФ $\quad Z = 2S_1^+ + S_2^- \to \min$

Система ограничений $\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + S_1^+ - S_1^- = 45 \\ 8x_1 + 24x_2 + S_2^+ - S_2^- = 100 \\ x_1 + 2x_2 + S_3 = 10 \\ x_1 + S_4 = 6 \end{cases}$

Прямые ограничения $x_1, x_2, S_1^+, S_1^-, S_2^+, S_2^-, S_3, S_4 \geq 0$

Начальное базисное решение:

1. **базисные переменные -** S_1^+, S_2^+, S_3, S_4
2. **свободные переменные -** x_1, x_2, S_1^-, S_2^-

$S_1^+ = 45 + S_1^- - 4x_1 - 8x_2$

$Z = 2S_1^+ + S_2^- = 90 + 2S_1^- - 8x_1 - 16x_2 + S_2^-$

Метод весовых коэффициентов (оптимизация «гибкой» задачи)

	x1	x2	s1+	s1-	s2+	s2-	s3	s4	res	
s1+	4	8	1	-1	0	0	0	0	45	5,625
s2+	8	24	0	0	1	-1	0	0	100	4,16666667
s3	1	2	0	0	0	0	1	0	10	5
s4	1	0	0	0	0	0	0	1	6	#ДЕЛ/0!
z	8	16	0	-2	0	-1	0	0	90	
s1+	1,33333333	0	1	-1	-0,33333333	0,333333333	0	0	11,6666667	8,75
x2	0,33333333	1	0	0	0,041666667	-0,041666667	0	0	4,16666667	12,5
s3	0,33333333	0	0	0	-0,08333333	0,083333333	1	0	1,66666667	5
s4	1	0	0	0	0	0	0	1	6	6
z	2,66666667	0	0	-2	-0,66666667	-0,333333333	0	0	23,3333333	
s1+	0	0	1	-1	0	0	-4	0	5	
x2	0	1	0	0	0,125	-0,125	-1	0	2,5	
x1	1	0	0	0	-0,25	0,25	3	0	5	
s4	0	0	0	0	0,25	-0,25	-3	1	1	
z	0	0	0	-2	0	-1	-8	0	10	

Решение: s1+=5
x1=5
x2=2,5
Z=10

Одна из ЦФ не достигла своего оптимального решения:

s1+=5 - объем потребителей меньше запланированного на 5
s2-=0 - объем финансирования выполнен полностью

Метод приоритетов (оптимизация «гибкой» задачи)

Ранжирование ЦФ по приоритету

$\min G_1 = \rho_1$ (наивысший приоритет)

……………………………………

$\min G_n = \rho_n$ (наименьший приоритет)

ρ_i - отклоняющие переменные (S_i^+ или S_i^-)

Алгоритм «специального» симплекс метода

(гарантия того, что решение задачи с ЦФ более высокого приоритета не претерпит ухудшения)

Вариант 1. Правило исключения столбцов (уменьшение размерности задачи)

Из оптимальной симплекс таблицы задачи с ЦФ G_k удаление небазисных переменных x_j с $Z_j - C_j \neq 0$ до начала решения задачи с ЦФ G_{k+1}

Вариант 2. Правило введения дополнительных ограничений $\rho_k = \rho_k^*$ (увеличение размерности задачи)

а) Ранжирование частных ЦФ задачи в порядке их приоритетов

$G_1 = \rho_1 \succ G_2 = \rho_2 \succ \ldots \succ G_n = \rho_n \qquad k = 1$

б) Решение задачи с ЦФ G_k - получение оптимума для ρ_k - ρ_k^*

в) при $k < n$ - ввод нового ограничения $\rho_k = \rho_k^*$ (переход к б));

при $k = n$ - решение найдено (новое ограничение можно учесть путем подстановки значения ρ_k^* вместо переменной ρ_k - уменьшение переменных)

Метод приоритетов (оптимизация «гибкой» задачи)

$G_1 = S_1^+ \to \min \quad \succ \quad G_2 = S_2^- \to \min$

Правило введения дополнительных ограничений

<u>Первая задача ЛП</u>

ЦФ $\qquad \min G_1 = S_1^+$

Система ограничений
$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + S_1^+ - S_1^- = 45 \\ 8x_1 + 24x_2 + S_2^+ - S_2^- = 100 \\ x_1 + 2x_2 + S_3 = 10 \\ x_1 + S_4 = 6 \end{cases}$$

Прямые ограничения $x_1, x_2, S_1^+, S_1^-, S_2^+, S_2^-, S_3, S_4 \geq 0$

Начальное базисное решение:

1. базисные переменные - S_1^+, S_2^+, S_3, S_4
2. свободные переменные - x_1, x_2, S_1^-, S_2^-

$S_1^+ = 45 + S_1^- - 4x_1 - 8x_2$

$G_1 = 45 + S_1^- - 4x_1 - 8x_2 \to \min$

1 итерация

	x1	x2	s1+	s1-	s2+	s2-	s3	s4	res	
s1+	4	8	1	-1	0	0	0	0	45	5,625
s2+	8	24	0	0	1	-1	0	0	100	4,16667
s3	1	2	0	0	0	0	1	0	10	5
s4	1	0	0	0	0	0	0	1	6	#ДЕЛ/0!
z	4	8	0	-1	0	0	0	0	45	
s1+	1,33333	0	1	-1	-0,33333	0,33333	0	0	11,6667	8,75
x2	0,33333	1	0	0	0,04167	-0,04167	0	0	4,16667	12,5
s3	0,33333	0	0	0	-0,08333	0,08333	1	0	1,66667	5
s4	1	0	0	0	0	0	0	1	6	6
z	1,33333	0	0	-1	-0,33333	0,33333	0	0	11,6667	
s1+	0	0	1	-1	0	0	-4	0	5	
x2	0	1	0	0	0,125	-0,125	-1	0	2,5	
x1	1	0	0	0	-0,25	0,25	3	0	5	
s4	0	0	0	0	0,25	-0,25	-3	1	1	
z	0	0	0	-1	0	0	-4	0	5	

Оптимальное решение x1=5

x2=2,5

minG1=5 дефицит в 5 потребителях

т.к. G2=S2-=0 решение на первой итерации является решением для второй итерации

Метод приоритетов (оптимизация «гибкой» задачи)

Вторая задача ЛП

ЦФ $\min G_2 = S_2^-$

Дополнительное ограничение $S_1^+ = 5$ - учет путем подстановки в систему ограничений

Система ограничений $\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 - S_1^- + S_5 = 40 \\ 8x_1 + 24x_2 + S_2^+ - S_2^- = 100 \\ x_1 + 2x_2 + S_3 = 10 \\ x_1 + S_4 = 6 \end{cases}$

Прямые ограничения $x_1, x_2, S_5, S_1^-, S_2^+, S_2^-, S_3, S_4 \geq 0$

Начальное базисное решение:

1. базисные переменные - S_5, S_2^+, S_3, S_4, где S_5 - искусственная
2. свободные переменные - x_1, x_2, S_1^-, S_2^-

$G_2 = S_2^- + M \cdot S_5 \to \min \quad M = 500 \qquad S_5 = 40 - 4x_1 - 8x_2 + S_1^-$

$G_2 = S_2^- + 20000 - 2000x_1 - 4000x_2 + 500S_1^- \to \min$

2 итерация										
	x1	x2	s1-	s5	s2+	s2-	s3	s4	res	
s5	4	8	-1	1	0	0	0	0	40	5
s2+	8	24	0	0	1	-1	0	0	100	4,16667
s3	1	2	0	0	0	0	1	0	10	5
s4	1	0	0	0	0	0	0	1	6	#ДЕЛ/0!
z	2000	4000	-500	0	0	-1	0	0	20000	
s5	1,333	0	-1	1	-0,33333	0,33333	0	0	6,66667	5
x2	0,333	1	0	0	0,04167	-0,04167	0	0	4,16667	12,5
s3	0,333	0	0	0	-0,08333	0,08333	1	0	1,66667	5
s4	1	0	0	0	0	0	0	1	6	6
z	666,7	0	-500	0	-166,667	165,667	0	0	3333,33	
x1	1	0	-0,8	0,75	-0,25	0,25	0	0	5	
x2	0	1	0,25	-0,25	0,125	-0,125	0	0	2,5	
s3	0	0	0,25	-0,25	0	0	1	0	0	
s4	0	0	0,75	-0,75	0,25	-0,25	0	1	1	
z	0	0	0	-500	0	-1	0	0	0	
Оптимальное решение				x1=5						
				x2=2,5						
				G2=0						
Выполнение условия по финансированию, дефицит потребителей										

Оптимизация «настоящих» ЦФ

Цели: 1. $\max P_1 = 4x_1 + 8x_2$ (объем)

2. $\min P_2 = 8x_1 + 24x_2$ (стоимость)

Ограничения: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 \le 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

Метод приоритетов – правило введения дополнительных ограничений

Первая ЗЛП:

ЦФ $\max P_1 = 4x_1 + 8x_2$

Ограничения $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + S_1 = 10 \\ x_1 + S_2 = 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, S_1 \ge 0, S_2 \ge 0 \end{cases}$

Начальное базисное решение:

1. базисные переменные $S_1,\ S_2$
2. свободные переменные $x_1,\ x_2$

1 вариант	x1	x2	s1	s2	res		1 итерация
s1	1	2	1	0	10	5	
s2	1	0	0	1	6	#ДЕЛ/0!	
p1	-4	-8	0	0	0		
x2	0,5	1	1	0	5		
s2	1	0	0	1	6		
p1	0	0	4	0	40		
Оптимальное решение			x1=0				
			x2=5				
			P1=40				

Оптимизация «настоящих» ЦФ

Вторая ЗЛП:

ЦФ $\min P_2 = 8x_1 + 24x_2$

Система ограничений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 \le 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

Новое ограничение $4x_1 + 8x_2 \ge 40$ (не нарушает решения первой задачи)

Каноническая форма $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + S_1 = 10 \\ x_1 + S_2 = 6 \\ 4x_1 + 8x_2 - S_3 + r_1 = 40 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, S_1 \ge 0, S_2 \ge 0, S_3 \ge 0, r_1 \ge 0 \end{cases}$

r_1 - искуссвенная $r_1 = 40 - 4x_1 - 8x_2 + S_3$

Начальное базисное решение:

1. базисные переменные S_1, S_2, r_1
2. свободные переменные x_1, x_2, S_3

$M = 100$

$\min P_2 = 8x_1 + 24x_2 + Mr_1 = -392x_1 - 776x_2 + 100S_3 + 4000$

2 итерация

	x1	x2	s1	s2	s3	r1	res	
s1	1	2	1	0	0	0	10	5
s2	1	0	0	1	0	0	6	#ДЕЛ/0!
r1	4	8	0	0	-1	1	40	5
p2	392	776	0	0	-100	0	4000	
s1	0	0	1	0	0,25	-0,25	0	#ДЕЛ/0!
s2	1	0	0	1	0	0	6	6
x2	0,5	1	0	0	-0,125	0,125	5	10
p2	4	0	0	0	-3	-97	120	
s1	0	0	1	0	0,25	-0,25	0	
x1	1	0	0	1	0	0	6	
x2	0	1	0	-1	-0,125	0,125	2	
p2	0	0	0	-4	-3	-97	96	
Оптимальное решение			x1=6					
			x2=2					
			P2=96					

Дефицит потребителей (5) и остаток финансирования (4)

Оптимизация «настоящих» ЦФ

Метод приоритетов – правило исключения столбцов

Первая ЗЛП – оптимизация объема

ЦФ $\max P_1 = 4x_1 + 8x_2$ активная роль

ЦФ $\min P_2 = 8x_1 + 24x_2$ пассивная роль

Ограничения $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + S_1 = 10 \\ x_1 + S_2 = 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, S_1 \ge 0, S_2 \ge 0 \end{cases}$

После решения – исключение переменной S_1

$(Z_1 - C_1 = 4)$

Решение второй ЗЛП

ЦФ $\max P_1 = 4x_1 + 8x_2$ пассивная роль

ЦФ $\min P_2 = 8x_1 + 24x_2$ активная роль

1 итерация							
2 вариант	x1	x2	s1	s2	res		
s1	1	2	1	0	10	5	
s2	1	0	0	1	6	#ДЕЛ/0!	
p2	-8	-24	0	0	0		
p1	-4	-8	0	0	0		
x2	0,5	1	0,5	0	5		Оптимум
s2	1	0	0	1	6		x1=0
p2	4	0	12	0	120		x2=5
p1	0	0	4	0	40		P1=40
			иск				
2 итерация							
x2	0,5	1		0	5	10	
s2	1	0		1	6	6	
p2	4	0		0	120		
p1					40		
x2	0	1		-1	2		Оптимум
x1	1	0		1	6		x1=6
p2	0	0	0	-4	96		x2=2
p1					40		P2=96

Выводы

- Задачи ЦП – задачи принятия решений с несколькими ЦФ
- Качество принятых решений зависит: способа ранжирования частных ЦФ по степени их важности и степени гибкости множества ограничений
- Методы решения задач ЦП – это поиск «эффективного решения»