СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайные величины и их числовые характеристики

Содержание

Понятие случайной величины

Случайная величина — одно из важнейших понятий теории вероятностей. Случайные величины обозначают прописными буквами латинского алфавита, а их возможные значения — строчными.

Большинство экспериментов завершаются появлением некоторого числа *X*:

- в опыте по подбрасыванию *n* раз монеты — *X* (числа выпаданий решки);
- при стрельбе по мишени из *n* опытов — *X* (числа точных попаданий) и т.д.

В приведенных примерах число *X* обозначает величину, характеризующую некоторое случайное событие (опыт, эксперимент). В зависимости от исхода конкретного испытания эта величина принимает различные числовые значения, поэтому называется случайной.

Поскольку большинство величин окружающего мира являются случайными, их исследование представляется весьма важным в теории вероятностей.

Понятие случайной величины

Случайной величиной (СВ) называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем заранее до опыта неизвестно, какое именно.

Делятся на два типа:

- **дискретные** СВ (**ДСВ**)
- **непрерывные** СВ (**НСВ**)

Дискретная случайная величина (ДСВ)

ДСВ – такая величина ,число возможных испытаний которой либо конечно, либо бесконечное множество, но обязательно счетное.

Например, частота попаданий при 3 выстрелах – X

$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=3$

ДСВ будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если будет указано, какую вероятность имеет каждое из событий.

Функция распределения случайной величины

В этом подразделе дано определение функции распределения и приведены ее свойства.

Результат эксперимента ξ будем называть ***случайной величиной*** (СВ), если для любого $x \in \mathbb{R}$ неравенство $\xi < x$ является событием, т.е. определена вероятность $P(\xi < x)$. Эта вероятность как функция от x называется *функцией распределения* (ФР) *случайной величины* ξ и обозначается $F_\xi(x)$.

Итак, ***функцией распределения*** называют вероятность того, что случайная величина ξ в результате испытания примет значение, меньшее x:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x). \tag{2.1}$$

Там, где очевидно, о какой случайной величине идет речь, ее функцию распределения будем обозначать просто $F(x)$.

Функция распределения случайной величины

Свойства функции распределения:

1) функция распределения монотонно не убывает на $\mathbb{R}$, т. е. $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$. Это очевидно, так как событие $(\xi < x_2)$ является суммой двух несовместных событий $(\xi < x_1)$ и $(x_1 \le \xi < x_2)$. Значит, $p(\xi < x_2) = p(\xi < x_1) + p(x_1 \le \xi < x_2) \ge p(\xi < x_1)$ в силу неотрицательности вероятности;

2) так как событие $\xi < +\infty$ — достоверное, а $\xi < -\infty$ — невозможное, то $\exists \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

3) поскольку функция распределения монотонна и ограничена на $\mathbb{R}$, она может иметь не более чем счетное множество точек разрыва первого рода;

4) функция распределения непрерывна слева при любом значении x: $\lim\limits_{y \to x-0} F(y) = F(x)$;

5) вероятность того, что случайная величина ξ примет значение в полуинтервале $[a, b)$, равна

$$P\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a). \qquad (2.2)$$

Эти свойства непосредственно вытекают из определения функции распределения.

Дискретные случайные величины

Случайная величина называется ***дискретной***, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными (ненулевыми) вероятностями. Тогда каждому элементарному исходу X ставится в соответствие одно из не более чем счетного набора пар чисел $(x_1, p_1), \ldots, (x_n, p_n)$, $n \le \infty$.

Правило, устанавливающее связь между значением случайной величины и ее вероятностью, называется ***законом распределения случайной величины***.

Случайные величины обозначают прописными буквами латинского алфавита X, Y, ..., а значения, которые они принимают, — соответствующими строчными: x, y, ...

Например, дискретная случайная величина X представляет собой конечный (или бесконечный) ряд чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$. Если заданы вероятности $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$, то его называют также ***рядом распределений***.

Дискретные случайные величины

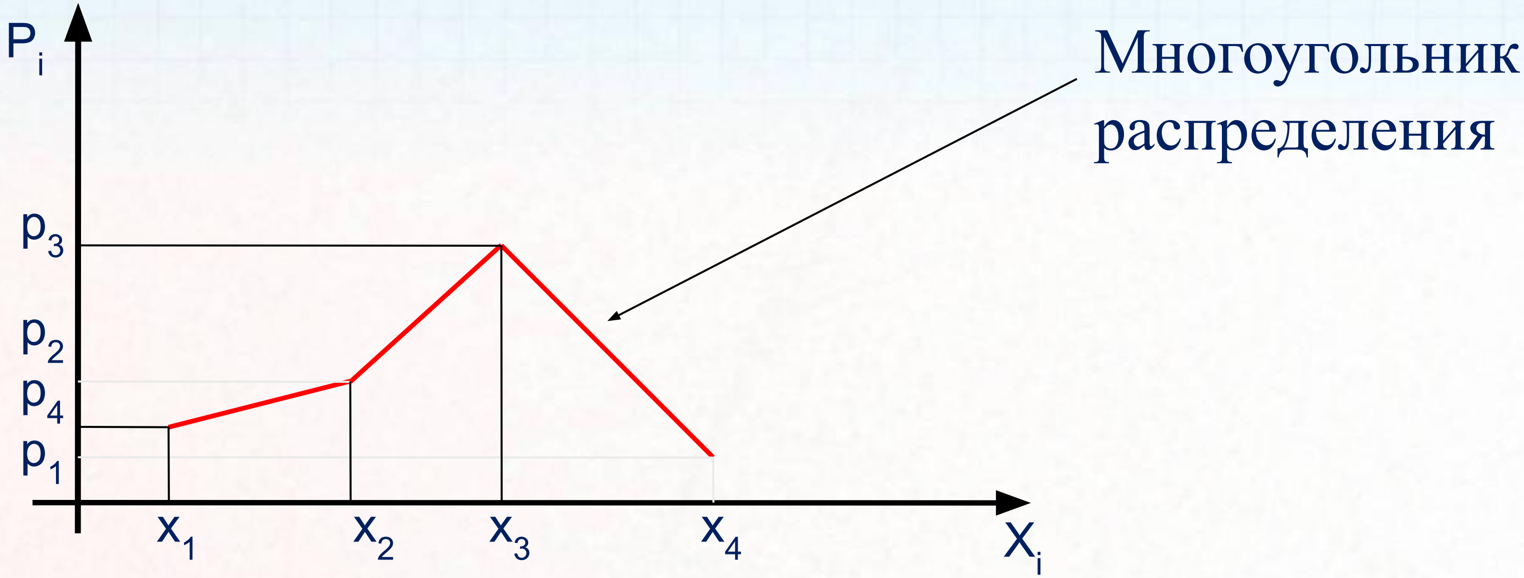
Обычно закон распределения случайной величины задается в виде таблицы, в первой строке которой расположены значения случайной величины, а во второй — соответствующие им вероятности:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

При этом сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины X равна 1:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Закон распределения ДСВ



Сумма ординат многоугольника распределения, представляющая собой сумму вероятностей всех возможных значений СВ всегда равна 1

Дискретные случайные величины

Задача 2.1. В результате подбрасывания двух игральных костей появляется некоторое число X — случайная величина, характеризующая сумму выпавших очков с определенной вероятностью. Найти закон распределения такой случайной величины X.

Решение. Число равновозможных исходов $n = 6 \cdot 6 = 36$, а число благоприятных исходов, например, для $x = 4$ может быть получено тремя способами: $4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1$.

Поэтому соответствующая $x = 4$ вероятность равна $p = \dfrac{3}{36}$.

Закон распределения такой случайной величины можно задать таблицей:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Дискретные случайные величины

Дискретная случайная величина считается *заданной*, если указан закон ее распределения, т.е. известны все значения ДСВ и вероятность каждого из них.

Очевидно, что можно было бы еще учесть выпадение сумм вида 0, 1, 13, 14, ..., а также нецелые числа и т.д., но поскольку ни одно испытание этому не благоприятствует, рассматриваются только реальные испытания. Поэтому для практического применения формул для ДСВ достаточно учитывать *только те* x_i, *для которых* $p_i \neq 0$.

Поскольку каждому значению x ДСВ ставится в соответствие ее вероятность, то закон распределения ДСВ можно задавать с помощью функции распределения ДСВ.

Дискретные случайные величины

Функцией распределения $F(x)$ ДСВ ξ называется вероятность события $\xi < x$: $F(x) = P(\xi < x)$. Очевидно, она обладает всеми общими свойствами функции распределения.

Свойства функции распределения ДСВ:

пусть задана ДСВ X: (x_i, p_i), $p_i \neq 0$, $\sum p_i = 1$. Тогда:

1) функция распределения непрерывна при $x \neq x_i$ и имеет разрыв первого рода при $x = x_i$, равный p_i;
2) функция распределения постоянна на полуинтервале $(x_i, x_{i+1}]$;
3) $F(x_i + 0) - F(x_i) = p_i$;
4) свойство накопительной вероятности:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i. \tag{2.3}$$

Использование этого свойства удобно при моделировании, например на ЭВМ, где сначала указывают пределы суммирования, не зависящие от суммируемых величин.

Дискретные случайные величины

График функции распределения произвольной ДСВ представляет собой «возрастающую ступеньку» (рис. 2.1). График функции распределения ДСВ, заданной аналитически формулой

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le x_1; \\ p_1 & \text{при} \quad x_1 < x \le x_2; \\ 1 & \text{при} \quad x > x_2, \end{cases}$$

приведен на рис. 2.1.

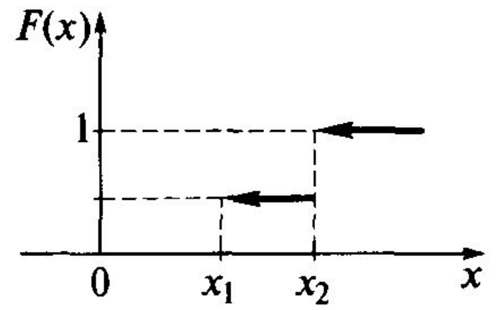


Рис. 2.1

Дискретные случайные величины

Очевидно, что это функция распределения «неслучайной» СВ, принимающей значение 0 с вероятностью 1. Тогда ФР ДСВ, заданной рядом распределений, будет иметь вид $F(x) = \sum_i p_i \theta(x - x_i)$.

Проверьте, что все свойства функции распределения ДСВ выполнены. Таким образом, суммирование идет по всем i, и необязательно представлять ряд распределений в виде ранжированного ряда, т. е. для машинного задания требуется меньшее число сравнений, а значит, машинного времени.

Дискретные случайные величины

Пусть φ — некоторая детерминированная функция, определенная на пространстве элементарных исходов Ω случайной величины X. Тогда каждому возможному значению x_i случайной величины X соответствует определенное значение $y_i = \varphi(x_i)$. В таком случае исходу y_i благоприятствует элементарный исход x_i с той же вероятностью p_i, т.е. функция φ задает новое пространство элементарных исходов φ (Ω), на котором задана случайная величина Y, называемая ***функцией одного случайного аргумента*** $Y = \varphi(X)$.

Дискретные случайные величины

Если одному значению y_i соответствуют различные значения x_1, ..., x_k, то полная вероятность осуществления y_i равна сумме вероятностей всех исходов, влекущих y_i, т.е.

$$p(X = x_1 \text{ или... или } X = x_k) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i.$$

Дискретные случайные величины

Задача 2.2. Дискретная случайная величина X задана рядом распределений:

x_i	-2	2	5
$P(x_i)$	0,35	0,42	0,23

Составить закон распределения ДСВ $Y = X^2$.

Решение. Составим закон распределения ДСВ $Y = X^2$:

x_i	-2	2	5
$(x_i)^2$	4	4	25
$P(x_i)$	0,35	0,42	0,23

Так как двум различным значениям СВ X ($x = -2$, $x = 2$) соответствуют равные значения СВ Y ($y = 4$), то составим новый закон распределения ДСВ $Y = X^2$, сложив вероятности, соответствующие этим значениям СВ X:

y_i^2	4	25
$P(y_i)$	0,77	0,23

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Запишите закон распределения СВ задачи:

Деревянный кубик с окрашенными гранями распиливается на 64 равных кубика, из которых наугад выбирается один кубик. Какова вероятность того, что он будет содержать:

1) ровно одну окрашенную грань
2) ровно две;
3) ровно три:
4) хотя бы одну;
5) более трех;
6) не менее двух.

2. Случайная величина X задана рядом распределения. Определите недостающее значение вероятности:

x	3	5	7	11	12
p	0,18	0,13	0,33	0,21	?

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

3. Составить опорный конспект по теме