

КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

- **Путь и перемещение. Способы описания движения.**
- **Основные кинематические характеристики: скорость и ускорение.**
- **Описание криволинейного движения.**
- **Кинематика вращательного движения, угловая скорость и угловое ускорение.**
- **Связь угловых и линейных кинематических характеристик.**

КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Цель кинематики - написать *уравнение движения*, позволяющее определить положение тела в любой момент времени, не вдаваясь в причины движения.

Система отсчета - тело отсчета, связанная с ней система координат и часы для отсчета времени.

Материальная точка - макроскопическое тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Степени свободы i – число независимых координат, необходимых для однозначного определения положения тела в пространстве.

Для материальной точки $i = 3$.

КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

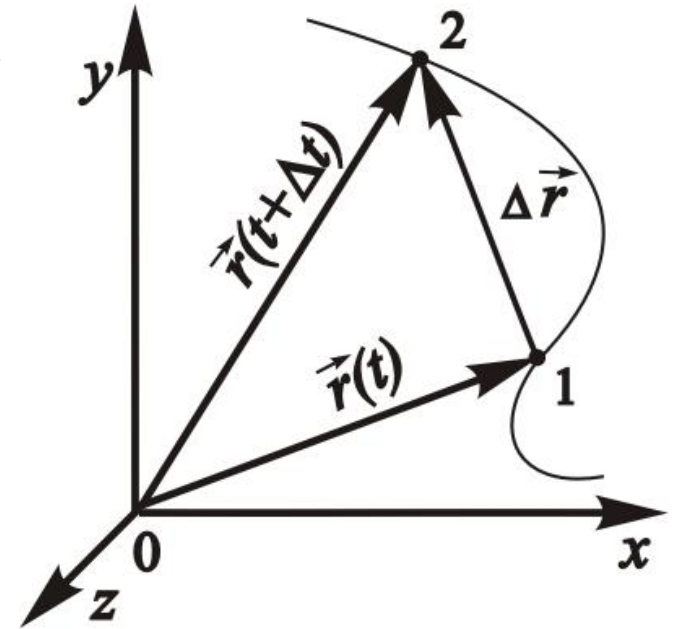
Способы задания положения тела в пространстве:

1) координатный: $x(t), y(t), z(t)$

2) векторный, с помощью

радиус-вектора $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$



При изменении положения точки из 1 в 2, совершенное за время Δt радиус-вектор получает приращение, называемое **перемещением**:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Путь S – длина траектории; $|\Delta\vec{r}| \neq S$

КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Средняя скорость перемещения за время Δt :

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right] \quad (1) \rightarrow$$

- зависит от выбора интервала времени;
- со направлена с $\Delta \vec{r}$

Мгновенная скорость:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2)$$

Вектор скорости можно выразить через проекции на координатные оси:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (3)$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \quad (3')$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (4)$$

КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Среднее ускорение за время Δt :

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right] \quad (5) \rightarrow$$

- зависит от выбора интервала времени;
- сонаправлена с $\Delta \vec{v}$

Мгновенное ускорение:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (6)$$

Через проекции на координатные оси:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (7)$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} \quad (7')$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (8)$$

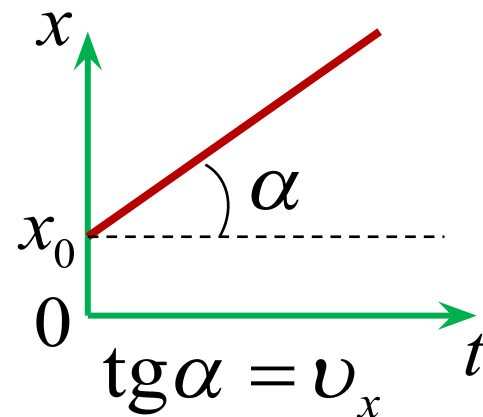
ОПИСАНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

1) **Равномерное движение:** $\forall v = const$

$$(3) \Rightarrow dx = v_x dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = v_x \int_0^t dt \Rightarrow$$

Уравнение движения:

$$x = x_0 + v_x t \quad (9)$$



x_0 – начальная координата точки;

v_x – проекция вектора скорости на ось x .

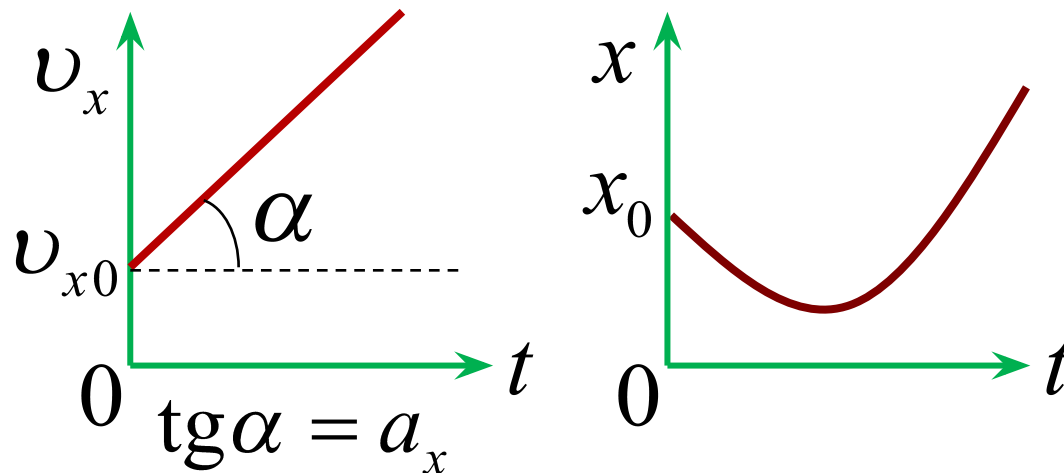
2) **Равноускоренное движение:** $\forall a = const$

$$(7) \Rightarrow dv_x = a_x dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv_x = a_x \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$v_x = v_{ox} + a_x t \quad (10) \quad - \text{зависимость скорости от времени}$$

ОПИСАНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

$$(3) \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_{ox} + a_x t) dt \Rightarrow x = x_0 + v_{ox} t + \frac{a_x t^2}{2} \quad (11)$$



(10) И (11) \Rightarrow найдем пройденный путь:

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (12)$$

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad (13)$$

$a > 0$ – тело ускоряется; $a < 0$ – тело замедляется.

ОПИСАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

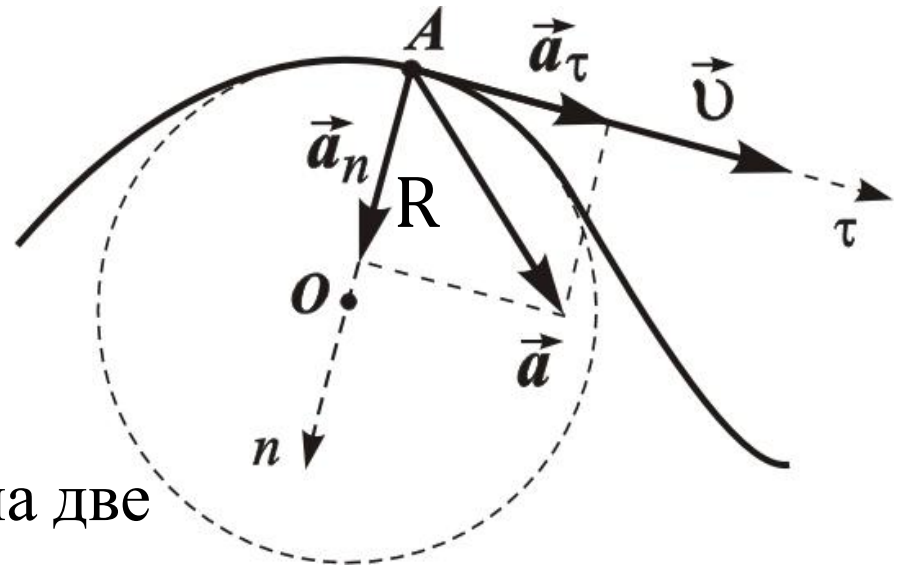
Криволинейное движение – движение с ускорением.

Его можно представить как движение по дугам окружностей различного радиуса. Вектор скорости направлен по касательной, вектор ускорения внутрь траектории.

Для точки А:

R – радиус кривизны траектории;

O – центр кривизны.



Разобьём вектор ускорения на две составляющие:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad (14)$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad (15)$$

ОПИСАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

∇
 a_τ – **тангенциальное ускорение** – характеризует изменение скорости по величине:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

- (16) ∇
 $a_\tau \uparrow \uparrow v$ - движение ускоренное;
 ∇
 $a_\tau \uparrow \downarrow v$ - движение замедленное;
 ∇
 $a_\tau = 0$ - скорость постоянна.

∇
 a_n – **нормальное ускорение** – характеризует изменение скорости только по направлению.

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

(17)


- При движении по кривой траектории с постоянной по величине скоростью, в каждой точке ускорение направлено к центру кривизны траектории и $a = a_n$;
- При движении по прямой $a_n = 0$.

КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Абсолютно твердое тело – это тело, деформацией которого при его движении в условиях данной задачи можно пренебречь.

Два основных типа движения тел:

- Поступательное
- Вращательное

Линейные кинематические характеристики (скорость v и ускорение a) для различных точек вращающегося тела отличаются друг от друга 

Для описания вращательного движения тела используют угловые величины: угловую скорость и угловое ускорение.

КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим тело, вращающееся
вокруг неподвижной оси.

NN' – ось вращения;

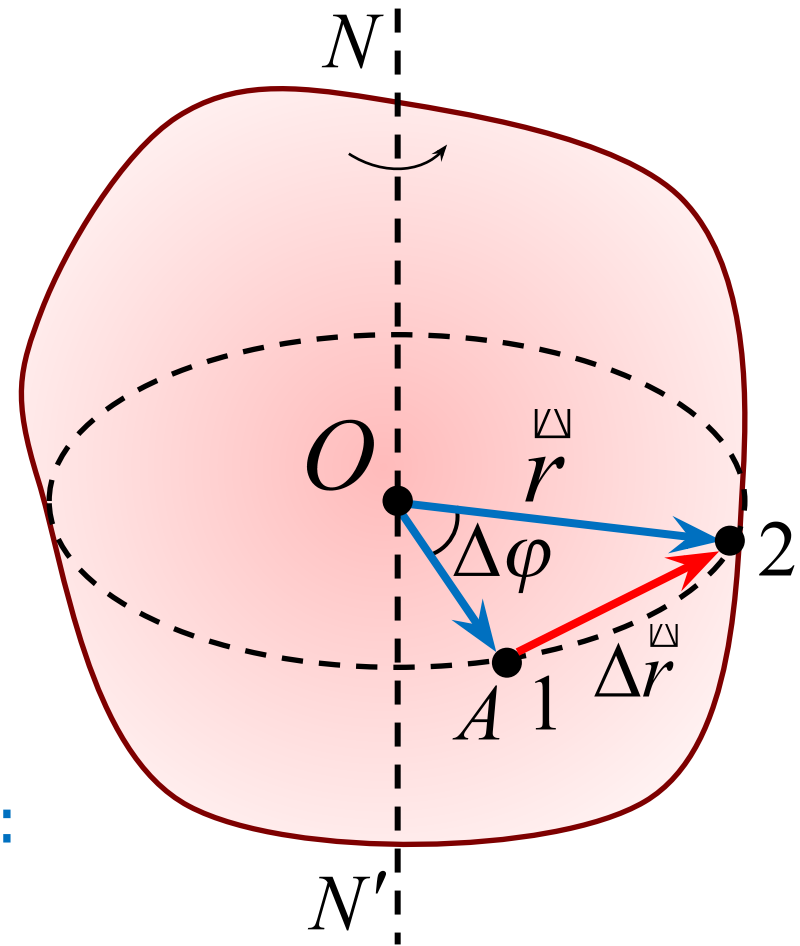
$\Delta\phi$ – угол поворота точки A
за время Δt .

Средняя угловая скорость:

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad (18) \quad \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$$

Мгновенная угловая скорость:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} \quad (19)$$



КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Равномерное вращение: $\omega = \text{const.}$

Период вращения T –

время одного полного оборота:

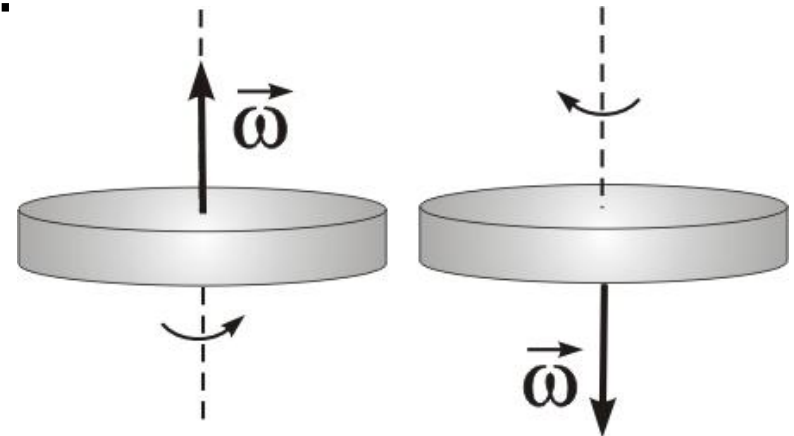
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (20)$$

Частота ν – число оборотов, совершаемых в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (21) \quad [\text{Гц}]$$

Введем вектор угловой скорости $\vec{\omega}$, который определяет направление вращения:

- $\vec{\omega} \parallel$ оси вращения;
- направление определяется правилом правой руки.



КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Угловое ускорение:

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}} \quad (22) \quad \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right]$$

 $\varepsilon \uparrow \uparrow \omega$ - ускоренное вращение

 $\varepsilon \uparrow \downarrow \omega$ - замедленное вращение

При **равноускоренном** вращении $\varepsilon = \text{const}$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \varepsilon t} \quad (23)$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}} \quad (24)$$

 $\varepsilon > 0$ - ускоренное вращение

 $\varepsilon < 0$ - замедленное вращение

СВЯЗЬ УГЛОВЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК


Угловые характеристики ω и ν одинаковы для всех точек вращающегося тела.

Линейные характеристики ν , a , a_n , a_τ для разных точек различны и зависят от расстояния до оси вращения r .

$$\nu = \omega \cdot r \quad (25)$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r \quad (26)$$

$$a_n = \omega^2 r \quad (27)$$


$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} =$$
$$= r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$